Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра оптоинформатики

531(07)
Ш957

А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви, Е.Л. Шахин

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие по решению задач для студентов
технических специальностей

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2022

УДК 531(076.5)+536(076.5)
Ш957

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук

Рецензенты:
д.ф.-м.н. А.Е. Майер, к.т.н. М.Г. Иванов

Шульгинов, А.А.
Ш957 Механика и термодинамика: учебное пособие по решению задач для студентов технических специальностей / А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви, Е.Л. Шахин; – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. – 54 с.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей ЮУрГУ направлений подготовки: 08.00.00, 13.00.00, 15.00.00, 17.00.00, 19.00.00, 20.00.00, 21.00.00, 23.00.00, 24.00.00. Оно содержит 8 тем для проведения практических занятий. Для каждой темы имеется список основных понятий, которые студент должен усвоить перед выполнением задания и список вопросов по ней, а также примеры решения задач и задачи для решения на практических занятиях.

УДК 531(076.5)+536(076.5)

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Практика показывает, что студент терпит неудачу в решении задач по физике чаще всего из-за неглубоких, формальных знаний теории. Поэтому, прежде чем приступить к решению, тщательно проработайте соответствующий теоретический материал [1–3].

2. Внимательно прочитайте условие задачи. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий ее сущность. На рисунке необходимо показать все векторные величины, используемые в задаче. Это во многих случаях существенно облегчает как поиск решения, так и само решение.

3. Задачи следует решать в общем виде. Для этого нужно обозначить все величины соответствующими буквами, и с помощью физических законов установить математическую связь между исходными данными и искомой величиной. При этом все математические преобразования необходимо сопровождать подробным объяснением. В результате получается одно или несколько уравнений, и физическая задача сводится к математической.

4. Получив для искомой величины решение в общем виде, нужно проверить её единицы измерения в системе СИ. Неверные единицы измерения есть явный признак ошибочности решения.

5. Убедившись, что общее решение верно, подставляют в него числовые значения величин в СИ. Если исходные или конечные величины значительно больше или значительно меньше единицы, то числа пишут в стандартном виде (например, вместо 0,000086 м писать $8{,}6\cdot10^{-5}$ м, вместо 21000 Н – число $2{,}1\cdot10^{4}$ Н или 21 кН и т.д.).

6. Так как числовые значения физических величин всегда бывают приближенными, то при расчетах необходимо округлять результат. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого превышает погрешность этой величины. Все остальные значащие цифры надо отбросить. Обычно при решении физических задач в окончательном ответе, считается достаточным оставлять три значащие цифры и обязательно указать единицы измерения результирующей величины.

7. Получив числовой ответ, нужно оценить его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

ТЕМА 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

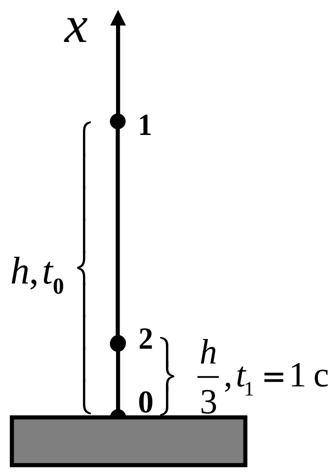
Основные понятия: система отсчёта, траектория, путь, перемещение, радиус-вектор материальной точки, скорость, путевая скорость, ускорение материальной точки, тангенциальное и нормальное ускорение, центр кривизны и радиус кривизны траектории.

Контрольные вопросы

1. Что включает в себя понятие система отсчёта?
2. Что такое траектория движения, путь и перемещение материальной точки?
3. Каким соотношением связаны радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки?
4. Какой физический смысл имеет тангенциальное и нормальное ускорение? Как они связаны с полным ускорением?
5. Как определить путевую скорость материальной точки, если известна её мгновенная скорость?
6. Что такое радиус кривизны траектории и как он связан с нормальным ускорением тела?
7. Как определить тангенциальное ускорение, если известен закон изменения путевой скорости тела?

Примеры решения задач

Задача 1. Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло 1/3 своего пути. Найти время падения и высоту, с которой упало тело. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Введём систему отсчёта для описания движения тела. Пусть точка отсчёта совпадает с поверхностью земли, а ось ОХ направлена вертикально вверх. Отсчёт времени начинается с момента начала движения тела. Оно будет двигаться вниз только под действием силы тяжести. Поэтому, ускорение тела будет постоянным и равным ускорению свободного падения g = 9,8 м/с^2. За h и t_0 обозначим высоту, с которой упало тело, и время падения соответственно. Для решения задачи воспользуемся формулой зависимости координаты тела $x(t)$ при равнопеременном движении:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.1)$$

В условиях задачи начальная скорость $V_{0x} = 0$. В выбранной системе отсчёта начальная координата тела $x_0 = h$, а проекция ускорения на ось ОХ $a_x = -g$.

С учётом этих условий запишем уравнение движения (1.1):

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.2}$$

В момент касания о землю при $t = t_0$, координата $x(t_0) = 0$. Отсюда

$$h = \frac{gt_0^2}{2}. \tag{1.3}$$

Аналогично запишем для точки **2**, которая находится на расстоянии 1/3 пути до поверхности $x(t_2) = h/3$:

$$\frac{2h}{3} = \frac{gt_2^2}{2}, \tag{1.4}$$

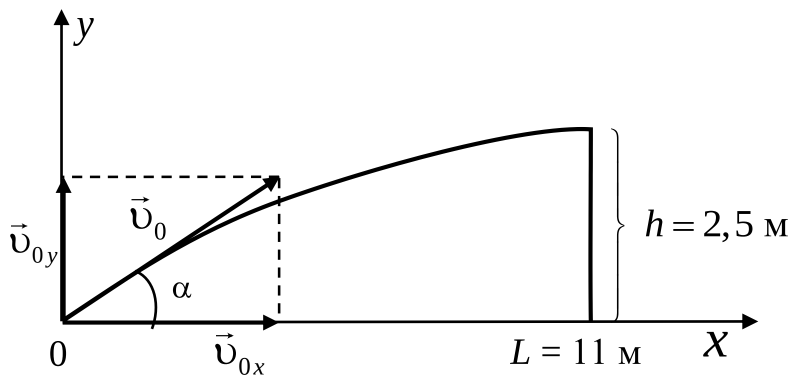
где t_2 – время, за которое тело проходит путь от точки **1** до точки **2**. По условию задачи: $t_0 - t_2 = t_1 = 1$ с. Подставим формулу (1.3) в (1.4) и, с учетом выражения для t_2, получим:

$$t_0^2 - 6t_0 + 3 = 0 \tag{1.5}$$

Решая это уравнение, найдем, что $t_0 = 5{,}45$ с, а высоту падения получим из (1.3): $h = 146$ м.

Ответ: Время падения 5,45 с. Высота, с которой упало тело, равна 146 м.

Задача 2. Футболист забивает гол с 11-метрового штрафного удара (L) точно под перекладину. Какую минимальную скорость в этом случае необходимо сообщить мячу? Под каким углом α должен был вылететь мяч? Высота ворот $h = 2{,}5$ м.



Решение. Введем систему отсчета согласно рисунку. В начальный момент времени мяч начинает двигаться под углом α к горизонту. Очевидно, что минимальная скорость, которую необходимо сообщить мячу, чтобы забить гол точно под перекладину соответствует случаю, когда мяч на расстоянии L от места удара находится в наивысшей точке полета ($h = 2{,}5$ м).

Единственная сила, действующая на мяч во время полёта это сила тяжести, направленная вертикально вниз. Поэтому движение мяча по горизонтали вдоль оси OX будет равномерным, а по вертикали вдоль оси OY – равнопеременным. Опишем движение тела в выбранной системе отсчёта:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t\,; \qquad y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,. \tag{2.1}$$

Учтём начальные координаты мяча $x_0 = y_0 = 0$, проекции начальной скорости $V_{0x} = V_0\cos\alpha$, $V_{0y} = V_0\sin\alpha$, проекцию ускорения $a_y = -g$.

Проекция скорости на ось OY равномерно изменяется во времени:

$$V_y(t) = V_{0y} + a_y t\,. \tag{2.2}$$

Время полёта мяча до перекладины обозначим t_0. Для момента попадания мяча в перекладину запишем уравнения движения (2.1) и (2.2):

$$x(t_0) = V_0 t_0 \cos\alpha = L\,, \tag{2.3}$$

$$y(t_0) = V_0 t_0 \sin\alpha - \frac{g t_0^2}{2} = h\,, \tag{2.4}$$

$$V_y(t_0) = V_0 \sin\alpha - g t_0 = 0\,. \tag{2.5}$$

В системе уравнений (2.3), (2.4) и (2.5) 3 неизвестные – t_0, V_0, α. Решая эту систему, получаем:

1) время полёта мяча $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 2{,}5/9{,}8} \approx 0{,}71\ \text{с}$,

2) начальную скорость $V_0 = \sqrt{(L/t_0)^2 + (g t_0)^2} \approx 17\ \text{м/с}$,

3) угол вылета $\alpha = \operatorname{arctg}(2h/L) \approx 24{,}4°$. Это выражение показывает, чтобы попасть мячом точно под перекладину надо целиться в точку, находящуюся на высоте вдвое выше высоты ворот.

Ответ: $V = 17\ \text{м/с}$, $\alpha = 24{,}4°$.

Задача 3. Автомобиль движется по закруглённому шоссе, имеющему радиус кривизны R = 250 м. Начальная скорость V_0 = 40 км/ч. За Δt = 5 с скорость автомобиля равномерно увеличивалась до V_1 = 100 км/ч. Найти ускорение автомобиля в момент времени t = 2 с от начала отсчёта времени.

Решение. Чтобы найти ускорение автомобиля необходимо найти нормальное и тангенциальное ускорение. Учитывая, что путевая скорость автомобиля равномерно увеличивалась, тангенциальное ускорение было постоянным в течение 5 с движения. Найдём его по формуле:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_1 - V_0}{\Delta t}. \tag{3.1}$$

Предварительно скорости надо перевести в м/с:

V_0 = 40/3,6 = 11,1 м/с, V_1 = 100/3,6 = 27,8 м/с. Тогда a_τ = 3,33 м/с^2.

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{R}, \tag{3.2}$$

где V – путевая скорость автомобиля в момент времени t. Найдём её по формуле:

$$V = V_0 + a_\tau t = 17{,}8 \text{ м/с}. \tag{3.3}$$

Тогда a_n = 1,26 м/с^2. Полное ускорение :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3{,}56 \text{ м/с}^2. \tag{3.4}$$

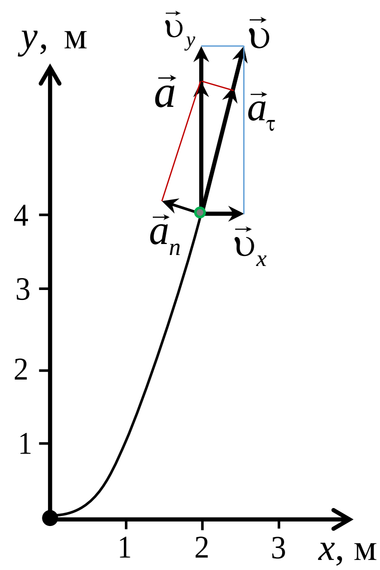
Ответ: $a = 3{,}56$ м/с^2.

Задача 4. Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + 4t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, м. Определить:

а) уравнение траектории частицы в явном виде;

б) скорость и ускорение частицы в момент времени t_0 = 2 с;

в) тангенциальное и нормальное ускорение частицы в этот же момент времени, а также радиус кривизны траектории R.



Решение. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные вектора, направленные вдоль осей x, y, z, соответственно. Запишем проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси x, y, z.

$$x = 2t; \quad y = 4t^2; \quad z = 1.$$

Исключая время, получим уравнение траектории. Траектория представляет собой параболу в плоскости $z = 1$ м :

$$y = x^2 \tag{4.1}$$

Для нахождения скорости возьмем первую производную от радиус-вектора по времени

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}+8t\vec{j},\ \text{м/с} \tag{4.2}$$

$$\vec{V}(t=t_0)=2\vec{i}+16\vec{j},\ \text{м/с} \tag{4.3}$$

$$\left|\vec{V}\right|=V=\sqrt{2^2+16^2}\approx 16{,}1\,\text{м/с} \tag{4.4}$$

Для определения ускорения возьмём первую производную от скорости по времени

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=8\vec{j},\ \text{м/с}^2 \tag{4.5}$$

$$\left|\vec{a}\right|=a=8\ \text{м/с}^2 \tag{4.6}$$

Найдем тангенциальное ускорение частицы. Для этого надо спроецировать ускорение $\vec{a}$ на направление скорости. Единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль скорости определяется следующим образом:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \tag{4.7}$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление скорости можно определить, используя скалярное произведение:

$$a_\tau=\left(\vec{a},\vec{\tau}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{V}\right)}{V}=\frac{8\vec{j}\cdot\left(2\vec{i}+16\vec{j}\right)}{16{,}1}=7{,}95\ \text{м/с}^2. \tag{4.8}$$

Здесь учтено, что $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=0$ и $\left(\vec{j},\vec{j}\right)=1$.

Определим нормальное ускорение частицы по формуле:

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{8^2-7{,}95^2}\approx 0{,}89\ \text{м/с}^2. \tag{4.9}$$

Через нормальное ускорение определим радиус кривизны траектории

$$R=\frac{V^2}{a_n}\approx 291{,}2\ \text{м}. \tag{4.10}$$

Ответ: Уравнение траектории $y=x^2$ (парабола). $V=16{,}1$ м/с, $a=8$ м/с^2, $a_\tau=7{,}95$ м/с^2, $a_n=0{,}89$ м/с^2. Радиус кривизны траектории $R=291{,}2$ м.

