

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра оптоинформатики

535(07)  
Б591

Э.А. Бибикова, Н.Д. Кундикова, А.А. Шульгинов

# **НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. ЗАДАНИЯ ДЛЯ МАГИСТРАНТОВ**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2022

УДК 535.2(076.5)  
Б591

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
Института естественных и точных наук*

*Рецензенты:  
д.ф.-м.н. А.Е. Майер, к.т.н. М.Г. Иванов*

**Бибикова, Э.А.**  
Б591      Нелинейная оптика. Задания для магистрантов: учебное пособие / Э.А. Бибикова, Н.Д. Кундикова, А.А. Шульгинов; – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. – 40 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре, по направлению подготовки 03.04.01 – «Прикладные математика и физика», магистерская программа «Волоконная и лазерная оптика». Оно содержит план и краткое содержание лекций и практических занятий. Для каждого практического занятия имеется список основных понятий, которые студент должен усвоить перед выполнением задания и список вопросов по данной теме, а также примеры решения задач и задания для самостоятельного решения.

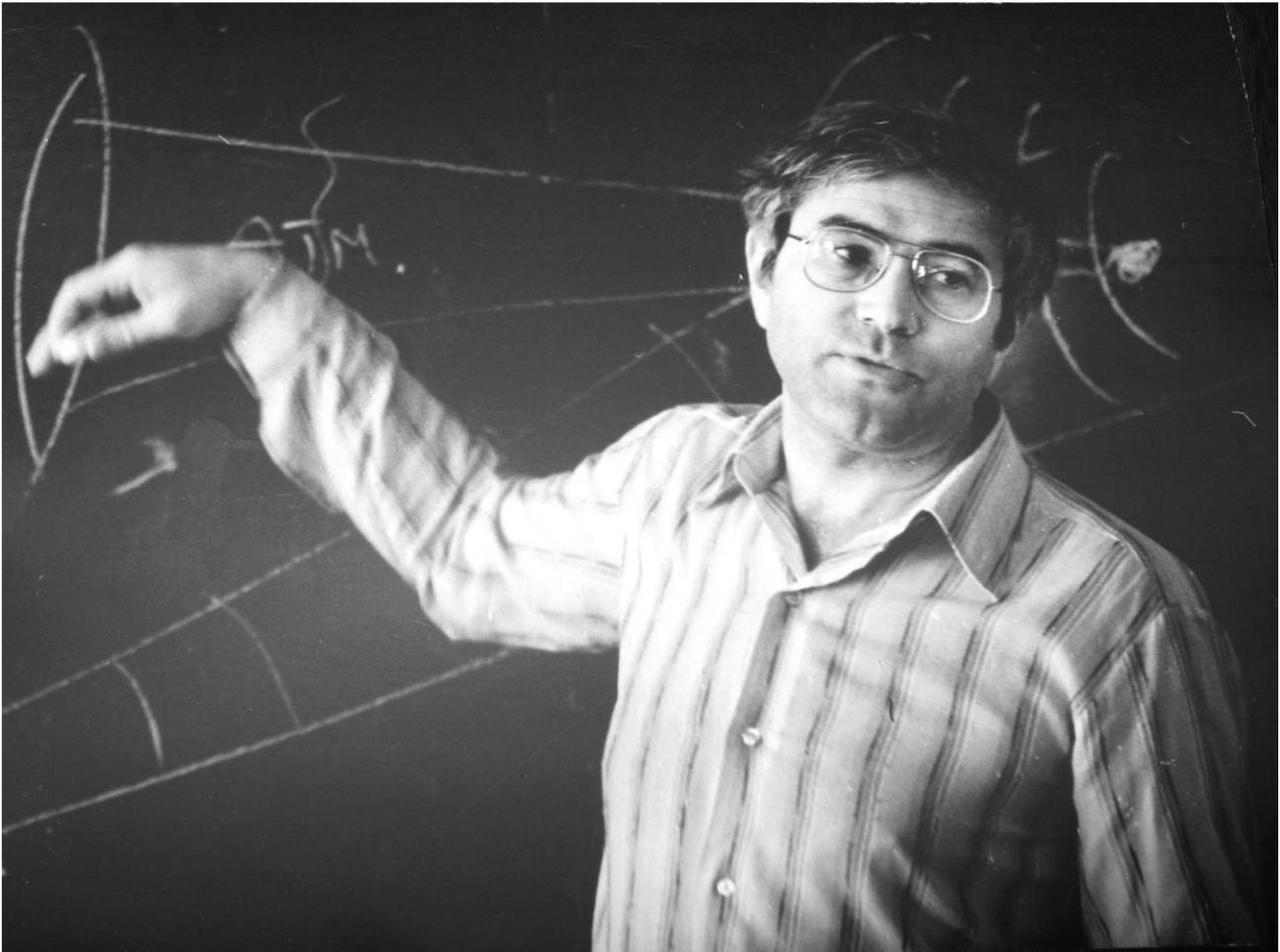
УДК 535.2(076.5)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>ТЕМА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ ...</b>	<b>6</b>
<b>ТЕМА 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ.....</b>	<b>10</b>
<b>ТЕМА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ 2-ГО ПОРЯДКА .....</b>	<b>15</b>
<b>ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ АМПЛИТУД.....</b>	<b>19</b>
<b>ТЕМА 5. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ. ФАЗОВЫЙ СИНХРОНИЗМ ВОЛН .....</b>	<b>26</b>
<b>ТЕМА 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТА .....</b>	<b>30</b>
<b>ТЕМА 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ 3-ГО ПОРЯДКА .....</b>	<b>35</b>
<b>ТЕМА 8. ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА.....</b>	<b>38</b>
<b>СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ .....</b>	<b>39</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>40</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Этот скромный труд авторы посвящают памяти выдающегося учёного в области нелинейной оптики, нашего учителя, член-корреспондента РАН Бориса Яковлевича Зельдовича [1]. Он является автором многочисленных научных трудов по нелинейному взаимодействию волн, обращению волнового фронта [2], оптическим свойствам жидких кристаллов, теоретические исследования взаимовлияния поляризации света и процесса его распространения. Им впервые введено в научный обиход понятие полярной асимметрии светового поля и предсказаны новые оптические эффекты в таких полях.



В 1987 г. в Челябинске под руководством Бориса Яковлевича была создана лаборатория нелинейной оптики. С этого времени в Челябинском политехническом институте начала развиваться научная школа, которая существует и сегодня. Ученики Бориса Яковлевича ведут научную работу в области оптики и обучают студентов бакалавриата и магистратуры в Южно-Уральском государственном университете по направлению «Прикладные математика и физика», в том числе дисциплине «Нелинейная оптика».

Хотя в настоящее время имеется достаточно фундаментальных учебников и учебных пособий по нелинейной оптике [2–14], тем не менее, возникла необходимость в написании учебного пособия именно по решению задач, которые помогают студентам магистратуры лучше усвоить основные разделы этой дисциплины.

Материал пособия разделён на 8 тем. Каждая из них содержит план лекции, которая должна предшествовать практическому занятию, контрольные вопросы, примеры решения задач и задание для самостоятельной работы. В пособии использована Международная система единиц (СИ).

Перед началом работы с пособием нелишним будет напомнить общие замечания о решения задач по физике, включая нелинейную оптику.

1. Практика показывает, что студент терпит неудачу в решении задач чаще всего из-за неглубоких, формальных знаний теории. Поэтому, прежде чем приступить к решению, тщательно проработайте соответствующий теоретический материал [2–14].

2. Задачи следует решать в общем виде. При необходимости сделать поясняющий рисунок и обозначить все величины соответствующими буквами. С помощью физических законов установить математическую связь между исходными данными и искомой величиной. При этом все математические преобразования необходимо сопровождать подробным объяснением. В результате получается одно или несколько уравнений, и физическая задача сводится к математической.

3. Получив для искомой величины решение в общем виде, нужно проверить её размерность в единицах СИ. Неверная размерность есть явный признак ошибочности решения. Убедившись, что общее решение верно, в него подставляют числовые значения величин в СИ. Если исходные или конечные величины значительно больше или значительно меньше единицы, то числа пишут в стандартном виде или с использованием десятичных приставок.

4. Так как числовые значения физических величин всегда бывают приближёнными, то при расчётах необходимо разумно округлять результат.

5. Получив числовой ответ, нужно оценить его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

# ТЕМА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

## ПЛАН ЛЕКЦИИ

### 1. Основные цели и задачи нелинейной оптики.

- Нелинейная оптика – это раздел физической оптики, изучающий распространение интенсивных световых волн и взаимодействие их с веществом, при котором характер оптических явлений зависит от интенсивности излучения.
- Основные причины, определяющие различный характер взаимодействия световых полей малой и большой интенсивности с веществом: многофотонные процессы и влияние излучения на свойства среды, например, на коэффициент поглощения или показатель преломления.

### 2. История развития нелинейной оптики. Основные достижения и перспективы развития.

- 19 в. – Открытие нелинейных оптических эффектов, возникающих в постоянных электрическом и магнитном полях (Д. Керр и М. Фарадей).
- 1923 – Опыты по резонансному просветлению оптических сред (урановых стёкол) (С.И. Вавилов и В.Л. Левшин).
- 1955 – Эксперименты по наблюдению нелинейного взаимодействия волн (Г. Горелик, А. Форрестер).
- 1961 – Наблюдение генерации второй гармоники излучения рубинового лазера в кварце (П. Франкен).
- 1965 – Наблюдение самофокусировки света (Н.Ф. Пилипецкий, А.Р. Рустамов) и параметрической генерации в ниобате лития (Дж. Джордмэйн и Р. Миллер).
- 60-е годы XX века – Создание отечественной научной школы по нелинейной оптике под руководством Р.В. Хохлова.
- 1979-1980 – Первое экспериментальное исследование оптических солитонов в волоконных световодах (Л. Молленауэр).

### 3. Связь поляризованности среды с напряжённостью электрического поля.

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j + \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots$$

### 4. Электронная, ионная, ориентационная поляризованность.

### 5. Поляризованность изотропной и анизотропной среды.

### 6. Одноосные и двухосные кристаллы.

7. Тензор диэлектрической восприимчивости порядка  $m$  и его физический смысл.

8. Линейная, квадратичная, кубическая диэлектрическая восприимчивость. Порядки значений  $\chi^{(m)}$  для различных веществ. Единицы измерения.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** уравнения Максвелла, поляризованность среды, линейная и нелинейная диэлектрическая восприимчивость, параметр нелинейности.

### Контрольные вопросы

1. Перечислить основные характеристики электромагнитной волны.
2. Объяснить физический смысл уравнений Максвелла.
3. Дать определения операторов  $\text{rot}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ , оператора Лапласа, опишите их свойства и известные тождества с этими операторами из курса векторного анализа.
4. Объяснить различный характер взаимодействия световых полей малой и большой интенсивности с веществом.
5. Каков физический смысл диэлектрической восприимчивости порядка  $m$ ?
6. Почему в кварцевых стёклах, применяемых в оптических световодах, не могут иметь место нелинейные эффекты 2-го порядка?
7. Привести примеры линейных и нелинейных физических законов и явлений.
8. Привести примеры изотропных оптических сред, одноосных и двухосных кристаллов.
9. Что такое электронная, ионная и ориентационная поляризованность?

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Оценить напряжённость электрического поля на первой бордовской орбите атома водорода.

**Решение.** Выражение для определения радиуса первой бордовской орбиты атома водорода следует из правила квантования:  $mVr = n\hbar$  и законов классической физики:  $m \frac{V^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , где  $m$ ,  $e$  – масса и заряд электрона,  $V$ ,  $r$  – скорость

движения и радиус орбиты,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная,  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $n = 1$  – главное квантовое число.

Отсюда получаем выражение для радиуса первой боровской орбиты:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м.} \quad (1.1)$$

Тогда, напряжённость электрического поля ядра атома водорода на первой боровской орбите будет равна:

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \approx 5,1 \cdot 10^{11} \text{ В/м.} \quad (1.2)$$

**Задача 2.** Оценить интенсивность излучения, которое имеет максимальную напряжённость электрического поля равную напряжённости поля на первой боровской орбите атома водорода.

*Решение.* В бегущей плоской волне плотность энергии магнитного поля равна плотности энергии электрического поля в любой момент времени и в любой точке пространства. Это следствие уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H_m^2, \quad (2.1)$$

где,  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды. Для оценки можно принять  $\varepsilon = \mu = 1$ .  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянная;  $E_m$ ,  $H_m$  – амплитуды напряжённости электрического и магнитного поля электромагнитной волны.  $E_m = 5,1 \cdot 10^{11}$  В/м. См. предыдущую задачу.

Интенсивность излучения  $I$  равна среднему по времени модулю вектора плотности потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга):

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{2} E_m H_m. \quad (2.2)$$

Подставляя  $H_m$  из (2.1) в (2.2), получаем:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2, \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (2.3)$$

Отсюда,

$$I = \frac{(5,1 \cdot 10^{11})^2}{2 \cdot 377} \approx 3,4 \cdot 10^{20} \text{ Вт/м}^2.$$

### ЗАДАНИЕ 1

1. Записать формулу зависимости поляризованности среды от напряжённости электрического поля для:

1.1. Кварцевого стекла;

1.2. Анизотропного кристалла

в случае слабого и сильного поля.

2. Оценить параметр нелинейности для лазерного импульса с энергией  $E = 10$  мДж, длительностью  $\tau = 40$  пс, длиной волны  $\lambda = 532$  нм в области фокальной перетяжки, которая находится в неферромагнитном веществе. Для оценки выбрать внутриатомное поле  $E_{ат} = 5 \cdot 10^{11}$  В/м.

3. Вывести волновое уравнение электромагнитной волны большой интенсивности для анизотропной среды при больших интенсивностях с учётом оптической нелинейности среды:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}$$

## ТЕМА 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Классическая линейная модель взаимодействия излучения с веществом (теория Друде-Лоренца).

- Среда – набор гармонических независимых осцилляторов (молекул).
- Электрическое поле волны возбуждает в среде волну поляризованности, которая обуславливает возникновение вторичной электромагнитной волны.
- Размер диполя  $l$  сопоставим с размером атома  $a$  ( $a \sim 1 \text{ \AA}$ ), а длина волны излучения  $\lambda \gg l$ .

Дифференциальное уравнение колебаний электрона:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_m \cos \omega t .$$

Решая это уравнение, получаем выражение для линейной диэлектрической восприимчивости:

$$\chi^{(1)} = \frac{\omega_p^2}{D(\omega)}, \text{ где } \omega_p \text{ – плазменная частота, } D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta .$$

$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} = n - i\alpha$ , где  $n$  – показатель преломления среды,  $\alpha$  – линейный коэффициент поглощения.

2. Модель ангармонического осциллятора. Ограничимся разложением потенциальной энергии по  $x$  до 4-ой степени.

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{3} m\gamma x^3 - \frac{1}{4} m\delta x^4 .$$

Дифференциальное уравнение колебаний электрона:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma x^2 + \delta x^3 - \frac{e}{m} E_m \cos \omega t .$$

Решаем это уравнение методом малых возмущений ( $x = x_0 + x_1$ ), где  $x_0$  – решение линейного гармонического уравнения:  $x_0 = \frac{(e/m) E_m}{D(\omega)} \cos \omega t$ ,

$x_1$  – решение уравнения:  $\ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \gamma x_0^2 + \delta x_0^3$ .

Общее решение имеет вид:  $x = A + B \cos \omega t + C \cos 2\omega t + D \cos 3\omega t$ .

3. Анализ взаимодействия интенсивного излучения с веществом с точки зрения модели ангармонического осциллятора.

Выводы. Эта модель объясняет следующие нелинейно оптические явления:

- генерацию второй гармоники (ГВГ) в среде без центра симметрии ( $\delta \neq 0$ ),
- генерацию третьей гармоники (ГТГ),
- оптическое детектирование,
- зависимость показателя преломления от интенсивности излучения ( $n = n_0 + n_2 I$ ).

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** ангармонический осциллятор, неизохронные колебания, параметры нелинейности осциллятора.

### Контрольные вопросы

1. Каковы границы применимости линейной модели Друде-Лоренца взаимодействия излучения с веществом?
2. Каким свойством должна обладать среда, чтобы при взаимодействии с излучением частотой  $\omega$ , возникло излучение частотой  $2\omega$ ?
3. Какова физическая природа ангармоничности колебаний электрона в атоме при воздействии интенсивного излучения?

### Пример решения задачи

**Задача.** Электрон в атоме находится в одномерной потенциальной яме, описываемой выражением:

$$U(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3} m \gamma x^3. \quad (1)$$

Здесь,  $x$  – смещение электрона относительно положения равновесия;  
 $\omega_0$  – собственная частота свободных незатухающих колебаний электрона;  
 $m$  – масса электрона;

$\gamma$  – известный коэффициент, учитывающий асимметрию потенциальной ямы.

Концентрация атомов в веществе  $N_0$ . На него воздействует монохроматическая электромагнитная волна:

$$E(t) = E_m \cos \omega t. \quad (2)$$

1) Написать дифференциальное уравнение колебаний электрона с учётом слабого затухания, пропорционального скорости движения.

2) Вывести выражение для нелинейной восприимчивости  $\chi^{(2)}(\omega)$ .