Задача 5. Миномёт выпустил мину с начальной скоростью V_0 = 200 м/с. Мина упала на расстоянии s = 3500 м. Определить:

1) угол установки миномёта α (не забывая, что миномёт метает мины под углом **больше 45°** к горизонту);

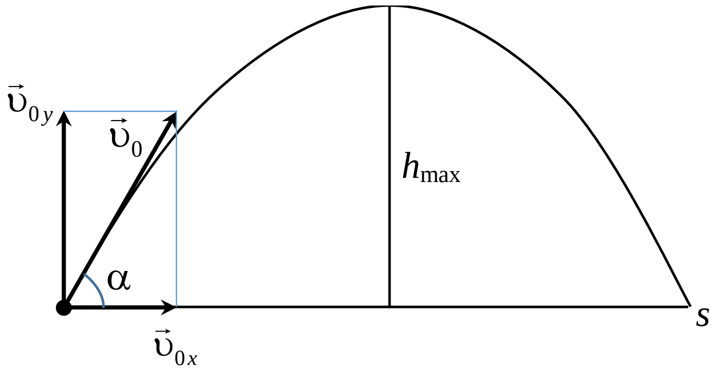
2) время полёта мины t_0;

3) максимальную высоту полёта мины h_{max};

4) для момента времени, t_1 = 10 с найти нормальное и тангенциальное ускорения мины и радиус кривизны траектории в этой точке.

Решение. Движение тела можно представить как сумму равномерного движения по горизонтали и равноускоренного движения по вертикали. То есть записать в виде системы уравнений.

$$\begin{cases} x = \upsilon_{0x} t \\ y = \upsilon_{0y} t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (5.1)$$



Сами υ_{0x} и υ_{0y} можно связать с начальной скоростью через угол установки ствола миномёта.

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha, \qquad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha \qquad (5.2)$$

Подставив в качестве времени $t = t_0$ время полёта, получим координату $x = s$ и координату $y = 0$

$$\begin{cases} s = \upsilon_0 t_0 \cos\alpha \\ 0 = \upsilon_0 t_0 \sin\alpha - \dfrac{g t_0^2}{2} \end{cases} \qquad (5.3)$$

Выразим из первого уравнения t_0 и подставим во второе.

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{s}{\upsilon_0 \cos\alpha} \\ 0 = \dfrac{\upsilon_0 s \sin\alpha}{\upsilon_0 \cos\alpha} - \dfrac{g s^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \end{cases} \qquad (5.4)$$

Сократим υ_0 в первом слагаемом правой части, разделим обе части уравнения на s и, помножив обе части уравнения на $2\cos^2\alpha$, получим:

$$0 = 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{gs}{\upsilon_0^2} \qquad (5.5)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой формулу синуса двойного угла. Выражаем его

$$\sin 2\alpha = \frac{gs}{\upsilon_0^2} = 0{,}8575 \tag{5.6}$$

Этому синусу соответствуют углы $2\alpha_1$ = 59,04° и $2\alpha_2$ = 120,96°. Сами углы α_1 = 29,52° и α_2 = 60,48°. Первый не подходит по условию задачи. Время полёта найдём, подставив известный угол в первое уравнение (5.4): t_0 = 35,51 с.

Максимальная высота полёта мины будет в момент, равный половине времени полёта (на подъём и спуск у мины уйдёт одинаковое время). Вычисляем, подстановкой известного угла и времени в нижнее уравнение (5.3): h_{max} = 1545,3 м.

Для вычисления нормального и тангенциального ускорений найдём скорость в момент времени t_1. Горизонтальная составляющая скорости не меняется, а вертикальная – меняется под действием ускорения свободного падения:

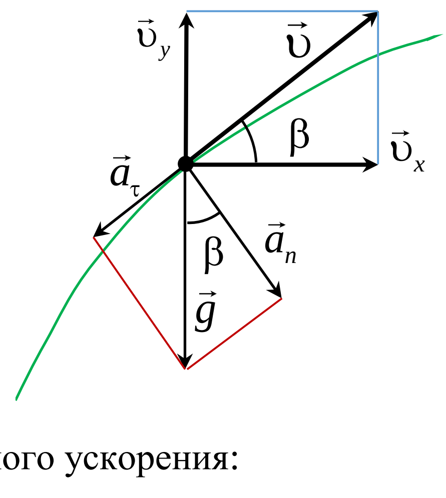
$$\begin{aligned} \upsilon_{1x} &= \upsilon_0 \cos\alpha \\ \upsilon_{1y} &= \upsilon_0 \sin\alpha - gt \end{aligned} \tag{5.7}$$

Полную скорость найдём по теореме Пифагора из своих проекций,

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2} = 125{,}12 \text{ м/с}, \tag{5.8}$$

а угол, под которым эта скорость направлена к горизонту:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_{1x}}\right) = 36{,}95° \tag{5.9}$$



Соответствующие проекции ускорения a_n и a_τ находим как проекции на соответствующие оси ускорения свободного падения:

$$\begin{aligned} a_\tau &= -g \sin\beta \\ a_n &= g\cos\beta \end{aligned} \tag{5.10}$$

И наконец, радиус кривизны траектории находим из уравнения Ньютона для центростремительного ускорения:

$$R = \frac{\upsilon_1^2}{a_n} = \frac{125{,}12^2}{7{,}83} = 1998{,}91 \text{ м}. \tag{5.11}$$

Ответ. Прицел 60,48°; время полёта мины t_0 = 35,51 с.; максимальная высота полёта h_{max} = 1545,3 м; ускорения a_n = 7,83 м/с^2 и a_τ = –5,89 м/с^2. Радиус кривизны R = 1999 м.

Задачи

1.1. Свободно падающее тело прошло последние 30 м за 0,5 с. Найти высоту падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.2. Из орудия произведён выстрел под углом φ_0 к горизонту со скоростью $V_0 = 400$ м/с. Снаряд упал на расстоянии $x_c = 16$ км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить:

а) угол φ_0, под которым был произведён выстрел;

б) длительность полёта снаряда t_0;

в) максимальную высоту полёта h;

г) нормальное и тангенциальное ускорение, а также радиус кривизны траектории в наивысшей точке траектории;

д) нормальное и тангенциальное ускорение, а также радиус кривизны траектории в момент касания снаряда о землю.

1.3. Под углом $\alpha = 60°$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с. Через какое время оно будет двигаться под углом $\beta = 45°$ к горизонту? Определить тангенциальное и нормальное ускорение тела в этот момент времени. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.4. Радиус-вектор частицы изменяется по закону
$\vec{r} = 0,2\sin 2t \cdot \vec{i} + 0,2\cos 2t \cdot \vec{j} + 0,1t^2 \cdot \vec{k},$ м. Определить для момента времени $t_0 = 1$ с:

а) путевую скорость частицы;

б) модуль ускорения частицы;

в) тангенциальное ускорение;

г) нормальное ускорение;

д) радиус кривизны траектории.

1.5. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $r = 3$ м задаётся уравнением $s(t) = 0,4 \cdot t^2 + 0,1 \cdot t$. Определить для момента времени $t_0 = 2$ с полное, тангенциальное и нормальное ускорение тела.

1.6. Два пловца должны попасть из точки А на одном берегу реки в прямо противоположную точку В на другом берегу. Для этого один пловец решил переплыть реку по прямой АВ, другой – все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесёт, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки В за одинаковое время, если скорость течения $V_0 = 2,0$ км/ч, и скорость каждого пловца относительно воды $V = 2,5$ км/ч?

1.7 Два автомобиля движутся по дорогам, которые пересекаются под углом $\alpha = 60°$. Скорость первого автомобиля $v_1 = 60$ км/ч, скорость второго $v_2 = 80$ км/ч. Определить скорость, с которой автомобили удаляются друг от друга. Перекрёсток машины прошли одновременно

ТЕМА 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

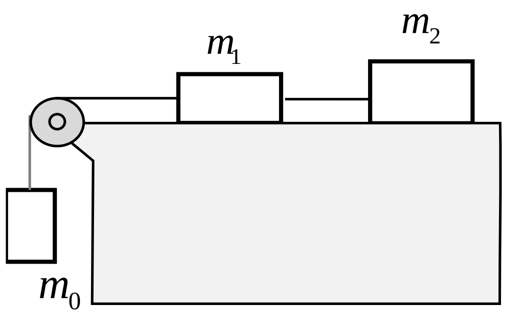
Основные понятия: инерциальная система отсчёта, масса тела, импульс тела, сила, поступательное движение твёрдого тела, центр масс.

Контрольные вопросы

1. Какая система отсчёта называется инерциальной?
2. Как формулируется основная задача динамики?
3. Что такое масса тела и от чего она зависит?
4. Дать определение силы.
5. Сформулировать 3 закона Ньютона и закон всемирного тяготения.
6. Какова граница применимости законов Ньютона?
7. Какие силы относятся к категории фундаментальных?

Примеры решения задач

Задача 1. В установке на рисунке массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение a, с которым опускается тело m_0, и натяжение нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен μ. Исследовать возможные случаи.

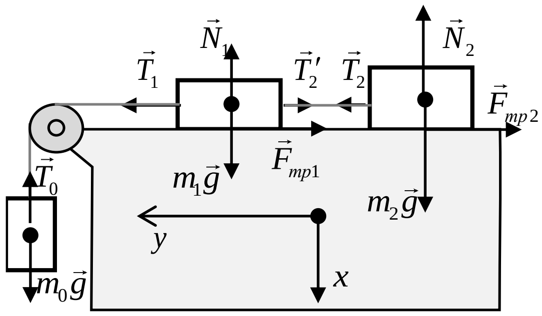


Решение. Для решения задачи расставим все силы, действующие на тела, в данной задачи (см. рисунок). $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, $\vec{N}$ - сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения. Индексы **0**, **1**, **2** обозначают тело, на которое действует сила. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела.

Для тела **0**: $m_0\vec{a}_0 = m_0\vec{g} + \vec{T}_0$.

Для тела **1**: $m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2' + \vec{F}_{тр1} + \vec{N}_1$.

Для тела **2**: $m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр2} + \vec{N}_2$.



Запишем эту уравнений с учётом выбранного направления осей координат, согласно рисунку. Движения тела с массой m_0 будет происходит в направлении оси y, а движение тел **1** и **2** вдоль оси x. Вся система движется с ускорением $|\vec{a}|$, причём $|\vec{T}_0| = |\vec{T}_1|$, $|\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2|$. Тогда

$$m_0 a = m_0 g - T_1,\ m_1 a = T_1 - T_2 - F_{тр1},\ m_2 a = T_2 - F_{тр2}.$$

Сложим между собой эти три уравнения. Тогда получим искомое выражение для ускорения:

$$a = g\,\frac{m_0 - \mu\left(m_1 + m_2\right)}{m_0 + m_1 + m_2}. \qquad (1.1)$$

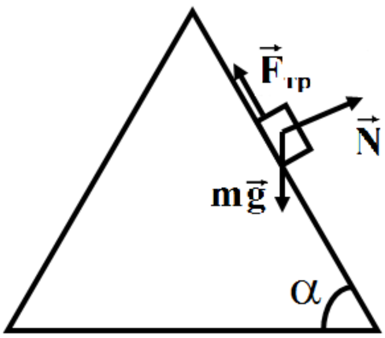
Подставив выражение для ускорения в исходную систему уравнений, находим T_2:

$$T_2 = \frac{(1+\mu)\,m_0}{m_0 + m_1 + m_2}\,m_2 g\,. \qquad (1.2)$$

Ответ: Ускорение, с которым движется тело **0**, определяется по формуле (1.1). Сила натяжения нити, связывающей тела m_1 и m_2, определяется по формуле (1.2). Из выражения для ускорения видно, что если $m_0 = \mu\left(m_1 + m_2\right)$, то ускорение будет равно 0. Если $m_0 < \mu\left(m_1 + m_2\right)$, то вес тела **0** будет недостаточным, чтобы вызвать скольжение тел **1** и **2**, тогда система будет находиться в покое.

Задача 2. Определить приближённое значение коэффициента трения песка о песок, если угол наклона горки, образовавшейся при осыпании песка, равен α.

Решение. Рассмотрим элементарный объём (песчинку) и силы, действующие на него.

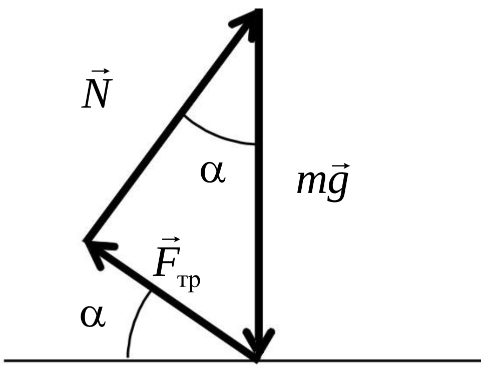


Выберем систему отсчёта, связанную с горкой. По условию задачи угол наклона горки при осыпании песка равен α. Это угол, при котором песчинка, находящаяся на поверхности горки ещё не скатывается, т.е. её ускорение равно 0, но положение её неустойчивое. Если наклон станет хотя бы немного больше, песчинка покатится вниз.