*Решение.* 1) На электрон в атоме действуют силы со стороны ядра, со стороны других электронов и со стороны окружения атома. Эти воздействия образуют потенциальную яму, описываемую выражением (1). Кроме того, на него действует диссипативная сила, вызывающая затухание колебаний:  $F_{\text{дисс}} = -2m\beta\dot{x}$ , а также электрическое поле волны. Запишем II закон Ньютона:

$$\text{Ох: } m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma x^2 - 2m\beta\dot{x} - eE_m \cos \omega t. \quad (3)$$

Здесь учтено, что  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ .  $\beta$  – коэффициент затухания колебаний. В каноническом виде дифференциальное уравнение колебаний запишем в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = -\frac{e}{m} E_m \cos \omega t. \quad (4)$$

2) Под воздействием периодического поля волны происходит поляризация атомов. Возникает поляризованность среды  $P$ , которая равна сумме электрических дипольных моментов атомов, отнесённая к объёму вещества:

$$P = \frac{\sum p_{ei}}{\Delta V} = \frac{N}{\Delta V} p_e = N_0 p_e = -N_0 e x. \quad (5)$$

Необходимо найти нелинейную диэлектрическую восприимчивость 2-го порядка  $\chi^{(2)}$  из выражения:

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2. \quad (6)$$

Для этого необходимо решить дифференциальное уравнение (4). Будем полагать, что ангармоническое слагаемое  $\gamma x^2$  мало по сравнению с остальными. Можно применить метод последовательных приближений. Сначала решим это уравнение без учёта ангармонического слагаемого:

$$\ddot{x}_0 + 2\beta\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{e}{m} E_m \cos \omega t. \quad (7)$$

Для удобства добавим в правую часть мнимое слагаемое:

$$\ddot{x}_0 + 2\beta\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{e}{m} E_m (\cos \omega t + i \sin \omega t) = -\frac{e}{m} E_m \cdot e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Получим нулевое приближение:

$$x_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{-(e/m) E_m e^{i\omega t}}{D(\omega)} \right) = \frac{-(e/m) E_m}{|D(\omega)|} \cos(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

где  $D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta = |D(\omega)| e^{-i\varphi}$ . В случае слабого затухания ( $\beta \ll \omega_0$ ) смещением фазы  $\varphi$  можно пренебречь.

Сделаем 1-ое приближение. Для этого  $x = x_0 + x_1$  подставим в исходное дифференциальное уравнение (4). Будем считать, что  $x_1 \ll x_0$ . С учётом (8) получим:

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \approx -\gamma x_0^2 \approx -\gamma \frac{(e/m)^2}{|D(\omega)|^2} E_m^2 \cos^2 \omega t, \quad (10)$$

Учтём, что  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ . Тогда решение этого уравнение примет вид:

$$x_1 = -\gamma \frac{(e/m)^2}{2|D(\omega)|^2 \omega_0^2} E_m^2 - \gamma \frac{(e/m)^2}{2|D(\omega)|^3} E_m^2 \cos 2\omega t. \quad (11)$$

Подставим  $x$  в выражение (5):

$$P = N_0 \frac{(e^2/m) E_m}{|D(\omega)|} \cos \omega t + \gamma \frac{N_0 e (e/m)^2}{2|D(\omega)|^2 \omega_0^2} E_m^2 + \\ + \gamma \frac{N_0 e (e/m)^2}{2|D(\omega)|^3} E_m^2 \cos 2\omega t. \quad (12)$$

Введём обозначение:  $\omega_p = \sqrt{N_0 e^2 / m \epsilon_0}$  – плазменная частота. Тогда выражение (12) запишем в виде:

$$P = P_0 + \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{|D(\omega)|} E + \varepsilon_0 \gamma \frac{e}{m} \frac{\omega_p^2}{|D(\omega)|^3} E^2. \quad (13)$$

Здесь учтено, что  $E_m^2 \cos 2\omega t = 2E_m^2 \cos^2 \omega t - E_m^2 = 2E^2 - E_m^2$ . Также введено новое обозначение:

$$P_0 = \varepsilon_0 \gamma \frac{e}{m} \frac{\omega_p^2}{2|D(\omega)|^3} \left( \frac{|D(\omega)|}{\omega_0^2} - 1 \right) E_m^2. \quad (14)$$

Сопоставим выражения (6) и (13), и получим ответ:

$$\chi^{(2)} = \gamma \frac{e}{m} \frac{\omega_p^2}{|D(\omega)|^3}. \quad (15)$$

Размерности величин проверить самостоятельно.

## ЗАДАНИЕ 2

Допустим, что среда состоит из атомов, которые можно представить в виде независимых ангармонических осцилляторов. Их поведение которых описывается уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 + \delta x^3 = -\frac{e}{m} E_m \cos \omega t,$$

где  $\omega_0$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  – известные константы осциллятора,  $E_m$ ,  $\omega$  – амплитуда и циклическая частота электромагнитной волны, воздействующей на него,  $e/m$  – удельный заряд электрона,  $N_0$  – концентрация осцилляторов (электронов),  $x$  – смещение электрона относительно ядра.

1. Получить выражение для нелинейных диэлектрических восприимчивостей  $\chi^{(2)}(2\omega, \omega, \omega)$  и  $\chi^{(3)}(3\omega, \omega, \omega, \omega)$  среды.

2. Показать, что в таких нелинейных средах нарушается принцип неизменности частоты света при переходе из одной среды в другую.

3. Получить зависимость показателя преломления  $n$  от интенсивности излучения  $I$ .

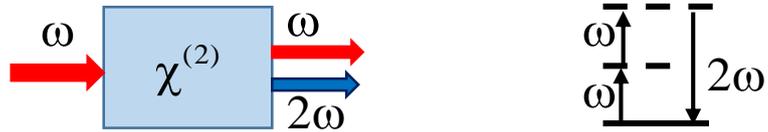
4. Получить выражение для неизменной поляризованности среды  $P_0$ .

## ТЕМА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ 2-ГО ПОРЯДКА

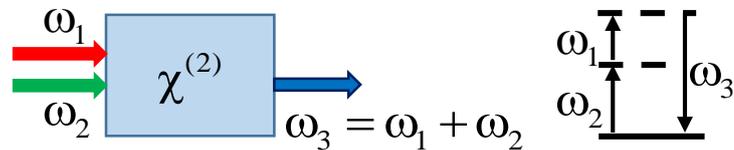
### ПЛАН ЛЕКЦИИ

#### 1. Классификация нелинейных эффектов 2-го порядка:

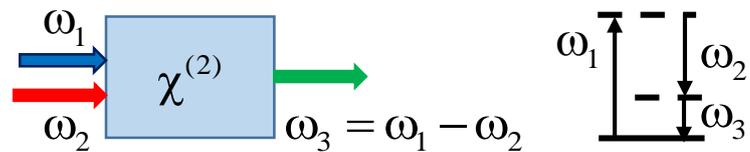
- генерация второй гармоники (ГВГ)



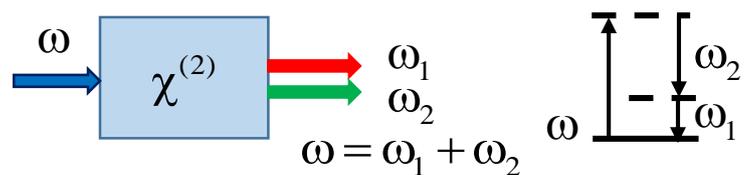
- генерация суммарной частоты (ГСЧ)



- генерация разностной частоты (ГРЧ)



- параметрическая генерация света (ПГС)



#### 2. Свойства симметрии тензоров восприимчивости $\chi_{ijk}^{(2)}$ .

- Вещественность полей:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2, -\omega_1, -\omega_2)^*$$

- Внутренняя перестановочная симметрия:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2 + \omega_1, \omega_2, \omega_1)$$

- Симметрия в непоглощающей среде. Все компоненты тензора вещественны и обладают полной перестановочной симметрией, например,  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3, \omega_2, -\omega_3)$
- Клейнмановская симметрия. Среда бездисперсионная, т.к. собственная частота атомов  $\omega_0 \gg \omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Это приводит к полной перестановочной симметрии по индексам  $ijk$ . Например,  $\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{jik}^{(2)} = \chi_{jki}^{(2)}$ .
- Симметрия кристаллической решётки.

3. Эффективная диэлектрическая восприимчивость 2-го порядка

$$d_{il} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} \cdot \cdot$$

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** Нелинейная диэлектрическая восприимчивость 2-го порядка  $\chi^{(2)}$ , внутренняя перестановочная симметрия, симметрия кристаллов, клейнмановская симметрия, эффективная диэлектрическая восприимчивость  $d_{\text{eff}}$ .

### Контрольные вопросы

1. Перечислите известные сингонии кристаллов и укажите, какие элементы симметрии есть в эти группах.
2. Какие существуют способы получения искусственной анизотропии?
3. Какая группа симметрии кристаллов не подходит для эффективной генерации второй гармоники и почему?
4. Сравните оптические свойства одноосных и двуосных кристаллов.
5. Перечислить основные свойства симметрии тензоров восприимчивости.
6. Что такое эффективная диэлектрическая восприимчивость?

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Определить сколько независимых тензоров нелинейной диэлектрической восприимчивости квадратично-нелинейной среды описывает взаимодействие трёх волн с частотами  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ? Определить общее количество компонент тензоров.

**Решение.** Квадратичная поляризованность связана с напряжённостью электрических полей следующим соотношением:

$$P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k . \quad (1.1)$$

Напряжённость электрического поля волны складывается из трёх составляющих:

$$E_n = E_{1n} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_{2n} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_{3n} \cos(\omega_3 t + \varphi_3), \quad n = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Запишем выражение (1.2) в представлении комплексных амплитуд:

$$E_n = \frac{1}{2} A_{1n} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} A_{2n} e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{2} A_{3n} e^{i\omega_3 t} + \text{c.c.}, \quad (1.3)$$

где  $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}$  – комплексные амплитуды волн. Подставим (1.3) в (1.1) и оставим только те слагаемые, которые содержат  $\omega_1, \omega_2$  или  $\omega_3$  в экспоненте и их отрицательные значения. В итоге получим:

$$\begin{aligned} P_i^{(2)} = & \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) A_{1j} A_{2k} e^{i\omega_3 t} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) A_{2j} A_{1k} e^{i\omega_3 t} + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, -\omega_1) A_{3j} A_{1k}^* e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3) A_{1j}^* A_{3k} e^{i\omega_2 t} + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2) A_{3j} A_{2k}^* e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_3) A_{2j}^* A_{3k} e^{i\omega_1 t} + \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Получим 6 тензоров  $\chi_{ijk}^{(2)}$  и столько же комплексно-сопряжённых. Общее количество тензоров – 12. Однако, можно учесть внутреннюю перестановочную симметрию, например,  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1)$ . Это сразу сокращает количество тензоров вдвое, т.к. соседние слагаемые в (1.4) оказываются одинаковыми. Кроме того, учитывая вещественность полей, должно выполняться условие, например,  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_3, -\omega_1, -\omega_2)^*$ . Это ещё сокращает количество независимых тензоров вдвое. Таким образом, количество независимых тензоров, описывающих взаимодействие трёх гармонических волн в нелинейно-оптической среде равно **3**.

Каждый тензор 3-го ранга содержит  $3 \times 3 \times 3 = 27$  компонент. Значит, общее количество компонент тензоров равно  $27 \times 3 = \mathbf{81}$  комплексных чисел.

**Задача 2.** Определить количество независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости квадратично-нелинейной среды в непоглощающей бездисперсионной среде без учёта сингонии кристаллов.

*Решение.* Если среда непоглощающая, все компоненты тензора вещественны. Кроме того, отсутствие поглощения излучения означает, что зависимость от частот тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$  (дисперсия) незначительная. Это называется Клейнмановская симметрия. Также это приводит к перестановочной симметрии относительно двух последних индексов:  $\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{ikj}^{(2)}$ . Значит из 27 компонент

$$\begin{pmatrix} \chi_{311} & \chi_{312} & \chi_{313} \\ \chi_{321} & \chi_{322} & \chi_{323} \\ \chi_{331} & \chi_{332} & \chi_{333} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_{211} & \chi_{212} & \chi_{213} \\ \chi_{221} & \chi_{222} & \chi_{223} \\ \chi_{231} & \chi_{232} & \chi_{233} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_{111} & \chi_{112} & \chi_{113} \\ \chi_{121} & \chi_{122} & \chi_{123} \\ \chi_{131} & \chi_{132} & \chi_{133} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

остаётся независимых  $6 \times 3 = 18$ .

На практике для описания нелинейных взаимодействий 2-го порядка используют матрицу  $3 \times 6$   $d_{il} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)}$ , которая называется эффективная диэлектрическая восприимчивость. Соответствие между индексами такое:

$l$	1	2	3	4	5	6
$jk$	11	22	33	23, 32	13, 31	12, 21

Учёт симметрии кристаллической решётки уменьшает число независимых компонент  $d_{il}$  до величины от 1 до 5 в зависимости от типа кристаллической решётки (сингонии).

### ЗАДАНИЕ 3

1. Записать зависимость поляризованности среды  $\vec{P}(\omega_3)$  от  $\vec{E}(\omega_1)$  и  $\vec{E}(\omega_2)$  при ГСЧ  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  в непоглощающей бездисперсионной среде.

2. Записать зависимость поляризованности среды  $\vec{P}(2\omega)$  от  $\vec{E}(\omega)$  при ГВГ в непоглощающей бездисперсионной среде.

## ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ АМПЛИТУД

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Метод медленно меняющихся амплитуд.
2. Вывод уравнения связанных амплитуд для ГСЧ ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ).

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\sigma_1 A_2^* A_3 \exp(-i\Delta kz), \quad \sigma_1 = \frac{d\omega_1}{cn_1}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -i\sigma_2 A_1^* A_3 \exp(-i\Delta kz), \quad \sigma_2 = \frac{d\omega_2}{cn_2}$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -i\sigma_3 A_1 A_2 \exp(i\Delta kz), \quad \sigma_3 = \frac{d\omega_3}{cn_3}$$

3. Соотношение Мэнли-Роу.

$$\frac{1}{\omega_3} \frac{dI_3}{dz} = -\frac{1}{\omega_1} \frac{dI_1}{dz} = -\frac{1}{\omega_2} \frac{dI_2}{dz}$$

4. Доказать, что при взаимодействии трёх волн с частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  в нелинейной непоглощающей среде суммарная интенсивность излучений не изменяется.

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** Комплексная амплитуда волны, волновой вектор, волновое число, волновой фронт, интенсивность излучения, фотоны.

#### Контрольные вопросы

1. В чём состоит приближение медленно меняющихся амплитуд?
2. В каком случае он не может быть применён?
3. Каков физический смысл соотношения Мэнли-Роу для описания нелинейных систем?
4. Опишите физический смысл приближения заданного поля.
5. Что такое волновая расстройка?

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Вывести систему уравнений связанных амплитуд для ГРЧ.

*Решение.* В нелинейно-оптический кристалл вводят два излучения интенсивностью  $I_1$  и  $I_2$ , частотой  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Считаем, что волны распространяются в одном направлении вдоль оси  $Oz$ . При нелинейном взаимодействии этих волн может возникнуть излучение частотой  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Запишем уравнение нелинейного взаимодействия волн в среде без учёта поглощения:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{P}^{NL}$  – нелинейная составляющая поляризованности среды. Напряжённость электрического поля 3-х волн, распространяющихся в среде, может быть записана следующим образом:

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{e}_1 A_1(z) \exp(i\omega_1 t - ik_1 z) + \vec{e}_2 A_2(z) \exp(i\omega_2 t - ik_2 z) + \vec{e}_3 A_3(z) \exp(i\omega_3 t - ik_3 z) + \text{c.c.} \right] \quad (1.2)$$

Нелинейная составляющая поляризованности среды может быть также разложена по этим трём частотам:

$$\vec{P}^{NL}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{e}_1 P_1(z) \exp(i\omega_1 t) + \vec{e}_2 P_2(z) \exp(i\omega_2 t) + \vec{e}_3 P_3(z) \exp(i\omega_3 t) + \text{c.c.} \right] \quad (1.3)$$

Предварительно найдём вторые производные по  $z$  и по  $t$  напряжённости поля (1.2) и нелинейной поляризованности (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = & \frac{1}{2} \left[ \vec{e}_1 \left( \frac{d^2 A_1}{dz^2} - 2ik \frac{dA_1}{dz} - k_1^2 A_1 \right) \exp(i\omega_1 t - ik_1 z) + \right. \\ & + \vec{e}_2 \left( \frac{d^2 A_2}{dz^2} - 2ik \frac{dA_2}{dz} - k_2^2 A_2 \right) \exp(i\omega_2 t - ik_2 z) + \\ & \left. + \vec{e}_3 \left( \frac{d^2 A_3}{dz^2} - 2ik \frac{dA_3}{dz} - k_3^2 A_3 \right) \exp(i\omega_3 t - ik_3 z) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд, когда изменение амплитуды на расстоянии равном длине волны незначительно по сравнению с самой амплитудой, можно отбросить вторые производные по  $z$  в выражении (1.4), т.к.

$$\frac{d^2 A_i}{dz^2} \ll k \frac{dA_i}{dz}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} & \left[ \vec{e}_1 A_1 \cdot (-\omega_1^2) \exp(i\omega_1 t - ik_1 z) + \right. \\ & + \vec{e}_2 A_2 \cdot (-\omega_2^2) \exp(i\omega_2 t - ik_2 z) + \\ & \left. + \vec{e}_3 A_3 \cdot (-\omega_3^2) \exp(i\omega_3 t - ik_3 z) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} & \left[ \vec{e}_1 P_1(z) (-\omega_1^2) \exp(i\omega_1 t) + \right. \\ & + \vec{e}_2 P_2(z) (-\omega_2^2) \exp(i\omega_2 t) + \\ & \left. + \vec{e}_3 P_3(z) (-\omega_3^2) \exp(i\omega_3 t) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставим производные (1.4), (1.6), (1.7) в волновое уравнение (1.1) с учётом (1.5) и получим уравнения для каждой из трёх амплитуд:

$$\left( -2ik_j \frac{dA_j}{dz} - k_j^2 A_j \right) \exp(-ik_j z) + \frac{n_j^2 \omega_j^2}{c^2} A_j \exp(-ik_j z) = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \omega_j^2 P_j. \quad (1.8)$$

Учтём, что волновое число для  $j$ -ой волны определяется выражением

$$k_j = \frac{n_j \omega_j}{c}, \quad \text{получим:}$$

$$\begin{aligned} 2ik_j \frac{dA_j(z)}{dz} &= \frac{\omega_j^2}{c^2 \epsilon_0} P_j(z) \exp(ik_j z) \\ \frac{dA_j(z)}{dz} &= -i \frac{\omega_j}{2cn_j \epsilon_0} P_j(z) \exp(ik_j z), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ограничимся учётом нелинейности 2-го порядка. Тогда  $P_i(z, t) = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$ .