Учитывая, выше сказанное, запишем уравнение движения для песчинки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0\,,$$

Значит сумма сил, действующих на песчинку, равна нулю. Поэтому при сложении эти силы образуют прямоугольный треугольник. Напомним, что тангенс угла равен отношению длины противолежащего катета к длине прилежащего. Из этого треугольника сил получаем:



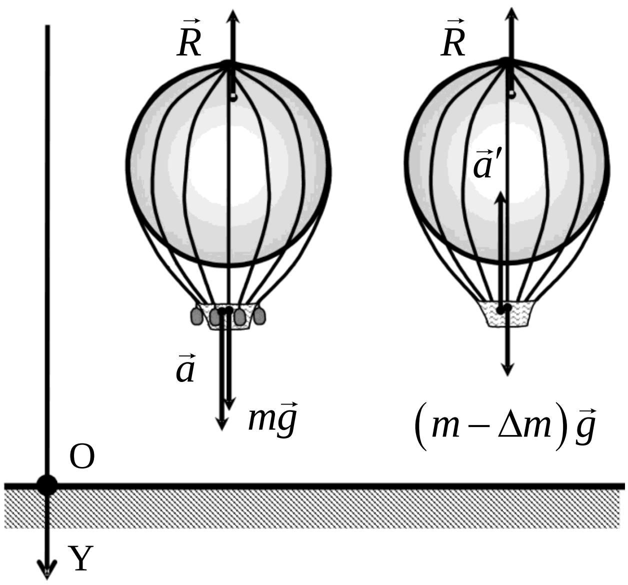
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu\,.$$

Ответ: Приближённое значение коэффициента трения песка о песок – $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 3. Аэростат массой m начал опускаться с постоянным ускорением a. Определить массу балласта, который необходимо сбросить, чтобы аэростат получил такое же ускорение по направлению вверх.

Решение. Выберем систему отчета. Направим ось OY по направлению ускорения свободного падения. На аэростат действует сила притяжения $m\vec{g}$ направленная вниз (вдоль оси OY) и подъёмная (архимедова) сила $\vec{R}$. Запишем второй закон Ньютона для нашей задачи:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}.$$



В проекции на ось OY:

$$ma = mg - R.$$

За Δm обозначим массу балласта, который необходимо сбросить. После того как сбросили балласт уравнение примет вид:

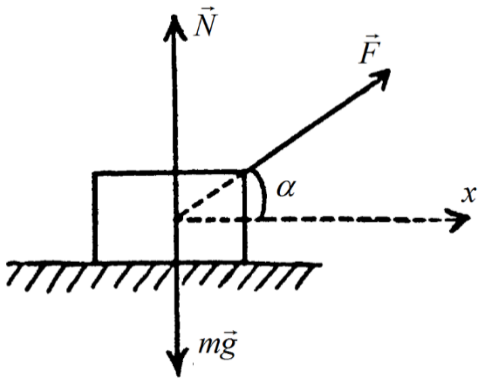
$$(m - \Delta m)a' = (m - \Delta m)g - R.$$

Проекции ускорений связаны выражением: $a' = -a$. Исключая R из этих выражений, получаем

Ответ: $\Delta m = 2ma/(g+a)$.

Задача 4. К бруску массой m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. По мере его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняются по закону $\alpha = kS$, где k – постоянная, S – пройденный путь. Найти скорость бруска как функцию угла α, полагая, что в начале движения он покоился. Определить его максимальную скорость.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для этого тела: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$.



Спроецируем векторное выражение на ось OX:

$$ma = F\cos\alpha.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$ma = m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dS}\frac{dS}{dt} = mV\frac{dV}{dS}.$$

Подставляя это в уравнение, получаем: $mV\dfrac{dV}{dS} = F\cos(kS)$;

$F\cos(kS)dS = mVdV$.

Проинтегрируем уравнение:

$$\int_0^S F\cos(kS')dS' = \int_0^V mV'dV'\,; \quad \frac{F}{k}\sin(kS) = \frac{mV^2}{2}.$$

Тогда $V(\alpha) = \sqrt{2F\sin\alpha/mk} = \sqrt{2g\sin\alpha/3k}$. Максимальная скорость будет достигнута при α = 90º. Отсюда $V_{\max} = \sqrt{2g/3k}$.

Ответ: $V(\alpha) = \sqrt{2g\sin\alpha/3k}$; $V_{\max} = \sqrt{2g/3k}$.

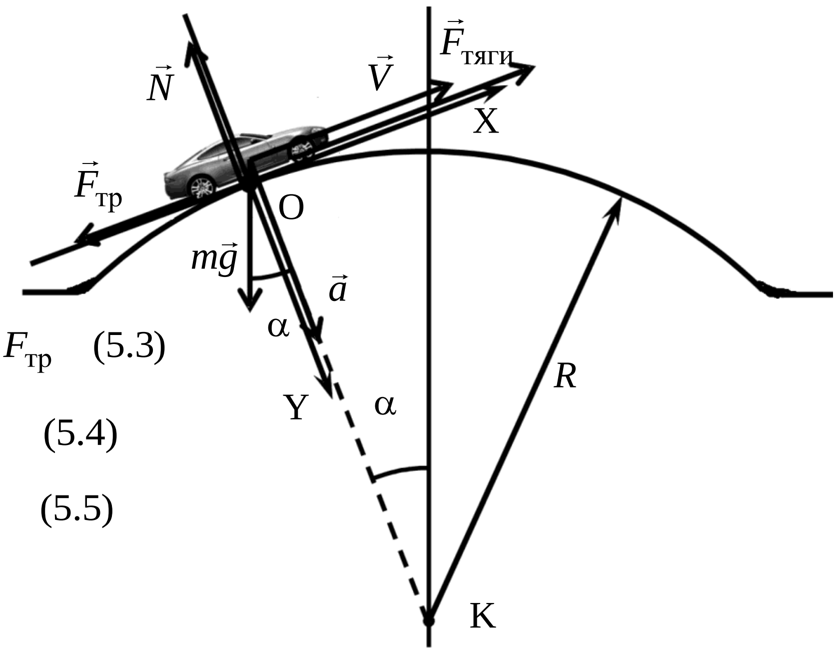
Задача 5. Автомобиль массой m = 3 т движется равномерно со скоростью V = 7 м/с по выпуклому мосту, радиус кривизны которого R = 40 м. Какой вес будет иметь автомобиль в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол α = 30° с вертикалью? Какую силу тяги развивает в этот момент двигатель автомобиля? Коэффициент трения между шинами автомобиля и асфальтом μ = 0,2.

Решение. Введём систему отсчёта XOY, связанную с мостом. Такая система отсчёта будет инерциальной, поэтому для решения воспользуемся II законом Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (5.1)$$

Поскольку автомобиль движется равномерно по мосту, то его тангенциальное ускорение равно нулю, а нормальное ускорение равно полному:

$$a = a_n = \frac{V^2}{R}. \quad (5.2)$$



Спроецируем векторное выражение (5.1) на оси выбранной системы координат с учётом (5.2):

$$\text{OX}: 0 = -mg\sin\alpha + F_{\text{тяги}} - F_{\text{тр}} \quad (5.3)$$

$$\text{OY}: m\frac{V^2}{R} = mg\cos\alpha - N \quad (5.4)$$

Сила трения: $F_{\text{тр}} = \mu N.$ (5.5)

Сила, с которой автомобиль давит на мост, называется вес P. Согласно III закону Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$, а по модулю эти силы равны. Тогда из (5.4) получаем:

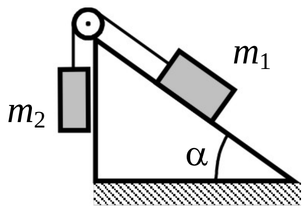
$$P = N = mg\cos\alpha - m\frac{V^2}{R} = 21800\ \text{Н}. \quad (5.6)$$

Силу тяги автомобиля находим из (5.3), (5.5) и (5.6):

$$F_{\text{тяги}} = mg\sin\alpha + \mu N = 19100 \text{ Н}. \qquad (5.7)$$

Ответ: вес автомобиля в заданной точке 21,8 кН, сила тяги – 19,1 кН.

Задача 6. На наклонной плоскости находится груз массой m_1 = 5 кг, связанный нитью, перекинутой через лёгкий блок, с другим грузом массой m_2 = 2 кг. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен μ = 0,05, угол наклона плоскости α = 30º. Определить: 1) ускорения грузов, 2) минимальное значение коэффициента трения μ_{min}, при котором система будет находиться в состоянии равновесия.

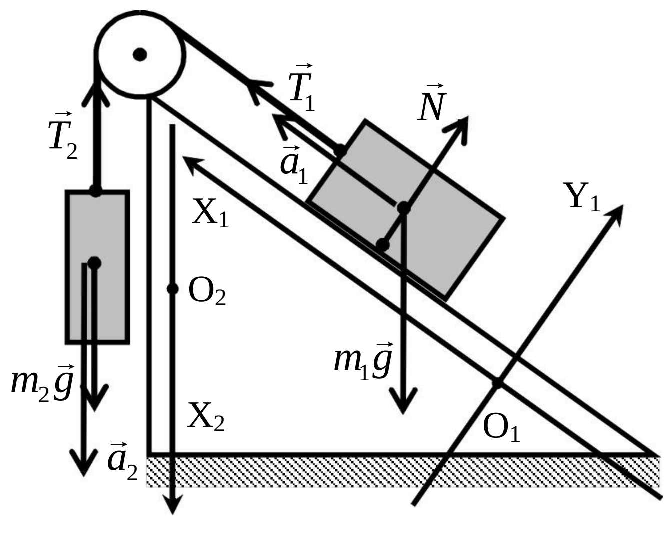


Решение. Для того чтобы определить ускорения грузов надо знать силы, действующие на них. Неизвестной является сила трения скольжения первого груза, поскольку она зависит от направления движения тела, и всегда направлена против вектора скорости. Поэтому сначала надо установить, куда будут двигаться тела. Для этого сначала решим задачу без учёта силы трения.

Для описания движения грузов введём две инерциальные системы отсчёта, связанные с горкой: $O_1X_1Y_1$ и O_2X_2. Запишем II закон Ньютона для каждого из тел:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1; \qquad (6.1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (6.2)$$



Так как нить нерастяжима, модули ускорений тел совпадают: $a = a_1 = a_2$. Кроме того, сила натяжения нити одинакова по всей длине ($T = T_1 = T_2$), поскольку блок, через который она перекинута лёгкий, а момент силы трения в оси не учитываем. Спроецируем на оси систем координат векторные уравнения (6.1) и (6.2):

$$O_1X_1: \quad m_1 a = -m_1 g\sin\alpha + T; \qquad (6.3)$$

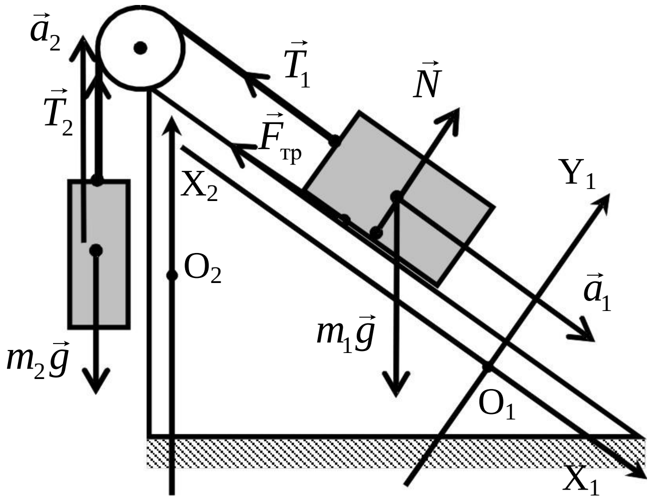
$$O_2X_2: \quad m_2 a = m_2 g - T. \qquad (6.4)$$

Ускорение тел без учёта силы трения найдём из (6.3) и (6.4):

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2} = -0,71\,\text{м/с}^2. \qquad (6.5)$$

Проекция ускорения отрицательная значит, первое тело может двигаться вниз, а второе – вверх, если сила трения не будет слишком большой, чтобы их затормозить.

Теперь учтём силу трения, которая, как следует из предыдущих рассуждений, будет действовать вверх вдоль наклонной плоскости. Удобно перенаправить оси координат, чтобы проекции ускорений тел были положительными в случае их скольжения.



$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}\,; \qquad (6.6)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2\,. \qquad (6.7)$$

Спроецируем на оси систем координат векторные уравнения (6.6) и (6.7):

O_1X_1: $m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - F_{тр}$; (6.8)

O_2X_2: $m_2 a = -m_2 g + T$; (6.9)

O_1Y_1: $0 = -m_1 g\cos\alpha + N$. (6.10)

Если происходит скольжение тела по наклонной плоскости, то сила трения равна $F_{тр} = \mu N$. Решая систему уравнений (6.8), (6.9) и (6.10), получаем:

$$a = g\,\frac{m_1\sin\alpha - m_2 - \mu m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0,40\ \text{м/с}^2\,. \qquad (6.11)$$

Ускорение тел получилось положительным, значит, первое тело будет скользить вниз. Заметим, что сила трения не может изменить направление движения тела на противоположное, она может только уменьшить его ускорение или затормозить тело совсем.

Чтобы найти минимальный коэффициент трения, при котором скольжения не будет, надо положить $a = 0$ в уравнении (6.11):

$$g\,\frac{m_1\sin\alpha - m_2 - \mu_{\min} m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0\,. \qquad (6.12)$$

Отсюда:

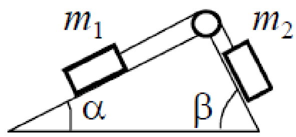
$$\mu_{\min} = \frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1\cos\alpha} = 0,12\,. \qquad (6.13)$$

Ответ: ускорения тел равны 0,4 м/с^2, $\mu_{\min} = 0,12$.

Задачи

2.1. Автомобиль массой m = 2 т движется равномерно со скоростью V = 10 м/с по вогнутому мосту, радиус кривизны которого R = 50 м. С какой силой давит автомобиль на мост в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол α = 30° с вертикалью? Какую силу тяги развивает в этот момент двигатель автомобиля? Коэффициент трения между шинами автомобиля и асфальтом μ = 0,3.