Для заданного направления поляризации волн  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ ,

$$P^{NL}(z, t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 = 2d\varepsilon_0 E^2, \quad (1.10)$$

где  $d$  – эффективная диэлектрическая восприимчивость кристалла 2-го порядка.

Подставим в (1.10) выражение (1.2) теперь без учёта векторов поляризации:

$$\begin{aligned} P^{NL}(z, t) = \frac{1}{2} d\varepsilon_0 & \left( A_1(z) \exp(i\omega_1 t - ik_1 z) + A_1^*(z) \exp(-i\omega_1 t + ik_1 z) + \right. \\ & + A_2(z) \exp(i\omega_2 t - ik_2 z) + A_2^*(z) \exp(-i\omega_2 t + ik_2 z) + \\ & \left. + A_3(z) \exp(i\omega_3 t - ik_3 z) + A_3^*(z) \exp(-i\omega_3 t + ik_3 z) \right)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При раскрытии квадрата суммы в выражении (1.11) возникнет 21 слагаемое. Однако, нет необходимости учитывать все слагаемые, а только те из них, которые содержат множители  $\exp(i\omega_1 t)$ ,  $\exp(i\omega_2 t)$ ,  $\exp(i\omega_3 t)$  и их комплексно-сопряжённые (1.7), поскольку в задаче поставлено исследовать взаимодействие только этих трёх волн, причём таких, что  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} P^{NL}(z, t) = d\varepsilon_0 & \left( A_2 A_3 \exp(-i(k_2 + k_3)z) \exp(i\omega_1 t) + \right. \\ & + A_1 A_3^* \exp(-i(k_1 - k_3)z) \exp(i\omega_2 t) + \\ & \left. + A_1 A_2^* \exp(-i(k_1 - k_2)z) \exp(i\omega_3 t) + \text{c.c.} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сопоставим полученное выражение с (1.7), получим:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= 2d\varepsilon_0 A_2 A_3 \exp(-i(k_2 + k_3)z), \\ P_2(z) &= 2d\varepsilon_0 A_1 A_3^* \exp(-i(k_1 - k_3)z), \\ P_3(z) &= 2d\varepsilon_0 A_1 A_2^* \exp(-i(k_1 - k_2)z). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставим (1.13) в (1.9) и получим окончательные уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_2 A_3 \exp(i\Delta kz), & \sigma_1 &= \frac{d\omega_1}{cn_1}, \\
\frac{dA_2}{dz} &= -i\sigma_2 A_1 A_3^* \exp(-i\Delta kz), & \sigma_2 &= \frac{d\omega_2}{cn_2}, \\
\frac{dA_3}{dz} &= -i\sigma_3 A_1 A_2^* \exp(-i\Delta kz), & \sigma_3 &= \frac{d\omega_3}{cn_3},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где  $\Delta k = k_1 - k_2 - k_3$  – расстройка волнового вектора.

**Задача 2.** Решить систему уравнений ГРЧ для случая, когда происходит монотонное усиление волны разностной частоты  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Учесть, что при  $z = 0$   $I_1 \gg I_2$ , а  $I_3 = 0$ .

*Решение.* Необходимо проанализировать систему уравнений (1.14). Введём обозначения:  $A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Тогда, например, 2-ое уравнение может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d(a_2 \exp(i\varphi_2))}{dz} &= -i\sigma_2 a_1 a_3 \exp(i(\varphi_1 - \varphi_3 - \Delta kz)) \\
\frac{da_2}{dz} \exp(i\varphi_2) + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} \exp(i\varphi_2) &= -i\sigma_2 a_1 a_3 \exp(i(\varphi_1 - \varphi_3 - \Delta kz)) \\
\frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} &= -i\sigma_2 a_1 a_3 \cos \psi + \sigma_2 a_1 a_3 \sin \psi,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \Delta kz$$

$$\frac{da_2}{dz} = \sigma_2 a_1 a_3 \sin \psi \quad a_2 \frac{d\varphi_2}{dz} = -\sigma_2 a_1 a_3 \cos \psi$$

Аналогично получим:

$$\frac{da_3}{dz} = \sigma_3 a_1 a_2 \sin \psi \quad a_3 \frac{d\varphi_3}{dz} = -\sigma_3 a_1 a_2 \cos \psi \tag{2.3}$$

$$\frac{da_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \sin \psi \quad a_1 \frac{d\varphi_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \cos \psi \tag{2.4}$$

Таким образом, из (2.2), (2.3) и (2.4) получим 4 взаимозависимых уравнения:

$$\frac{da_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \sin \psi \quad \frac{da_2}{dz} = \sigma_2 a_1 a_3 \sin \psi \quad \frac{da_3}{dz} = \sigma_3 a_1 a_2 \sin \psi \quad (2.5)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\left( \frac{\sigma_1}{a_1^2} - \frac{\sigma_2}{a_2^2} - \frac{\sigma_3}{a_3^2} \right) a_1 a_2 a_3 \cos \psi \quad (2.6)$$

Параметр  $\psi$  есть обобщённая фаза волн, от которой зависит то, какие волны будут усиливаться, а какие ослабляться. Чтобы происходило усиление волны амплитудой  $a_3$ , необходимо, чтобы правая часть 3-го уравнения (2.5) была всегда положительной. Знак правой части зависит от  $\sin \psi$ , который будет неизменным только, если  $\psi = \pi/2$ . Тогда уравнение (2.6) будет удовлетворено. В противном случае,  $\psi$  получит приращение, и знак  $\sin \psi$  будет изменяться вдоль оси  $Oz$ . Это условие приводит к тому, что, во-первых, должно выполняться условие синхронизма, т.е.  $(\Delta k = 0)$ . Во-вторых,  $\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = \pi/2$ . Тогда уравнения (2.5) примут простой вид:

$$\frac{da_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \quad \frac{da_2}{dz} = \sigma_2 a_1 a_3 \quad \frac{da_3}{dz} = \sigma_3 a_1 a_2. \quad (2.7)$$

Если амплитуда волны частотой  $\omega_1$  гораздо больше амплитуды других волн, то можно считать её постоянной.

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} a_1^2, \quad \sqrt{\varepsilon_1} = n_1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{2I_1}{n_1} \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}} \quad (2.8)$$

Продифференцируем 2-ое уравнение (2.7) и подставим в него 3-е:

$$\frac{d^2 a_2}{dz^2} = \sigma_2 a_1 \frac{da_3}{dz} = \sigma_2 \sigma_3 a_1^2 a_2 \quad a_2(0) = a_{20} \quad a_2'(0) = 0 \quad (2.9)$$

Решение дифференциального уравнения (2.9):

$$a_2(z) = a_{20} \operatorname{ch}(\beta z) \quad \beta^2 = \sigma_2 \sigma_3 a_1^2 \quad (2.10)$$

Подставим решение в 3-е уравнение (2.7):

$$\frac{da_3}{dz} = \sigma_3 a_1 a_{20} \operatorname{ch}(\beta z) \quad a_3(0) = 0 \quad a_3 = \frac{\sigma_3 a_1 a_{20}}{\beta} \operatorname{sh}(\beta z) \quad (2.11)$$

$$a_3 = a_{20} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_2}} \operatorname{sh}(\beta z), \quad a_{20} = \sqrt{\frac{2I_2}{n_2} \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2}}.$$

#### ЗАДАНИЕ 4

1. Вывести закон изменения интенсивности волны суммарной частоты  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  при распространении волн частотой  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в нелинейном кристалле при неизменных амплитудах  $A_1$  и  $A_2$ .

2. Слабое излучение частотой  $\omega_1$  и амплитудой  $A_1$  смешивается с накачкой частотой  $\omega_2$  с амплитудой  $A_2$ , причём  $A_2 \gg A_1$ . Вывести закон изменения интенсивности волн с частотой  $\omega_1$  и суммарной частотой  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  при распространении в нелинейном кристалле при выполнении условия синхронизма ( $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$ ).