2.2. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих углы α = 15° и β = 45°, укреплён блок. Грузы с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. В начальный момент времени грузы были неподвижны. Коэффициенты трения между грузами и плоскостями одинаковы и равны μ. Определить: 1) ускорения грузов при μ = 0,05, 2) ускорения грузов при μ = 0,1, 3) минимальное значение коэффициента трения μ_{min}, при котором система будет находиться в состоянии равновесия.



2.3. Самолет делает «мертвую петлю». Радиус «мёртвой петли» $R = 500$ м. Скорость самолёта $V = 360$ км/ч постоянна. Найти вес лётчика массой $m = 70$ кг в нижней, верхней и средней точках петли.

2.4. Лифты Останкинской телебашни поднимают до высоты H = 337 м. Время подъёма Δt = 58 с. Скорость равномерного участка V_0 = 7 м/с. Считая ускорение постоянным по величине и одинаковым во время разгона и торможения, определите вес пассажира массой m = 70 кг: 1) в начале (P_1), 2) в середине (P_2), 3) в конце подъёма (P_3).

2.5. Небольшое тело начинает соскальзывать с вершины клина, основание которого l = 2,1 м. Коэффициент трения между телом и поверхностью клина μ = 0,14. При каком значении угла α (у основания клина) время соскальзывания будет наименьшим? Чему оно равно?

2.6. Автомобиль движется равномерно по горизонтальному пути, имеющему форму синусоиды $y = a\sin\left(x/\alpha\right)$, где a и α – некоторые постоянные. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ. При какой скорости движение автомобиля происходить без скольжения?

2.7. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = at$, где a – постоянная. Найти зависимости от t ускорения доски и бруска, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ.

2.8. Какое наибольшее ускорение может развить автомобиль при движении вверх по наклонной дороге с углом наклона α = 20º, если коэффициент трения между колёсами и дорогой μ = 0,5?

ТЕМА 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Основные понятия: Импульс тела, импульс силы, механическая система, импульс механической системы, центра масс системы, однородность пространства, замкнутая механическая система.

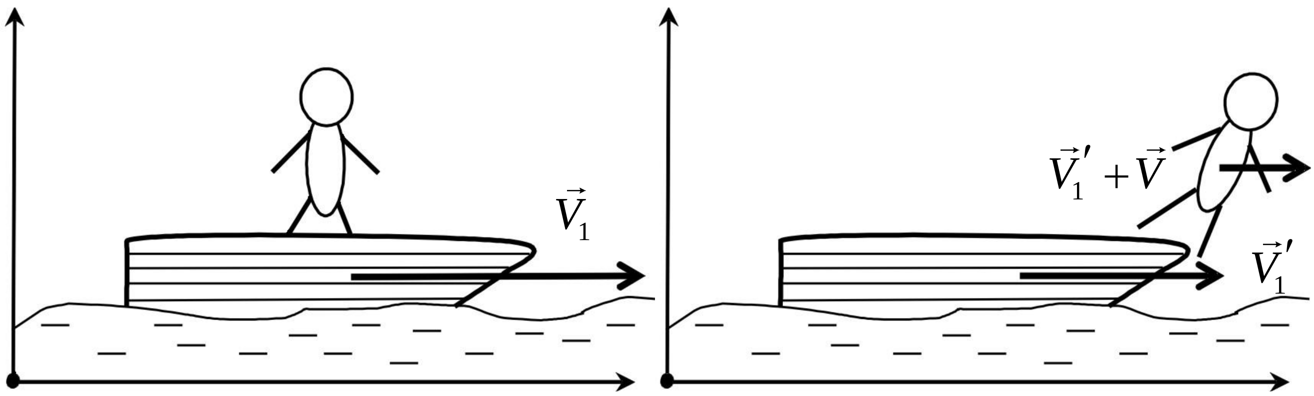
Контрольные вопросы

1. Что такое импульс силы?
2. Как определить импульс механической системы?
3. Какая связь между импульсом силы, подействовавшим на механическую систему, и изменением её импульса?
4. Сформулировать закон сохранения импульса механической системы.
5. Какова связь закона сохранения импульса с однородностью пространства?
6. Чем отличается замкнутая (изолированная) механическая система от открытой?
7. В каких системах отсчёта выполняется закон сохранения импульса?
8. Как определить радиус-вектор, скорость и ускорение движения центра масс механической системы?

Примеры решения задач

Задача 1. В лодке массой m_1 = 240 кг стоит человек массой m_2 = 60 кг. Лодка плывёт со скоростью V_1 = 2 м/с. Человек прыгает с лодки вперёд по движению лодки в горизонтальном направлении со скоростью V = 4 м/с (относительно лодки). Найти скорость U движения лодки после прыжка человека.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для нашей задачи в системе отсчёта, связанной с берегом. При этом учтём, что человек прыгает горизонтально со скоростью V = 4 м/с относительно лодки.



$$(m_1 + m_2)\vec{V}_1 = m_1\vec{V}_1' + m_2\left(\vec{V} + \vec{V}_1'\right). \qquad (1.1)$$

Отсюда получим выражение для скорости лодки после прыжка человека:

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{V}. \tag{1.2}$$

В проекции на горизонталь скорость лодки относительно берега после прыжка человека равна:

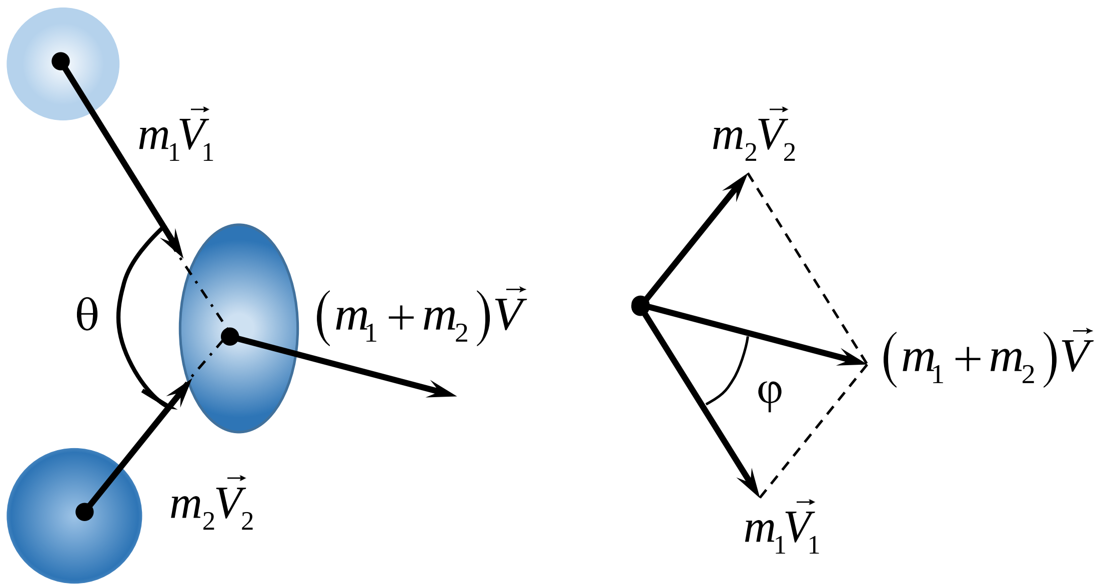
$$V_1' = V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}V = 2 - \frac{60}{300} \cdot 4 = 1{,}2 \text{ м/с}. \tag{1.3}$$

Ответ: $V_1' = 1{,}2$ м/с, направление движения лодки не изменилось.

Задача 2. Два шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг двигаются под углом $\theta = 120°$ друг к другу со скоростями $V_1 = 8$ м/с и $V_2 = 4$ м/с соответственно. Определить: 1) скорость образовавшейся частицы, 2) увеличение внутренней энергии ΔU шаров при их неупругом столкновении, 3) импульс силы, подействовавший на 1-ое тело во время удара.

Решение. 1) Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}. \tag{2.1}$$



По условию задачи столкновения двух шаров является неупругим, т.е. после соударения шары двигаются вместе. Возведём в квадрат выражение (2.1):

$$m_1^2V_1^2 + 2m_1\vec{V}_1 \bullet m_2\vec{V}_2 + m_2^2V_2^2 = (m_1 + m_2)^2 V^2$$

$$m_1^2V_1^2 + m_2^2V_2^2 + 2m_1V_1 \cdot m_2V_2 \cdot \cos\theta = (m_1 + m_2)^2 V^2. \tag{2.2}$$

Отсюда скорость шаров после их неупругого столкновения равна:

$$V=\frac{\sqrt{m_1^2V_1^2+m_2^2V_2^2+2m_1V_1\cdot m_2V_2\cdot\cos\theta}}{m_1+m_2}=2{,}88\text{ м/с}. \qquad (2.3)$$

2) По закону сохранения энергии в замкнутой системе энергия сохраняется. Энергия до взаимодействия (кинетическая энергия шаров) равна энергии после взаимодействия, которая складывается из кинетической движения шаров как одной системы и приращения их внутренней энергии:

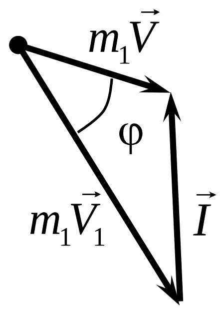
$$\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)V^2}{2}+\Delta U. \qquad (2.4)$$

Отсюда найдём ΔU:

$$\Delta U=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2, \qquad (2.5)$$

$$\Delta U=64{,}0+24{,}0-20{,}8=67{,}2\text{ Дж}. \qquad (2.6)$$

3) Импульс силы, подействовавший на тело, согласно II закону Ньютона, определяется через приращение его импульса:



$$\vec{I}=m_1\vec{V}-m_1\vec{V}_1. \qquad (2.7)$$

Возведём в квадрат выражение (2.7):

$$I^2=\left(m_1\vec{V}-m_1\vec{V}_1\right)^2=(m_1V)^2+(m_1V_1)^2-2(m_1V)(m_1V_1)\cos\varphi. \qquad (2.8)$$

В этом выражении неизвестен $\cos\varphi$. Его можно найти из выражения (2.1):

$$m_2\vec{V}_2=(m_1+m_2)\vec{V}-m_1\vec{V}_1. \qquad (2.9)$$

Его также можно возвести в квадрат:

$$(m_2V_2)^2=\left((m_1+m_2)\vec{V}-m_1\vec{V}_1\right)^2,$$

$$(m_2V_2)^2=\left((m_1+m_2)V\right)^2+(m_1V_1)^2-2(m_1+m_2)V\cdot m_1V_1\cdot\cos\varphi \qquad (2.10)$$

Отсюда находим $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi=\frac{\left((m_1+m_2)V\right)^2+(m_1V_1)^2-(m_2V_2)^2}{2(m_1+m_2)V\cdot m_1V_1}. \qquad (2.11)$$

После подстановки (2.11) в (2.8) получим:

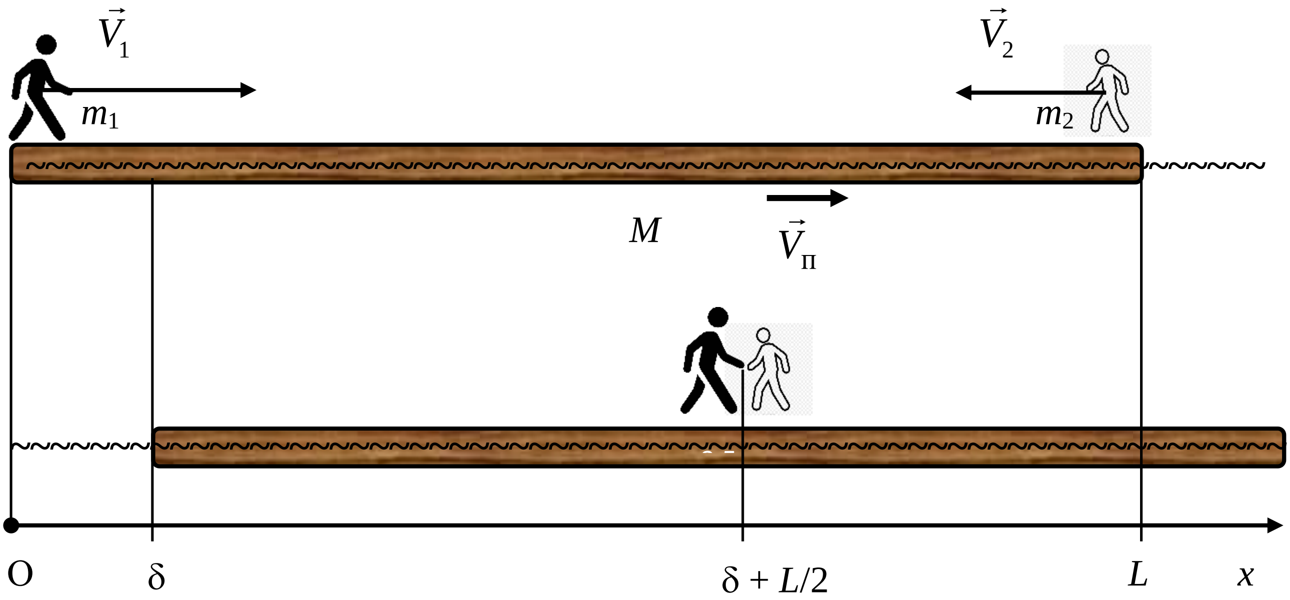
$$I^2=(m_1V)^2+(m_1V_1)^2-\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\left((m_1+m_2)V\right)^2+(m_1V_1)^2-(m_2V_2)^2\right). \qquad (2.12)$$

После упрощения выражения (2.12) получим:

$$I=\sqrt{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(m_1V_1^2+m_2V_2^2-\left(m_1+m_2\right)V^2\right)}=12{,}7\ \text{Н}\cdot\text{с}$$

Ответ: 1) V = 2,88 м/с; 2) $\Delta U=67{,}2$ Дж; 3) $I=12{,}7\ \text{Н}\cdot\text{с}$.