3. Вывести уравнение связанных амплитуд при ГВГ.

$$\begin{aligned} \frac{dA_\omega}{dz} &= -i\sigma_\omega A_\omega^* A_{2\omega} \exp(-i\Delta kz), & \sigma_\omega &= \frac{d\omega}{cn_\omega}, \\ \frac{dA_{2\omega}}{dz} &= -i\sigma_{2\omega} A_\omega^2 \exp(i\Delta kz), & \sigma_{2\omega} &= \frac{d\omega}{cn_{2\omega}}, \\ \Delta k &= k_{2\omega} - 2k_\omega. \end{aligned}$$

## ТЕМА 5. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ. ФАЗОВЫЙ СИНХРОНИЗМ ВОЛН

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Инварианты уравнений ГВГ.

$$A_{\omega} = a_{\omega} \exp(i\varphi_{\omega}), \quad A_{2\omega} = a_{2\omega} \exp(i\varphi_{2\omega}),$$

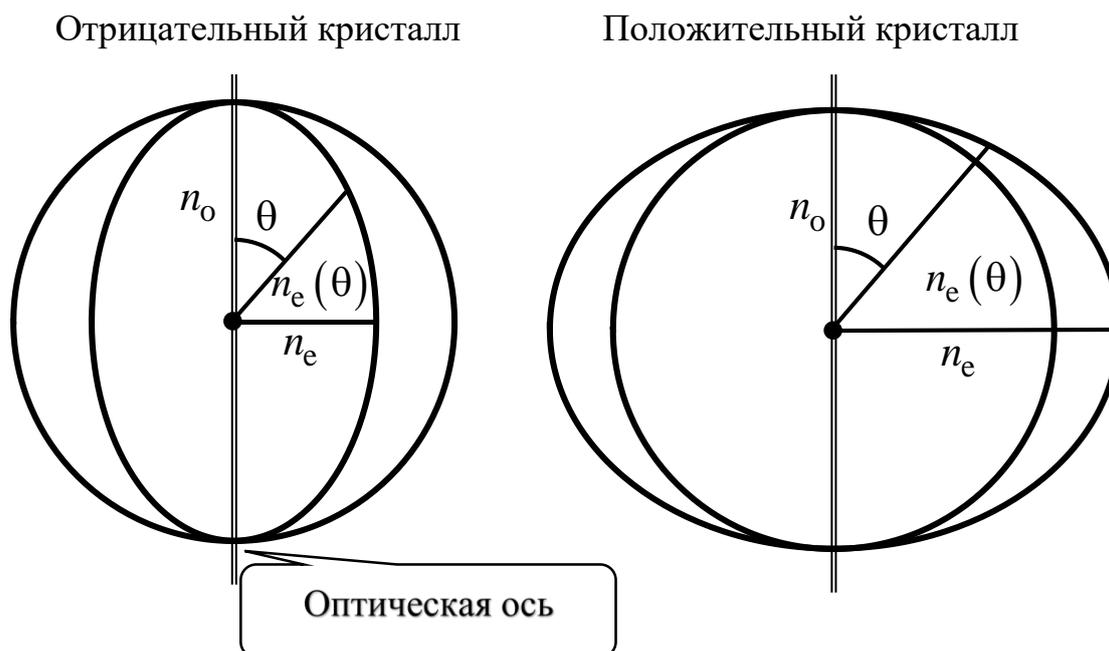
$$I = a_{\omega}^2 + a_{2\omega}^2 - \text{1-ый инвариант,}$$

$$\Gamma = a_{\omega}^2 a_{2\omega} \cos \Psi - \text{2-ой инвариант, } \Psi = 2\varphi_{\omega} - \varphi_{2\omega} + \Delta k$$

2. Решение уравнения связанных амплитуд для ГВГ.

3. Определение эффективной длины преобразования излучения  $\omega$  в  $2\omega$  в нелинейном кристалле.

4. Положительный и отрицательный одноосный кристалл.



5. Типы фазового синхронизма волн при ГВГ в положительном и отрицательном кристалле.

6. ГВГ в оптическом волокне.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** обыкновенная и необыкновенная волна, расстройка волновых векторов, синхронизм, угол синхронизма.

### Контрольные вопросы

1. От чего зависит эффективность преобразования первой гармоники излучения во вторую в нелинейном кристалле?
2. Какой физический смысл имеют инварианты системы уравнений ГВГ?
3. Какие виды скалярного синхронизма возможны в положительном кристалле?
4. Какие виды скалярного синхронизма возможны в отрицательном кристалле?
5. Что такое векторный синхронизм?
6. Что такое индикатриса показателя преломления?

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Найдите значения углов фазового синхронизма  $\theta$  в кристалле KDP при ГВГ для длины волны рубинового лазера  $\lambda = 694,3$  нм, где  $n_o^\omega = 1,506$ ;  $n_e^{2\omega} = 1,534$ ;  $n_e^\omega = 1,466$ ;  $n_o^{2\omega} = 1,487$ . Рассмотреть все возможные случаи.

*Решение.* Кристалл KDP является отрицательным, т.е.  $n_o > n_e$ . Поэтому возможно два типа синхронизма: оое и оее. На рис. показаны диаграммы  $n$  для этих видов синхронизмов.

а) **оое-синхронизм.** Этот вид синхронизма наблюдается, когда первая гармоника имеет о-поляризацию, а вторая – е-поляризацию. Условие синхронизма при ГВГ можно записать так:

$$\Delta k = k_{2\omega}^e - 2k_\omega^o = 0, \quad \frac{2\omega}{c} n_e^{2\omega}(\theta_1) - 2 \cdot \frac{\omega}{c} n_o^\omega = 0, \quad n_e^{2\omega}(\theta_1) = n_o^\omega. \quad (1)$$

Синхронизм такого типа может наблюдаться при выполнении условия:  $n_e^{2\omega} \leq n_o^\omega$ . Это условие выполняется. Зависимость показателя преломления необыкновенной волны (е-волны) от угла  $\theta$  между оптической осью и направлением распространения имеет вид:

$$\frac{[n_e^{2\omega}(\theta)\cos\theta]^2}{[n_o^{2\omega}]^2} + \frac{[n_e^{2\omega}(\theta)\sin\theta]^2}{[n_e^{2\omega}]^2} = 1, \quad (2)$$

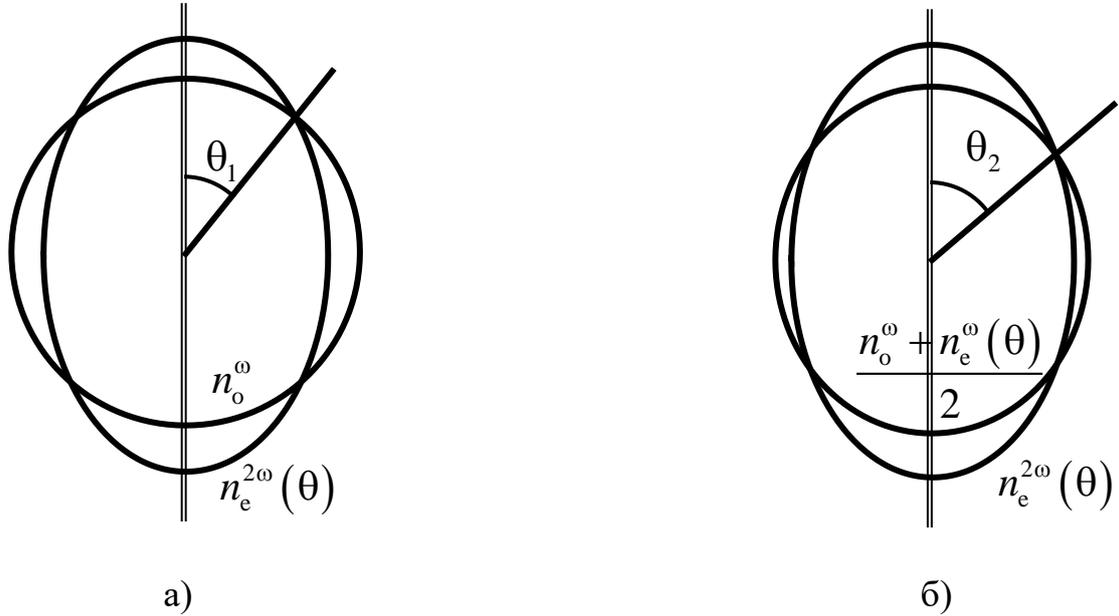


Рис. 1. Диаграмма оое- (а) и оое-синхронизма (б)

Диаграмма этой зависимости в полярных координатах представляет собою эллипс. Используя соотношение (1), получим выражение для угла синхронизма:

$$\frac{[n_o^\omega]^2}{[n_o^{2\omega}]^2} \cos^2 \theta_1 + \frac{[n_o^\omega]^2}{[n_e^{2\omega}]^2} \sin^2 \theta_1 = 1. \quad (3)$$

После преобразований получим формулу:

$$\cos \theta_1 = \frac{n_o^{2\omega}}{n_o^\omega} \sqrt{\frac{[n_o^\omega]^2 - [n_e^{2\omega}]^2}{[n_o^{2\omega}]^2 - [n_e^{2\omega}]^2}} = 0,6446 \quad \theta_1 = 49,9^\circ. \quad (4)$$

б) **оое-синхронизм.** Этот вид синхронизма наблюдается, когда первая гармоника имеет о- и е-поляризацию, а вторая – е-поляризацию. Условие синхронизма можно записать так:

$$\Delta k = k_{2\omega}^e - k_{\omega}^o - k_{\omega}^e = 0, \quad \frac{2\omega}{c} n_e^{2\omega}(\theta_2) - \frac{\omega}{c} n_o^{\omega} - \frac{\omega}{c} n_e^{\omega}(\theta_2) = 0,$$

$$2n_e^{2\omega}(\theta_2) = n_o^{\omega} + n_e^{\omega}(\theta_2). \quad (5)$$

Из выражения (5) следует, что синхронизм такого типа может наблюдаться при выполнении условия:  $2n_e^{2\omega} \leq n_o^{\omega} + n_e^{\omega}$ . Проверим выполнение этого условия.  $2 \cdot 1,487 = 2,974 \leq 1,506 + 1,466 = 2,972$ . Это условие не выполняется. Следовательно, в этом кристалле на заданной длине волны ое-синхронизм при ГВГ наблюдаться не может.

### ЗАДАНИЕ 5

1. Нарисовать  $k$ -диаграммы для определения углов синхронизма положительного и отрицательного одноосного кристаллов. Рассмотреть все возможные случаи.

2. Известны показатели преломления о- и е-волны для одноосного отрицательного кристалла  $\text{LiNbO}_3$  для излучения  $\lambda = 1064$  нм  $n_{o1} = 2,234$  и  $n_{e1} = 2,155$  и для его 2-ой гармоники  $n_{o2} = 2,325$  и  $n_{e2} = 2,233$ . Определить угол синхронизма при ГВГ. Рассмотреть все возможные виды синхронизма.

3. Оценить эффективную длину преобразования  $\omega$  в  $2\omega$  в нелинейном кристалле в условиях предыдущей задачи.

## ТЕМА 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТА

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Уравнения связанных волн при параметрической генерации света (ПГС).

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\sigma_1 A_2^* A_0 \exp(-i\Delta kz), \quad \sigma_1 = \frac{d\omega_1}{cn_1},$$
$$\frac{dA_2}{dz} = -i\sigma_2 A_1^* A_0 \exp(-i\Delta kz), \quad \sigma_2 = \frac{d\omega_2}{cn_2},$$

$$\Delta k = k_0 - k_1 - k_2 \quad \omega_0 = \omega_1 + \omega_2.$$

$A_0$  – амплитуда опорной волны (считаем, что  $A_0 = \text{const}$ ),

$A_1$  – амплитуда сигнальной волны,

$A_2$  – амплитуда холостой волны.

2. Параметрический генератор.



3. Способы перестройки частоты при ПГС.

- Изменение угла синхронизма
- Изменение температуры кристалла
- Приложение электрического поля
- Изменение частоты опорной волны

4. Требования к нелинейным кристаллам.

- Отсутствие центра симметрии кристаллической решётки
- Значительное двулучепреломление
- Высокое оптическое качество, стойкость поверхности и объёма к мощному лазерному излучению

- Негигроскопичность, твёрдость, устойчивость к резким перепадам температур
- Отсутствие нелинейного поглощения
- Слабое влияние конкурирующих процессов: люминесценции и ВКР
- Неподверженность к возникновению центров окраски под воздействием мощного лазерного излучения

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** опорная волна, сигнальная волна, холостая волна, субгармоника, параметрическая люминесценция.

### Контрольные вопросы

1. Что такое параметрическая генерация света?
2. Какие существуют способы перестройки частоты при параметрической генерации света? На чём основаны принципы перестройки частоты этими способами?
3. Какие требования предъявляются к нелинейным кристаллам для ГВГ и ПГС? На чём основаны эти требования?
4. Каким условиям необходимо удовлетворить, чтобы происходила эффективная параметрическая генерация света?
5. От чего зависят частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при ПГС?
6. Чем отличается параметрическая люминесценция от обычной?

### Пример решения задачи

**Задача 1.** Известны показатели преломления о- и е-волны для одноосного отрицательного кристалла прустита ( $\text{Ag}_3\text{AsS}_3$ ) для излучения  $\lambda = 1064$  нм  $n_{o1} = 2,697$  и  $n_{e1} = 2,503$  и для его 2-ой гармоники  $n_{o2} = 2,730$  и  $n_{e2} = 2,518$ . Определить зависимость и построить график зависимости угла синхронизма  $\theta$  от параметра  $\xi = \lambda_1/\lambda_2$  при ПГС, где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – длины волн излучений сигнальной и холостой соответственно. Накачка производится излучением второй гармоники  $\lambda_0 = 532$  нм. Рассмотреть случай ооо-синхронизма. Считать закон дисперсии линейным.

*Решение.* Задано  $\xi = \lambda_1/\lambda_2 = \omega_2/\omega_1$ , которое находится в пределах от 0 до 1. Если  $\xi = 1$ , то это соответствует процессу обратному ГВГ. При ПГС должны выполняться условия:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{и} \quad k_0 = k_1 + k_2, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $k_0$  – циклическая частота и волновое число излучения накачки. Из второго выражения в (1) следует:

$$\omega_0 n^e(\omega_0, \theta) = \omega_1 n^o(\omega_1) + \omega_2 n^e(\omega_2, \theta), \quad (2)$$

где  $n^o(\omega)$ ,  $n^e(\omega, \theta)$  – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волны частотой  $\omega$ , распространяющейся в кристалле под углом  $\theta$  по отношению к оптической оси. Из выражений (1) получим:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 + \xi}, \quad \omega_2 = \xi \frac{\omega_0}{1 + \xi}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), получим:

$$(1 + \xi) n^e(\omega_0, \theta) = n^o(\omega_1) + \xi n^e(\omega_2, \theta) \quad (4)$$

Найдём показатели преломления с учётом его линейной зависимости от частоты:

$$n^o(\omega_1) = n_{o2} - 2(n_{o2} - n_{o1}) \frac{\xi}{1 + \xi}, \quad (5)$$

$$n^o(\omega_2) = n_{o2} - 2(n_{o2} - n_{o1}) \frac{1}{1 + \xi}, \quad (6)$$

$$n^e(\omega_2) = n_{e2} - 2(n_{e2} - n_{e1}) \frac{1}{1 + \xi}, \quad (7)$$

где  $n^e(\omega_2)$  – показатель преломления необыкновенной волны частотой  $\omega_2$ , распространяющейся под углом  $90^\circ$  по отношению к оптической оси. Найдём показатель преломления необыкновенной волны, распространяющейся под углом  $\theta$  к оптической оси:

$$\frac{[n^e(\omega_0, \theta)]^2 \cos^2 \theta}{[n^o(\omega_0)]^2} + \frac{[n^e(\omega_0, \theta)]^2 \sin^2 \theta}{[n^e(\omega_0)]^2} = 1. \quad (8)$$

Отсюда получим:

$$n^e(\omega_i, \theta) = \frac{n^o(\omega_i) n^e(\omega_i)}{\sqrt{[n^o(\omega_i)]^2 - \left( [n^o(\omega_i)]^2 - [n^e(\omega_i)]^2 \right) \cos^2 \theta}},$$

где  $i = 0, 2$ . (9)

Выражение (9) подставим в (4), и получим уравнение относительно  $\theta$ . Решим его. Для этого введём обозначения:

$$u = \sqrt{A - \cos^2 \theta}, \quad A = \frac{n_{o1}^2}{n_{o1}^2 - n_{e1}^2},$$

$$v = \sqrt{B - \cos^2 \theta}, \quad B = \frac{[n^o(\omega_2)]^2}{[n^o(\omega_2)]^2 - [n^e(\omega_2)]^2},$$

$$C = \frac{(1 + \xi) n_{o1} n_{e1}}{n^o(\omega_1) \sqrt{n_{o1}^2 - n_{e1}^2}},$$

$$D = \frac{\xi n^o(\omega_2) n^e(\omega_2)}{n^o(\omega_1) \sqrt{[n^o(\omega_2)]^2 - [n^e(\omega_2)]^2}}. \quad (10)$$

С учётом этих обозначений, получим уравнение (4) в виде:

$$\frac{C}{u} = 1 + \frac{D}{v}. \quad (11)$$

Кроме того, из соотношения между  $u$  и  $v$  (10) получим ещё одно уравнение:

$$v^2 = u^2 + E, \quad E = B - A. \quad (12)$$

Преобразуем системы уравнений (11) и (12), и получим уравнение относительно  $u$  4-ой степени:

$$u^4 - 2Cu^3 + (C^2 - D^2 + E^2)u^2 - 2CEu + C^2E = 0. \quad (13)$$

Найти корни этого уравнения можно, например, используя средства Matlab или языка программирования Python. Необходимо выделить только действительные неотрицательные корни, которые дают решение  $\theta = \arccos\left(\sqrt{A - u^2}\right)$  в диапазоне от 0 до 90°. График  $\theta(\xi)$  приведён ниже.

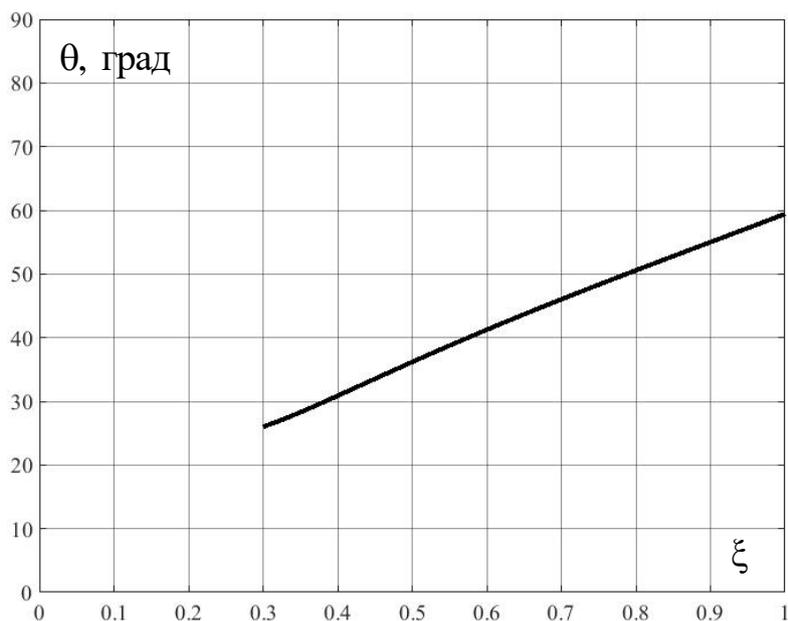


Рис. 2. Зависимость угла синхронизма от параметра  $\xi$  для кристалла прустита

## ЗАДАНИЕ 6

1. Вывести систему уравнений связанных амплитуд для ПГС и показать её общее решение при условии неизменной накачки.