Задача 3. Плот массой M = 400 кг и длиной L = 10 м стоит в неподвижной воде. Два мальчика массами m_1 = 60 кг и m_2 = 40 кг, стоящие на противоположных концах плота, одновременно начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковой скоростью относительно плота и останавливаются при встрече. На какое расстояние δ сместится плот?



Решение. Поскольку мальчики начинают двигаться одновременно навстречу друг другу с одинаковой путевой скоростью $V_м$, они встретятся на середине плота, пройдя путь s = 5 м относительно плота. Время их движения – Δt. Тогда скорость мальчиков относительно плота $V_м=s/\Delta t$. За это время плот сместится на δ относительно своего начального положения, а его скорость относительно берега $V_п=\delta/\Delta t$. Выберем систему отсчёта, связанную с берегом. В этой системе отсчёта импульс всей механической системы, состоящей из двух мальчиков и плота, равен нулю, т.к. вначале все тела покоились. Эта механическая система является замкнутой, потому что сумма всех внешних сил равна нулю. Значит можно применить закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + M\vec{V}_п = 0\,, \quad (3.1)$$

где $\vec{V}_п, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ – скорость плота и мальчиков относительно берега соответственно. В проекции на горизонтальное направление выражение (3.1) можно записать следующим образом:

$$m_1\left(V_м + V_п\right) + m_2\left(-V_м + V_п\right) + MV_п = 0\,. \quad (3.2)$$

Здесь применён закон сложения скоростей для определения скоростей мальчиков относительно берега. Откуда получаем выражение для скорости движения плота:

$$V_п = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} V_м\,. \quad (3.3)$$

Отсюда:

$$\frac{\delta}{\Delta t} = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \delta = s \cdot \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} = -0{,}2 \text{ м.} \quad (3.4)$$

Знак «–» означает, что плот сместится против оси Оx.

Ответ: плот сместится на 0,2 м влево.

Задача 4. Автомат выпускает n = 600 пуль в минуту. Масса каждой пули m = 4 г, а её начальная скорость V = 500 м/с. Необходимо найти среднюю силу отдачи F при стрельбе.

Решение. Автомат выпускает 1 пулю за Δt = 0,1 с. Каждая пуля получает импульс mV. Тогда, по закону сохранения импульса, автомат за каждый промежуток времени Δt получает импульс равный по величине, но противоположного направления. Импульс силы $\vec{I}$, который получает автомат при выстреле одной пули, равен приращению импульса автомата mV:

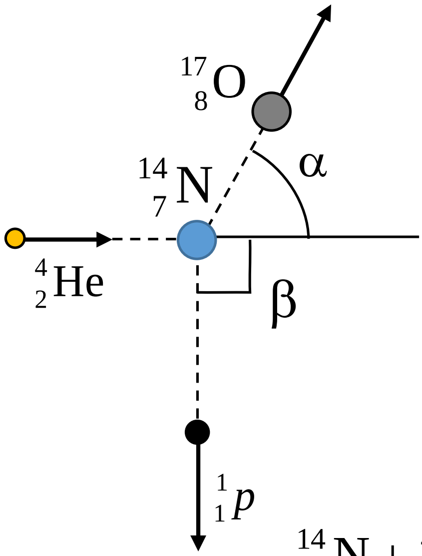
$$F\Delta t = mV\,.$$

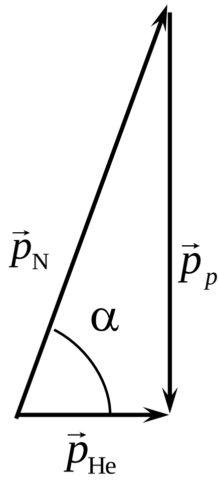
Тогда

$$F = \frac{mV}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 500}{0{,}1} = 20 \text{ Н}\,.$$

Ответ: средняя сила отдачи 20 Н.

Задача 5. В опыте Резерфорда неподвижные ядра атомов азота обстреливались α-частицами, вылетающими из радиоактивных ядер со скоростью υ_α = 1000 км/с. В результате взаимодействия возникало ядро атома кислорода и протон. С какой скоростью вылетит ядро атома кислорода и протон, если протон вылетел под углом β = 90° к первоначальному направлению, а ядро атома кислорода вылетело под углом α = 70°?





$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}p$$

Решение. По закону сохранения импульса, сумма импульсов частиц, возникших после взаимодействия, равна сумме импульсов частиц, до взаимодействия. С учётом равной нулю скорости (и импульса) ядра азота, импульс до взаимодействия равен импульсу α-частицы.

Перенесём вектора параллельно самим себе, и получим прямоугольный (по условию) треугольник, катетами которого будут импульс ядра гелия и импульс протона, а гипотенузой – импульс ядра кислорода. Угол между катетом и гипотенузой тоже известен из условия.

Из треугольника получим:

$$p_p = p_{\mathrm{He}} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha, \qquad p_{\mathrm{O}} = \frac{p_{\mathrm{He}}}{\cos\alpha}. \tag{5.1}$$

По формулам связи между массой и импульсом, находим скорости частиц:

$$\upsilon_p = \frac{m_\alpha \upsilon_\alpha \mathrm{tg}\,\alpha}{m_p} = \frac{4\ \text{а.е.м.} \cdot 10^6\ \text{м/с} \cdot \mathrm{tg}\,70^\circ}{1\ \text{а.е.м.}} = 1{,}04 \cdot 10^7\ \text{м/с}, \tag{5.2}$$

$$\upsilon_{\mathrm{O}} = \frac{m_\alpha \upsilon_\alpha}{m_{\mathrm{O}} \cos\alpha} = \frac{4\ \text{а.е.м.} \cdot 10^6\ \text{м/с}}{17\ \text{а.е.м.} \cdot \cos 70^\circ} = 6{,}10 \cdot 10^5\ \text{км/с}. \tag{5.3}$$

Ответ: υ_p = 10700 км/с, υ_{O} = 610 км/с.

Задачи

3.1. Частица массой m_1 = 1 г, двигавшаяся со скоростью $\vec{V}_1 = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}$ (м/с), испытала абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой m_2 = 2 г и скорость $\vec{V}_2 = \vec{i} - 9 \cdot \vec{j}$ (м/с). Найти скорость $\vec{V}$ образовавшейся частицы.

3.2. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью V = 100 м/с, разрывается на две равные части на высоте h = 40 м. Одна часть падает через t_0 = 1 с на землю точно под местом взрыва. На каком расстоянии (по горизонтали) и через какое время упадёт вторая часть снаряда?

3.3. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабжённой лёгкими колёсами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека M = 60 кг, масса доски m = 20 кг. На какое расстояние передвинется тележка, если человек перейдёт на другой конец доски? На какое расстояние s передвинется человек относительно пола? Длина доски l = 2 м.

3.4. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием M = 15 т. Орудие стреляет вверх под углом φ = 60° к горизонту в направлении пути. С какой скоростью V_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда m = 20 кг и он вылетает со скоростью V_2 = 600 м/с?

3.5. Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки во встречную перебрасывается мешок массой m = 50 кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет со скоростью V = 8,5 м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны M_1 = 500 кг и M_2 = 1000 кг соответственно?

3.6. Тело массой m = 0,2 кг брошено под углом α = 45° к горизонту с начальной скоростью V_0 = 5 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы $\vec{I}$, действующий на тело во время его полёта; 2) изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время его полёта.

3.7. Шарик массой m_1 = 50 г, летящий со скоростью V_0 = 5 м/с налетает на неподвижный шарик массой m_2 = 80 г и отлетает от него со скоростью V_1 = 3 м/с под углом α = 45° к первоначальному направлению. С какой скоростью V_2 и под каким углом β они разлетятся? (β – угол между скоростями V_1 и V_2). Определить среднюю силу их взаимодействия $F_{ср}$, если время взаимодействия составило Δt = 0,05 с.

ТЕМА 4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Основные понятия: Работа силы, мощность, энергия как универсальная мера движения и взаимодействия, кинетическая энергия механической системы, связь кинетической энергии с работой внешних и внутренних сил, консервативные и диссипативные силы, потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле, закон сохранения механической энергии, абсолютно упругий удар, абсолютно неупругий удар.

Контрольные вопросы

1. Как определяется работа силы?
2. Что такое энергия, и какие существуют виды энергии?
3. Какова связь кинетической энергии с работой внешних и внутренних сил?
4. Какие силы называются консервативными и диссипативными?
5. Что такое механическая энергия тела?
6. Сформулируйте закон сохранения механической энергии?
7. Какой удар тел называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим?

Примеры решения задач

Задача 1. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $V = B\sqrt{S}$, где B - постоянная; S - пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии.

$$A = \Delta E_k = \frac{mV_k^{\ 2}}{2}. \qquad (1.1)$$

Здесь учтено, что начальная кинетическая энергия локомотива равна нулю. Чтобы найти конечную скорость, запишем выражение для скорости в виде:

$$V = \frac{dS}{dt} = B\sqrt{S}, \qquad \int_0^{S_0} \frac{dS}{\sqrt{S}} = B\int_0^{t_0} dt, \qquad (1.2)$$

где S_0 – путь, пройденный локомотивом за время t_0 от начала движения. Отсюда:

$$2\sqrt{S_0} = Bt_0, \qquad V_k = B\sqrt{S_0} = B^2 t_0 / 2. \qquad (1.3)$$

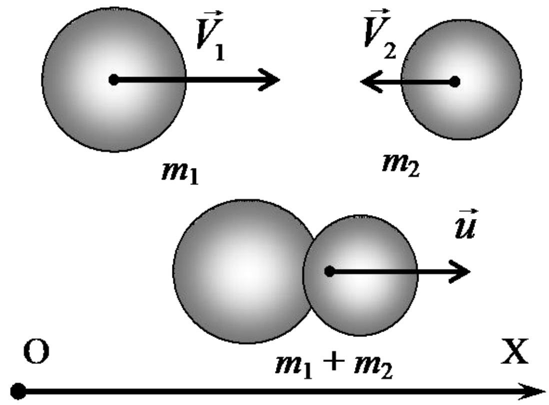
Теперь можно записать выражение для работы:

$$A = mB^4 t_0^{\ 2} / 8. \qquad (1.4)$$

Ответ: $A = mB^4 t_0^{\ 2} / 8$.

Задача 2. Два шара массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Определить: 1) скорость шаров u после удара; 2) кинетические энергии шаров E_{k1} до и E_{k2} после удара; 3) коэффициент восстановления энергии. Удар считать прямым, абсолютно неупругим.

Решение. 1) Неупругие шары не восстанавливают после удара своей первоначальной формы. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса. Так как шары движутся по одной прямой, то этот закон можно записать в скалярной форме:



$$m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)u\ . \qquad (2.1)$$

Откуда:

$$u = (m_1V_1 - m_2V_2)/(m_1 + m_2)\ . \qquad (2.2)$$

Направление скорости первого шара принято за положительное.

2) Кинетические энергии шаров до и после удара определяем по формулам:

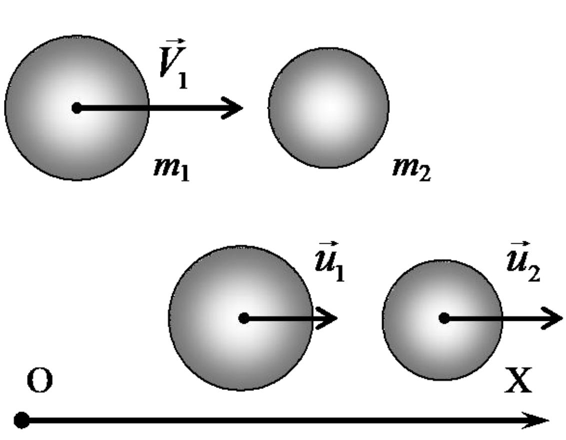
$$E_{k1} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}, \quad E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (2.3)$$

3) Коэффициент восстановления энергии – это доля механической энергии, сохранившейся в системе после удара тел:

$$k = E_{k2}/E_{k1}\ . \qquad (2.4)$$

Ответ: $u = \dfrac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2}$, $E_{k1} = \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2}$, $E_{k2} = \dfrac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$, $k = \dfrac{E_{k2}}{E_{k1}}$.

Задача 3. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю w своей кинетической энергии первый шар передал второму?



Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:

$$w = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{m_2 u_2^2/2}{m_1 V_1^2/2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{V_1}\right)^2, \tag{3.1}$$

где E_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и E_2' – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы, для определения w надо найти u_2. Воспользуемся тем, что при ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: импульса и механической энергии. По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, получаем:

$$m_1 V_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{3.2}$$

По закону сохранения энергии в механике:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{3.3}$$

Решая совместно два последних уравнения, находим:

$$u_2 = \frac{2 m_1 V_1}{m_1 + m_2}. \tag{3.4}$$

Подставляя это выражение u_2 в выражение для энергии, получаем:

$$w = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{3.5}$$

Из этого соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Ответ: $w = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

Задача 4. Молот массой $m_1 = 200$ кг падает на поковку, масса m_2 которой вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость V_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти: 1) кинетическую энергию E_1 молота в момент удара; 2) энергию E_2, переданную фундаменту; 3) энергию E, затраченную на деформацию поковки; 4) коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о поковку. Удар молота о поковку рассматривать как абсолютно неупругий.