2. Известны показатели преломления о- и е-волны для одноосного отрицательного кристалла  $\text{LiIO}_3$  для излучения  $\lambda = 1064$  нм  $n_{o1} = 1,857$  и  $n_{e1} = 1,717$  и для его 2-ой гармоники  $n_{o2} = 1,898$  и  $n_{e2} = 1,748$ . Определить зависимость и построить график зависимости угла синхронизма  $\theta$  от параметра  $\xi = \lambda_1/\lambda_2$  при ПГС в диапазоне прозрачности 0,3 – 6,0 мкм, где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – длины волн излучений сигнальной и холостой соответственно. Накачка производится излучением  $\lambda_0 = 532$  нм. Рассмотреть случай оо-синхронизма. Считать закон дисперсии линейным.

## ТЕМА 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ 3-ГО ПОРЯДКА

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Физические механизмы возникновения оптических эффектов, связанных с нелинейной диэлектрической восприимчивостью 3-го порядка.

- Электронная поляризация
- Ориентация молекул
- Электрострикция
- Перераспределение населённости уровней

2. Классификация эффектов 3-го порядка:

- Самофокусировка
- Поворот эллипса поляризации
- Оптическая бистабильность
- Самомодуляция
- Генерация 3-ей гармоники (ГТГ)

3. Оптические солитоны.

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** самофокусировка, дефокусировка света, оптическая бистабильность, самомодуляция, оптический путь луча, уширение спектра оптического импульса в нелинейной среде.

### Контрольные вопросы

1. В каких явлениях проявляются нелинейные эффекты 3-го порядка?
2. Объяснить основные физические процессы, вызывающие нелинейные эффекты 3-го порядка.
3. При каком условии наблюдается мелкомасштабная и крупномасштабная самофокусировка?
4. Оптический импульс распространяется в кубически-нелинейной среде. Как среда влияет на него?

### Пример решения задачи

**Задача.** Излучение гелий-неонового лазера является гауссовым пучком с длиной волны  $\lambda = 633$  нм. Оно проходит в плавленый кварц. Определить критическую мощность самофокусировки. Показатель преломления плавленного кварца определяется по формуле:  $n = n_0 + n_2 I$ , где  $n_0 = 1,47$ ,  $n_2 = 3,2 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт.

**Решение.** Дифракционная расходимость гауссова пучка определяется по формуле [13, с. 171]  $\theta = \frac{\lambda}{2\pi w_0 n_0}$ , где  $w_0$  – радиус пучка, определяемый по критерию  $HWe^{-1}M$ . Распределение интенсивности излучения в поперечном сечении такого пучка  $I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$ . Самофокусировка пучка будет происходить, если угол расходимости пучка  $\theta$  станет равным и меньше угла скольжения  $\alpha$  при полном внутреннем отражении:  $\cos \alpha = \frac{n_0}{n_0 + n_2 I_0}$ . В предельном случае эти углы равны ( $\theta = \alpha$ ). Учитывая, что угол  $\alpha \ll 1$  рад, можно воспользоваться разложением:  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$ . Проведём преобразования:

$$1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \approx \frac{n_0}{n_0 + n_2 I_0} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \approx 1 + \frac{n_2}{n_0} I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{n_0}{2n_2} \theta^2 \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{n_0}{2n_2} \left( \frac{\lambda}{2\pi w_0 n_0} \right)^2 \Rightarrow P_{\text{кр}} = I_0 \cdot \pi w_0^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi n_0 n_2} \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ Вт.}$$

### ЗАДАНИЕ 7

1. Определить оптическую длину пути интенсивной плоской световой волны в оптоволоконном световоде длиной  $l = 1$  м из KDP, с постоянным для заданной длины волны коэффициентом поглощения  $\mu = 0,05$  см<sup>-1</sup>, линейным показателем преломления  $n_0 = 1,49$  и нелинейным показателем преломления

$n_2 = 3,5 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт. Начальная интенсивность

1.1.  $I_0 = 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>

1.2.  $I_0 = 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>.

2. Гауссов импульс длительностью  $\tau = 20$  пс (FWe<sup>-1</sup>M) однородной интенсивности по радиусу распространяется в стержне из неодимового стекла.  $n_0 = 1,53$ ;  $n_2 = 3,3 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт.

- 3.1. Определить ширину спектра импульса  $\Delta\omega$  по критерию FWe<sup>-1</sup>M. Найти  $\Delta\omega/\omega$ , если  $\lambda = 1064$  нм.
- 3.2. Определить дополнительное спектральное уширение импульса  $\delta\omega_{\max}$  при максимальной интенсивности  $I_0 = 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>.
- 3.3. Определить критическую мощность излучения  $P_{\text{кр}}$ , при которой начинается самофокусировка.

## ТЕМА 8. ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

### ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Методы получения обращённой волны.
2. Статическая и динамическая голография.
3. Четырёхволновое смешение в кубически нелинейной среде.
4. Обращение волнового фронта (ОВФ) при вынужденном рассеянии.
5. Применение ОВФ.

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

**Основные понятия:** обращённая волна, голограмма, кубически нелинейная среда, вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР), вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна (ВРМБ), фононы.

### Контрольные вопросы

1. Что такое обращённая волна?
2. В чём заключается явление обращение волнового фронта?
3. Какие существуют способы записи и считывания голограмм?
4. Что такое динамическая голограмма?
5. Нарисовать диаграмму сложения волновых векторов при четырёхволновом смешении.
6. Каков физический механизм обращения волнового фронта при вынужденном рассеянии?

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ГВГ – генерация второй гармоники

ГСЧ – генерация суммарной частоты

ГРЧ – генерация разностной частоты

ПГС – параметрическая генерация света

ГТГ – генерация третьей гармоники

ВКР – вынужденное комбинационное рассеяние

ВРМБ – вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

ОВФ – обращение волнового фронта

ЧВС – четырёхволновое смешение

НWHM – полуширина линии по половине интенсивности в максимуме (half-width at half of maximum intensity)

FWHM – полная (full) ширина линии по половине интенсивности в максимуме

НWe<sup>-1</sup>M (НWe<sup>-2</sup>M) – полуширина по уровню e<sup>-1</sup> (e<sup>-2</sup>) от интенсивности в максимуме

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борис Яковлевич Зельдович. Памяти коллеги / А.Г. Воронцов и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика», 2019. Т. 11, № 1. – С. 75-78
2. Зельдович, Б.Я. Обращение волнового фронта / Б.Я. Зельдович, Н.Ф. Пилипецкий, В.В. Шкунов. – М.: Наука, 1985. – 247 с.
3. Бломберген, Н. Нелинейная оптика / Н. Бломберген. – М.: Мир, 1966. – 424 с.
4. Шен, И.Р. Принципы нелинейной оптики / И.Р. Шен. – М.: Мир, 1989. – 560 с.
5. Шуберт, М. Введение в нелинейную оптику / М. Шуберт, Б. Вильгельми. – Ч. 1. – М.: Мир, 1973. – 245 с.; Ч. 2. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
6. Цернике, Ф. Прикладная нелинейная оптика / Ф. Цернике, Д. Мидвинтер. – М.: Мир, 1976. – 262 с.
7. Клышко, Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика / Д.Н. Клышко. – М.: Наука, 1980. – 265 с.
8. Агравал, Г. Нелинейная волоконная оптика / Г. Агравал. – М.: Мир, 1996. – 323 с.
9. Дмитриев, В.Г. Нелинейная оптика и обращение волнового фронта: монография / В.Г. Дмитриев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 256 с.
10. Делоне, Н.Б. Нелинейная оптика / Н.Б. Делоне. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 64 с.
11. Беспрозванных, В.Г. Нелинейная оптика. Учебное пособие / В.Г. Беспрозванных, В.П. Первадчук. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2011. – 200 с.
12. Розанов, Н.Н. Нелинейная оптика: учебное пособие / Н.Н. Розанов. – СПб: НИУ ИТМО, 2008. – 95 с.
13. Сизмин, Д.В. Нелинейная оптика. Учебно-методическое пособие / Д.В. Сизмин. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. – 147 с.
14. Ландсберг, Г.С. Оптика. Учебное пособие для вузов / Г.С. Ландсберг. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.