Решение. 1) Кинетическую энергию молота в момент удара найдём по формуле:

$$E_1 = m_1 V_1^2/2 = 400 \text{ Дж}. \tag{4.1}$$

2) Чтобы определить энергию, переданную фундаменту, предварительно найдем скорость системы «молот + поковка (с наковальней)» непосредственно

после удара. Для этого применим закон сохранения импульса в проекции на вертикальное направление, который в случае абсолютно неупругого удара двух тел выражается формулой:

$$m_1V_1+m_2V_2=(m_1+m_2)u, \tag{4.2}$$

где V_2 – скорость поковки (вместе с наковальней) перед ударом; u – скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара. Так как поковка с наковальней до удара находилась в состоянии покоя, то $V_2 = 0$. При абсолютно неупругом ударе деформация не восстанавливается, вследствие чего молот и поковка (с наковальней) движутся как одно целое, т. е. с одинаковой скоростью u. Из выражения (4.2) найдем:

$$u=\frac{m_1}{m_1+m_2}V_1. \tag{4.3}$$

В результате сопротивления фундамента скорость u быстро гасится, а кинетическая энергия, которой обладает система «молот + поковка (с наковальней)», передается фундаменту. Эту энергию определим по формуле:

$$E_2=\frac{m_1+m_2}{2}u^2=\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}V^2=\frac{m_1}{m_1+m_2}E_1=30\text{ Дж.} \tag{4.4}$$

3) Молот до удара обладал энергией E_1, а энергия, переданная фундаменту E_2. Следовательно, на деформацию поковки использовалась энергия:

$$E = E_1 - E_2 = 370\text{ Дж.} \tag{4.5}$$

4) Назначение молота – путём совершения ударов о поковку, находящуюся на наковальне, вызвать деформацию поковки. Следовательно, энергию E следует считать полезной. КПД удара молота η о поковку равен отношению энергии E, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии E_1:

$$\eta=\frac{E}{E_1}=0{,}925=92{,}5\%. \tag{4.6}$$

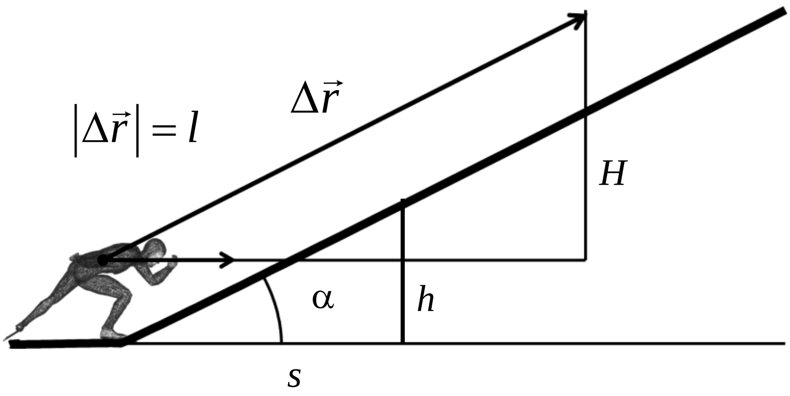
Ответ: E_1 = 400 Дж, E_2 = 30 Дж, E = 370 Дж, η = 92,5%.

Задача 5. Конькобежец, разогнавшись до скорости V = 27 км/ч, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня поднимется конькобежец с разгона, если подъём горы составляет h = 0,5 м на каждые s = 10 м по горизонтали и коэффициент трения коньков о лёд μ = 0,02?

Решение. Рассмотрим движение конькобежца в системе отсчёта, связанной с ледяной горой. Относительно начального уровня он поднимется на высоту H, при этом конькобежец проедет по горе путь l, причём

$$l=\frac{H}{\sin\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{s}{h}. \tag{5.1}$$

Во время его скольжения вверх по ледяной горе на него действовали сила тяжести $m\vec{g}$, трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, и реакции опоры $\vec{N}$. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (приращение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на него): $\Delta E_k = A$. Учтём, что конечная кинетическая энергия конькобежца равна нулю, а работу совершают только сила тяжести и сила трения:



$$0 - \frac{mV^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}. \qquad (5.2)$$

Сила тяжести является консервативной, поэтому её работа равна приращению потенциальной энергии тела с обратным знаком:

$$A_{\text{тяж}} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = 0 - mgH. \qquad (5.3)$$

Работа силы трения всегда отрицательная, т.к. угол между вектором скорости тела и силой равен 180°:

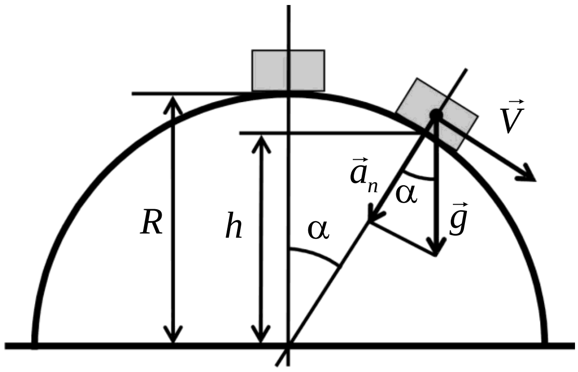
$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} l \cos 180° = -\mu N l = -\mu mg\cos\alpha \cdot l =$$
$$= -\mu mg\cos\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = -\mu mgH \cdot \operatorname{ctg}\alpha = -\mu mgH \cdot \frac{s}{h}. \qquad (5.4)$$

Подставим (5.3) и (5.4) в (5.2):

$$\frac{mV^2}{2} = mgH + \mu mgH \cdot \frac{s}{h}, \qquad H = \frac{V^2}{2g\left(1 + \mu s/h\right)} = 2{,}05 \text{ м}. \qquad (5.5)$$

Ответ: Конькобежец поднимется на высоту 2,05 м по ледяной горке.

Задача 6. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющей форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвётся от поверхности купола? Трением пренебречь.



Решение. Камешек массой *m* скользит по куполу и на него действуют только консервативные силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Поэтому его механическая энергия будет сохраняться во время движения:

$$mgR = mgh + mV^2/2, \qquad h = R\cos\alpha \tag{6.1}$$

В момент отрыва камешка от купола на него действует только сила тяжести, а реакция опоры становится равной нулю. Значит, ускорение камешка с этого момента будет равно ускорению свободного падения g, а нормальное ускорение a_n:

$$a_n = g\cos\alpha, \qquad V^2/R = g\cos\alpha. \tag{6.2}$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) получим: $\cos\alpha = 2/3$, $\alpha = 48{,}2^\circ$.
Ответ: камешек опишет дугу 48,2° по куполу до момента отрыва от него.

Задачи

4.1. Под действием некоторой силы ускорение материальной точки массой $m = 1$ кг изменяется по закону: $a = B + Cs$, где $B = 1$ м/с^2, $C = 2$ с$^{-2}$. Определить работу, совершаемую этой силой, действующей в направлении перемещения, на пути $s_1 = 2$ м? Какова средняя мощность, развиваемая данной силой на пути s_1, если этот путь пройден за время $t_1 = 3$ с?

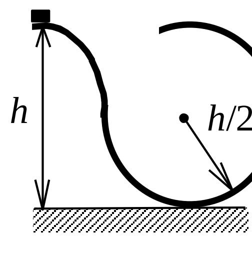
4.2. Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 10°$. По ней пускают камень вверх, который, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Чему равен коэффициент трения скольжения, если начальная скорость камня в 2 раза больше его конечной скорости?

4.3. Молотком, масса которого $M = 1$ кг, забивают в стену гвоздь массой $m = 75$ г. Скорость молота в момент удара $V = 10$ м/с. Определить энергию, которая была затрачена на забивание гвоздя. Определить КПД удара молотка.

4.4. Пуля массой $m = 10$ г, летевшая со скоростью $V = 600$ м/с, попала в баллистический маятник массой $M = 5$ кг длиной $l = 1$ м и застряла в нём. На какую высоту h, откачнувшись после удара, поднялся маятник? Найти максимальный угол отклонения маятника α. Найти коэффициент восстановления энергии k при ударе пули.

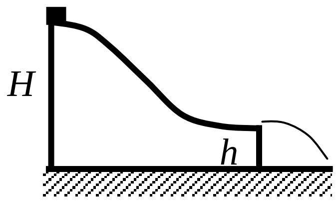
4.5. Частица массой m обладает импульсом $p_1 = 5\cdot10^{-20}$ кг·м/с. Определить, какой максимальный импульс p_2 может передать эта частица, сталкиваясь упруго с частицей массой $4m$, которая до соударения покоилась. Во сколько раз уменьшилась энергия первой частицы?

4.6. Небольшое тело начинает скользить с высоты h по наклонному жёлобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$. Пренебрегая трением, найти высоту, на которую поднимется тело в момент отрыва от жёлоба.



4.7. Прикреплённый к вертикальной пружине груз медленно опускают до положения равновесия, причём пружина растягивается на длину x_0. На сколько растянется пружина, если тому же грузу предоставить возможность свободно падать с такого положения, при котором пружина не растянута? Какой максимальной скорости достигнет при этом груз? Массой пружины пренебречь.

4.8. Автомобиль массой m = 1200 кг способен на скорости V = 50 км/ч двигаться по дороге с наибольшим уклоном к горизонту равным α = 16°. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, равна P = 14,7 кВт. Найти максимальную мощность P_{max} двигателя.



4.9. Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высоты H, имеющей горизонтальный трамплин высотой h. Какое расстояние s пролетит шайба после вылета с трамплина?

4.10 Шар массой m_1 = 16 кг, движущийся горизонтально со скоростью V_1 = 100 м/с, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2 = 4 кг. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Определить скорости шаров после удара.

ТЕМА 5. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные понятия: Угловой путь, угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение, их связь со скоростями и ускорениями точек вращающегося тела, момент инерции относительно оси, уравнение динамики вращательного движения, момент силы относительно оси и относительно полюса.

Контрольные вопросы

1. Что такое угловой путь, угловая скорость и угловое ускорение тела?
2. Какова связь между скоростью точки и её угловой скоростью вращения?
3. Как определяется момент инерции тела относительно оси?
4. Как можно определить момент инерции тела с использованием теоремы Штейнера?
5. Дайте определение понятий момент силы относительно оси и момент силы относительно полюса? Какова связь между ними?
6. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения?

Примеры решения задач

Задача 1. Диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс. Зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 2{,}6$ рад, $B = -6$ рад/с, $C = 0{,}5$ рад/с^2, $D = 0{,}33$ рад/с^3 – известные константы. Для момента времени $t_1 = 3$ с найти:

а) модуль углового перемещения $\Delta\varphi_1$;

б) угловой путь, пройденный к этому моменту времени Ψ_1;

в) угловую скорость ω_1;

г) угловое ускорение ε_1.

д) Определить для точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения, полное ускорение в момент времени, когда тангенциальное ускорение равно нулю.

Решение. а) Модуль углового перемещения равен разности углов поворота в конечный и начальный моменты времени:

$$\Delta\varphi(t) = \left|\varphi(t) - \varphi(0)\right| = \left|Bt + Ct^2 + Dt^3\right|. \qquad (1.1)$$

$$\Delta\varphi_1 = \left|-6\cdot 3 + 0{,}5\cdot 3^2 + 0{,}33\cdot 3^3\right| = 4{,}59 \text{ рад}.$$

б) Угловой путь равен модулю углового перемещения, при условии, что направление вращения не менялось. Поэтому сначала надо найти угловую скорость диска и возможную точку остановки.

в) Найдём закон изменения угловой скорости. Угловая скорость в момент времени t определяется по формуле:

$$\omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}=B+2Ct+3Dt^2. \qquad (1.2)$$

$$\omega_1=-6+2\cdot 0,5\cdot 3+3\cdot 0,33\cdot 3^2=5,91 \text{ рад/с}.$$

Вернёмся к б). Найдём момент остановки диска, приравняв его угловую скорость (1.2) к нулю:

$$-6+2\cdot 0,5t+3\cdot 0,33t^2=0. \qquad (1.3)$$

Это уравнение имеет два корня:

$$t_{\text{ост1}} = 2 \text{ с и } t_{\text{ост2}} = -3 \text{ с}.$$

Следовательно, угловой путь за время от 0 до t_1 = 3 с будет равен сумме модулей угловых перемещений от начала отсчёта до момента остановки $t_{\text{ост1}}$ и от момента остановки $t_{\text{ост1}}$ до t_1. В момент времени $t = t_{\text{ост1}}$ угол поворота равен:

$$\varphi(t_{\text{ост1}})=-6\cdot 2+0,5\cdot 2^2+0,33\cdot 2^3=-7,36 \text{ рад}.$$

Значит общий угловой путь равен:

$$\begin{aligned}\psi_1&=\left|\varphi(t_{\text{ост1}})-\varphi(0)\right|+\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_{\text{ост1}})\right|=\\&=\left|(-7,36)-(-2)\right|+\left|(-4,59)-(-7,36)\right|=8,13 \text{ рад}.\end{aligned} \qquad (1.4)$$

г) Угловое ускорение определяем по формуле:

$$\varepsilon(t)=\frac{d\omega}{dt}=2C+6Dt. \qquad (1.5)$$

$$\varepsilon_1=2\cdot 0,5+6\cdot 0,33\cdot 3=6,94 \text{ рад/с}^2.$$

д) Найдем для точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения, полное ускорение в момент времени t_2, когда тангенциальное ускорение равно нулю. Полное ускорение определяется формулой: $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$.

Так как тангенциальное ускорение равно нулю, то

$$a(t_2)=a_n(t_2)=\omega^2 r=\left(B+2Ct_2+3Dt_2^2\right)^2 r. \qquad (1.6)$$

Найдем момент времени t_2, когда $a_\tau(t_2)=0$:

$$a_\tau(t_2)=\varepsilon(t_2)r=(2C+6Dt_2)r=0 \Rightarrow t_2=-C/3D. \qquad (1.7)$$

$$t_2=-0,5/(3\cdot 0,33)=-0,5 \text{ с}.$$

Окончательно получим:

$$a(t_2)=\left(-6+2\cdot 0,5\cdot(-0,5)+3\cdot 0,33\cdot(-0,5)^2\right)^2\cdot 0,1=3,9\ \text{м/с}^2. \qquad (1.8)$$

Ответ: а) $\Delta\varphi_1=-4,59$ рад; б) $\psi_1=8,13$ рад; в) $\omega_1=5,91$ рад/с;

г) $\varepsilon_1=6,94$ рад/с^2; д) $a(t_2)=3,9$ м/с^2.

Задача 2. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε вокруг неподвижной оси. За время t_0 оно изменило свою скорость от ω_0 = 31,4 рад/с до ω_1 = 69,1 рад/с, сделав N = 240 оборотов. Найти t_0 и ε.

Решение. Вращение колеса равноускоренное, следовательно, угловая скорость возрастает равномерно:

$$\omega(t)=\omega_0+\varepsilon t. \qquad (2.1)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае угол поворота колеса изменяется по закону:

$$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \text{т.к.} \quad \omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.2)$$

По условию задачи колесо сделало N оборотов. Это означает, что оно прошло угловой путь равный $\Delta\varphi=\varphi(t_0)-\varphi_0=N\cdot 2\pi$. Угловое ускорение ε и время t_0 найдём путём решения системы уравнений:

$$\Delta\varphi=2\pi N=\omega_0 t_0+\frac{\varepsilon t_0^2}{2}; \qquad \omega_1=\omega_0+\varepsilon t_0. \qquad (2.3)$$

Угловое ускорение взяли с положительным знаком, т.к. по условию задачи скорость вращения колеса возрастает. Из этой системы уравнений получим:

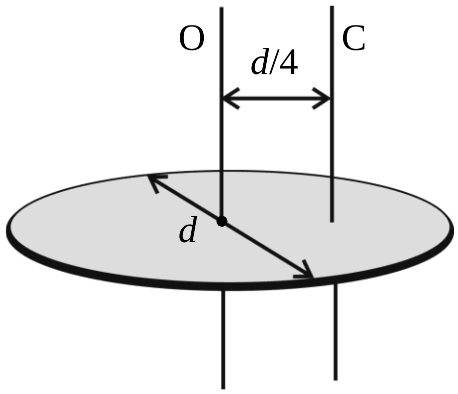
$$t_0=\frac{4\pi N}{\omega_1+\omega_0}=30\ \text{с}, \qquad \varepsilon=\frac{\omega_1-\omega_0}{t_0}=1,26\ \text{рад/с}^2. \qquad (2.4)$$

Ответ: t_0 = 30 с, ε = 1,26 рад/с^2.

Задача 3. Диаметр диска d = 20 см, масса m = 800 г. Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.

Решение. Воспользуемся теоремой Штейнера. Момент инерции тела относительно оси С определяется по формуле:

$$I_C = I_O + ma^2, \qquad (3.1)$$



где I_O – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и удалённой от оси C на расстояние a. Для диска радиусом R он равен:

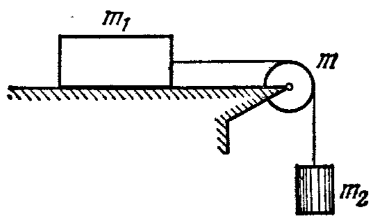
$$I_O = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}md^2. \qquad (3.2)$$

Тогда, по теореме Штейнера:

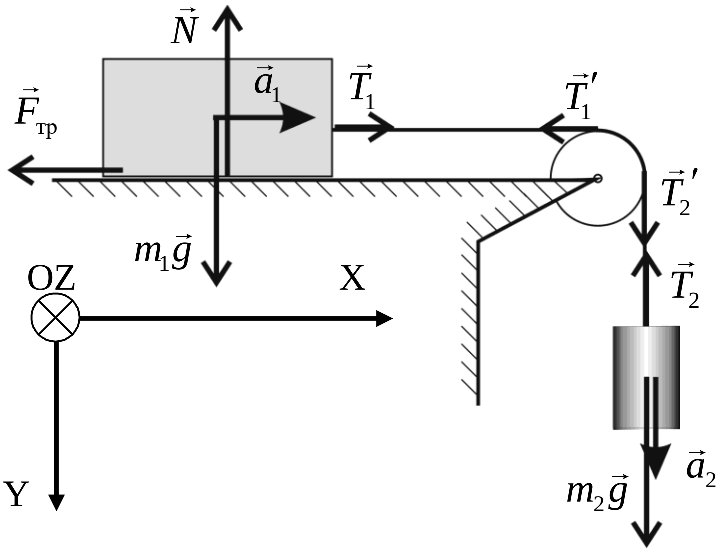
$$I_C = \frac{1}{8}md^2 + m\left(\frac{d}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}md^2 = 0,006\ \text{кг}\cdot\text{м}^2. \qquad (3.3)$$

Ответ: $I_C = 0,006\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 4. В системе, изображенной на рисунке, известны массы тел m_1 и m_2, масса блока m, коэффициент трения для груза m_1 равен μ. Скольжение нити по блоку нет. В начальный момент тело массой m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти ускорение, с которым опускается тело. Считать, что блок имеет форму диска.



Решение. Расставим все силы, действующие на тела, в данной задачи, где $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, $\vec{N}$ – сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения. Запишем второй закон Ньютона для тел 1 и 2:



$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}, \qquad (4.1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (4.2)$$

Спроецируем эти векторные уравнения на оси системы координат:

$$\text{OX:} \quad m_1 a = T_1 - \mu N; \qquad (4.3)$$

$$\text{OY:} \quad 0 = m_1 g - N, \qquad m_2 a = m_2 g - T_2. \qquad (4.4)$$

Здесь учтено, что нить, связывающая тела, нерастяжима, поэтому $a_1 = a_2 = a$. Сложим эти первое и последнее уравнения, учтём второе, получаем:

$$a\left(m_2+m_1\right)=T_1-T_2+m_2 g-\mu m_1 g\ . \qquad (4.5)$$

На блок со стороны нити действуют силы натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$. По третьему закону Ньютона $\vec{T}_1'=-\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2'=-\vec{T}_2$. Массивный блок вращается ускоренно под воздействием разности моментов сил натяжения нити. Запишем уравнение динамики вращательного движения:

$$I\varepsilon=M=T_2R-T_1R\,, \qquad (4.6)$$

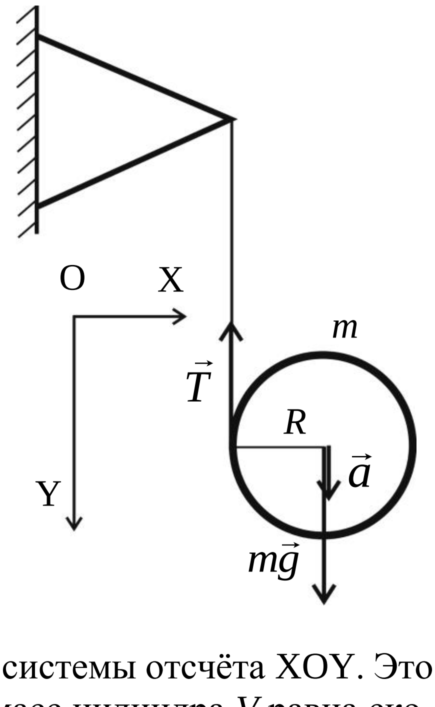
где M – суммарный момент сил, $I=mR^2/2$ – момент инерции диска, ε – угловое ускорение блока. Поскольку проскальзывания нити относительно блока нет, то скорость движения нити V должна быть равна скорости движения обода блока: $V=\omega R$. После дифференцирования этого выражения по времени получаем связь между ускорением нити a и угловым ускорением блока ε: $a=\varepsilon R$. Подставляя из этого выражения ε в (4.6), получаем:

$$T_2-T_1=\frac{I\varepsilon}{R}=\frac{mR\varepsilon}{2}=\frac{ma}{2}\,. \qquad (4.7)$$

Используя уравнения (4.5) и (4.7), найдём

Ответ: $a=g\dfrac{m_2-\mu m_1}{m_2+m_1+m/2}$.

Задача 5. На тонкостенный цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение оси цилиндра.



Решение. Будем считать, что масса цилиндра m, а его радиус R. На диск действуют силы, которые заставляют его центр масс, находящийся на оси, двигаться с ускорением a. Кроме того, на него действует момент силы натяжения относительно оси цилиндра, который вызывает его вращение с угловым ускорением ε. Лента нерастяжимая, поэтому каждая точка ленты, которая отделилась от цилиндра, будет находиться в неподвижности относительно лабораторной системы отсчёта XOY. Это будет выполняться, если скорость движения центра масс цилиндра V равна скорости вращения внешней поверхности цилиндра: $\omega R=V$. Путём дифференцирования по времени этого равенства получим кинематическую взаимосвязь ускорений:

$$\varepsilon R=a. \qquad (5.1)$$

Заишем II закон Ньютона для этого цилиндра:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \quad \text{OY}: \quad ma = mg - T. \qquad (5.2)$$

Используем основной закон динамики вращательного движения:

$$I\varepsilon = M = TR. \qquad (5.3)$$

Учтём, что момент инерции тонкостенного цилиндра относительно его оси:

$$I = mR^2. \qquad (5.4)$$

После преобразований системы уравнений (5.1) – (5.4), получаем

Ответ: $a = g/2 = 4{,}9$ м/с^2.

Задачи

5.1. Диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс. Зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = 9t - 6t^2 + t^3$ (рад). Для момента времени $t_0 = 2$ с найти:

а) угловой путь φ_0 и модуль углового перемещения ψ_0, пройденный к этому моменту времени от начала движения при $t = 0$;

б) угловую скорость ω_0;

в) угловое ускорение ε_0.

г) Определить для точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения, полное линейное ускорение в момент времени, когда угловая скорость диска равна нулю.

5.2. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2. За время $t_1 = 1$ мин оно изменило свою скорость от ω_0 до ω, сделав $N = 360$ оборотов. Найти ω_0 и ω.

5.3. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку стержня, удалённую на расстояние a от одного из его концов.

5.4. Шар массой m и радиусом R вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2$. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Найти работу, которую совершит момент сил за время от 0 до t_0.

5.5. Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время 1 мин частоту вращения от 300 об/мин до 180 об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Найти: угловое ускорение колеса, момент сил торможения, работу сил торможения и число оборотов, сделанных колесом за время 1 мин.

5.6. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный цилиндр. Найти ускорение a оси цилиндра.

5.7. Через неподвижный блок радиусом R и моментом инерции I переброшена нить, на которой висят грузы разных масс m_1 и m_2. Каково будет натяжение нити по обе стороны блока?

ТЕМА 6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные понятия: Момент импульса тела относительно оси и относительно полюса, закон сохранения момента импульса, работа момента силы, энергия вращательного движения тела, изотропность пространства.

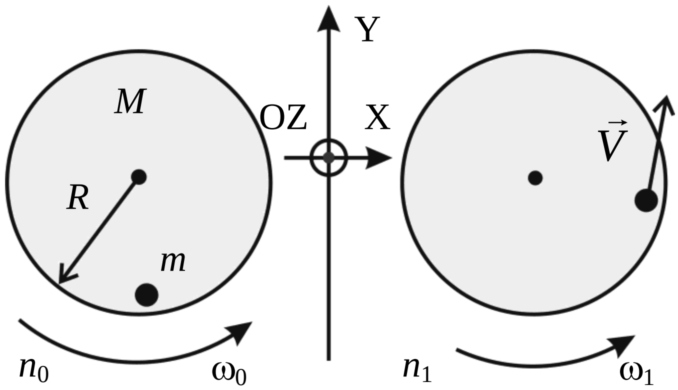
Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятий момент импульса тела относительно оси и момент импульса тела относительно полюса. Какова связь между ними?
2. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
3. В каких системах отсчёта выполняется закон сохранения момента импульса?
4. Как определяется работа момента силы и энергия механической системы, совершающей вращательное движение? Какова связь между ними?
5. Какова связь между законом сохранения момента импульса и изотропностью пространства?

Примеры решения задач

Задача 1. Платформа массой M = 240 кг в виде диска радиусом R = 3 м вращается по инерции, делая n_0 = 6 об/мин. На краю платформы стоит человек, масса которого m = 80 кг. С какой частотой n_1 будет вращаться платформа, если человек начнёт двигаться по краю со скоростью V = 1,5 м/с относительно платформы в направлении её вращения. Моментом силы трения, действующим в опоре, пренебречь.

Решение. Выберем систему отсчёта OXYZ, связанную с землёй. Вращение платформы с человеком происходит относительно оси OZ с угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi n_0$. Если пренебречь моментом силы трения, действующим в опоре, то момент импульса механической системы «платформа + человек» относительно оси вращения L_z сохраняется при любых перемещениях человека по платформе:



$$\left(I_{\text{пл}} + I_{\text{чел}}\right)\omega_0 = I_{\text{пл}}\omega_1 + I_{\text{чел}}\omega_2 . \qquad (1.1)$$

Радиус платформы равен R. Момент инерции человека относительно оси вращения считаем так же, как для материальной точки: $I_{\text{чел}} = mR^2$, а платформы – как для однородного диска: $I_{\text{пл}} = MR^2/2$. Когда человек начнёт двигаться по краю платформы, его угловая скорость станет равной $\omega_1 = 2\pi n_1$, а угловая скорость человека относительно системы отсчёта OXYZ станет равной:

$$\omega_2 = \frac{V_0}{R} = \frac{\omega_1 R + V}{R} = \omega_1 + \frac{V}{R}. \qquad (1.2)$$

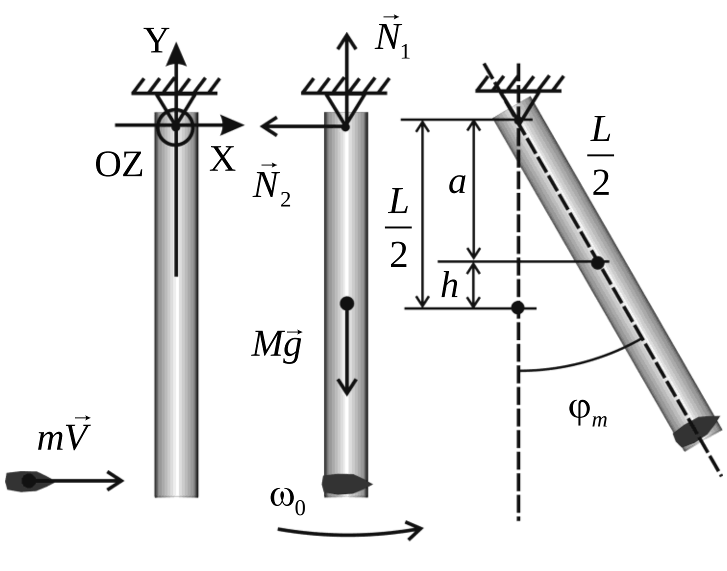
Здесь учтено, что скорость движения человека V_0 относительно неподвижной системы отсчёта OXYZ складывается из скорости вращения края платформы $\omega_1 R$ и скорости его движения относительно платформы V. Преобразуем выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 + mR^2\left(\omega_1 + \frac{V}{R}\right), \qquad (1.3)$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{mV}{R\left(M/2 + m\right)} = 0,428\ \text{рад/с}. \qquad (1.4)$$

Ответ: $n_1 = \omega_1/2\pi = 0{,}0682$ об/с = 4,1 об/мин.

Задача 2. Стержень длиной L = 1,5 м и массой M = 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня ударяет пуля массой m = 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью V = 500 м/с, и застревает в стержне. 1) С какой угловой скоростью ω_0 начнет вращаться стержень? 2) На какой максимальный угол φ_m отклонится стержень после удара пули?



Решение. 1) В момент удара пули на механическую систему «стержень + пуля» действуют силы реакции опоры $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, а также сила тяжести $M\vec{g}$. Массой пули можно пренебречь, т.к. $m \ll M$. Моменты всех этих сил относительно оси вращения OZ равны нулю, поскольку линии действия сил проходят через ось вращения стержня, а значит плечо каждой внешней силы равно нулю. Вследствие этого, момент импульса системы относительно оси OZ будет сохраняться в момент удара. До удара момент импульса пули относительно оси вращения стержня был равен произведению импульса mV на плечо L:

$$mVL = I_{\text{ст}}\omega_0. \qquad (2.1)$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец равен $I_{\text{ст}} = \frac{1}{3}ML^2$. Выразим начальную угловую скорость вращения стержня с пулей:

$$\omega_0 = \frac{3mVL}{ML^2} = \frac{3mV}{ML} = \frac{0,03 \cdot 500}{1,5 \cdot 10} = 1,0 \text{ рад/с}. \tag{2.2}$$

2) Определим максимальный угол отклонения стержня после попадания в него пули. Поскольку стержень вместе с пулей будет двигаться под действием консервативной силы – силы тяжести, то механическая энергия этой системы будет сохраняться:

$$\frac{1}{2} I_{\text{ст}} \omega_0^2 = Mgh, \tag{2.3}$$

где h – высота, на которую поднимется центр масс механической системы. Отсюда получим:

$$h = \frac{\omega_0^2 L^2}{6g}. \tag{2.4}$$

Высота h связана с максимальным углом отклонения φ_m:

$$h = L/2 - a = L/2 - (L/2)\cos\varphi_m, \tag{2.5}$$

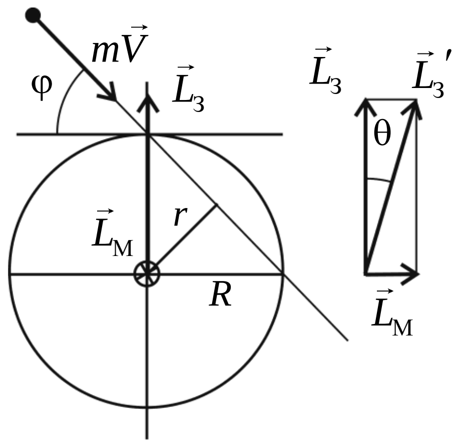
$$\cos\varphi_m = \frac{L/2 - h}{L/2} = 1 - \frac{2h}{L} = 1 - \frac{\omega_0^2 L}{3g} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_m}{2}, \tag{2.6}$$

$$\sin^2\frac{\varphi_m}{2} = \frac{\omega_0^2 L}{6g}, \qquad \sin\frac{\varphi_m}{2} = \omega_0\sqrt{\frac{L}{6g}}, \tag{2.7}$$

$$\varphi_m = 2\arcsin\left(\omega_0\sqrt{\frac{L}{6g}}\right) = 18^\circ. \tag{2.8}$$

Ответ: 1) ω_0 = 1 рад/с; 2) φ_m = 18º.

Задача 3. В районе Северного полюса Земли падает метеорит массой m = 1000 т со скоростью V = 20 км/с под углом φ = 45° к горизонту. На какой угол θ повернётся земная ось в результате соударения с метеоритом.



Решение. Механическая система «Земля + метеорит» является замкнутой, поэтому момент импульса в ней будет сохраняться:

$$\vec{L}_З + \vec{L}_М = \vec{L}_З{}' , \tag{3.1}$$

где $\vec{L}_З$, $\vec{L}_З{}'$ – момент импульса Земли относительно центра до и после попадания метеорита, $\vec{L}_М$ – момент импульса метеорита относительно центра Земли. Момент импульса Земли относительно центра определяется по формуле:

$$\vec{L}_З = I\vec{\Omega} , \qquad \vec{L}_З{}' = I\vec{\Omega}' . \tag{3.2}$$

Если считать Землю однородным шаром массой M = 6·10²⁴ кг и радиусом R = 6400 км, то её момент инерции относительно оси вращения равен:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = 10^{38} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 . \tag{3.3}$$

Период обращения Земли вокруг своей оси T = 24 ч = 86400 с, тогда угловая скорость вращения $\Omega = \Omega' = 2\pi/T = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Модуль момента импульса Земли не изменяется: $L_З = L_З{}' = I\Omega = 7,3 \cdot 10^{33}$ кг·м²/с, но направление вектора момента импульса изменяется при попадании метеорита. Момент импульса метеорита направлен перпендикулярно моменту импульса Земли, а модулю он равен:

$$L_М = mV \cdot r = mV \cdot R/\sqrt{2} = 9,1 \cdot 10^{16} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} . \tag{3.4}$$

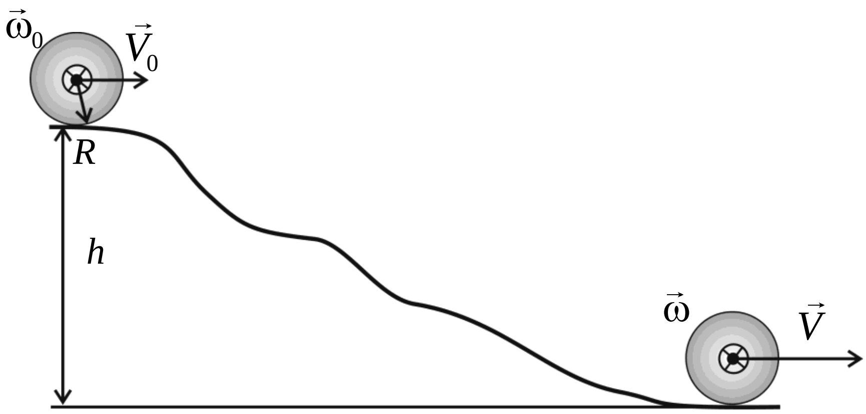
Угол поворота земной оси будет очень мал так, что:

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = L_М / L_З = 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ рад} = 7,1 \cdot 10^{-16} \text{ град} = 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ угл. сек.}$$

Ответ: $\theta = 2,6 \cdot 10^{-12}$ угл. сек.

Задача 4. Определить скорость движения центра однородного шара, скатившегося без скольжения с горки высотой h = 40 см. Начальная скорость шара V_0 = 2,5 м/с.

Решение. Шар массой m и радиусом R движется только под действием консервативных сил: силы тяжести и силы реакции опоры. Поэтому его механическая энергия будет сохраняться на всей траектории движения. В начальной момент времени шар обладал потенциальной энергией mgh, кинетической энергией поступательного движения $mV_0^2/2$ и кинетической энергией вращательного движения $I\omega_0^2/2$. После того как он скатился с высоты



h, вся его энергия перешла в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. Запишем закон сохранения механической энергии:

$$mgh+\frac{mV_0^2}{2}+\frac{I\omega_0^2}{2}=\frac{mV^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.1)$$

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр масс равен $I=\frac{2}{5}mR^2$. Если нет проскальзывания между шаром и горкой, то в любой момент времени скорость движения центра масс шара V и его угловая скорость вращения ω должны быть связаны соотношением: $\omega=\frac{V}{R}$. Преобразуя (4.1), получаем:

$$2gh+\frac{7}{5}V_0^2=\frac{7}{5}V^2. \qquad (4.2)$$

Отсюда:

$$V=\sqrt{V_0^2+\frac{10gh}{7}}=\sqrt{2{,}5^2+\frac{10\cdot 9{,}8\cdot 0{,}4}{7}}=3{,}44\text{ м/с}. \qquad (4.3)$$

Ответ: $V=3{,}44$ м/с.

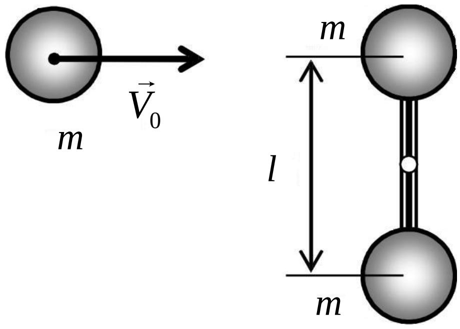
Задачи

6.1. Платформа массой M = 120 кг в виде диска вращается по инерции, делая n_0 = 10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой m = 80 кг. С какой частотой n_1 будет вращаться платформа, если человек перейдет на край платформы?

6.2. Пуля массой m = 9 г, летящая горизонтально со скоростью V_0 = 200 м/с, попадает в покоящийся на горизонтальном шероховатом столе деревянный шар массой M = 3 кг и радиусом R = 10 см на расстоянии l = 2 см ниже центра масс шара и застревает в нём. Коэффициент трения скольжения между шаром и поверхностью стола μ = 0,1. Найти угловую скорость ω_0 и угловое ускорение ε_0 шара в момент попадания пули. Считать, что $m \ll M$. Найти долю w потерянной механической энергии.

6.3. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия E шара равна 14 Дж. Определить кинетическую энергию E_1 поступательного и E_2 вращательного движения шара.

6.4. С наклонной плоскости высотой h = 1 м без начальной скорости скатываются два цилиндра одинаковой массы и одинакового радиуса: первый из них сплошной однородный, а второй – тонкостенный. Определить скорость центров масс цилиндров в конце спуска.



6.5. Атом массой m движется со скоростью V_0 и сталкивается упруго с неподвижной молекулой, состоящей из таких же атомов, удалённых на расстояние l. Определить момент импульса, который получит молекула при столкновении относительно оси, проходящей через центр масс.

6.6. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m = 0,4 кг, летящий со скоростью V = 20 м/с. Траектория проходит на расстоянии r = 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнёт вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный угловой момент инерции I человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

6.7. На Землю в районе экватора падает по касательной объект массой m = 1000 т, движущийся со скоростью υ = 30 км/с навстречу вращению планеты. Удар абсолютно неупругий. На сколько изменится длительность земных суток?

6.8. Тонкий прямой стержень длиной l = 1 м прикреплён к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол φ = 60^o от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость V нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

6.9. Маятник в виде однородного шара, жестко скрепленного со стержнем, длина которого равна радиусу шара, может качаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. В центр шара ударилась пуля массой m = 9 г, летевшая горизонтально со скоростью V_0 = 400 м/с, и застряла в нём. Масса шара M = 10 кг, радиус его R = 15 см. На какой угол φ отклонится маятник в результате удара пули? Массой стержня пренебречь.

ТЕМА 7. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ

Основные понятия: осциллятор, гармонические колебания, амплитуда, фаза, период колебаний, свободные, затухающие, вынужденные колебания.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими и, какими параметрами они характеризуются?
2. Что такое свободные колебания маятника и как записывается дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний?
3. Какими параметрами характеризуются затухающие колебания?
4. При каком условии реализуется апериодический процесс?
5. Что такое резонанс?

Примеры решения задач

Задача 1. Найти циклическую частоту и амплитуду гармонического колебания частицы, если на расстоянии x_1 от положения равновесия её ускорение равно a_1, а её скорость V_1.

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний частицы:

$$x(t) = A\sin\omega t. \tag{1.1}$$

Тогда скорость и ускорение будут равны:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t, \qquad a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t. \tag{1.2}$$

Выражения (1.1) и (1.2) запишем для момента времени t_1:

$$x_1 = A\sin\omega t_1, \qquad V_1 = A\omega\cos\omega t_1, \qquad a_1 = -A\omega^2\sin\omega t_1. \tag{1.3}$$

Из этих выражений получим:

Ответ: $\omega = \sqrt{-\dfrac{a_1}{x_1}}$ и $A = \sqrt{\left(\dfrac{V_1}{\omega^2}\right)^2 + x_1^2}$.

Задача 2. Груз пружинного маятника совершает свободные колебания по закону $x(t) = x_0\sin\omega t$. Чему равно отношение кинетической энергии пружинного маятника к его потенциальной энергии в момент времени $t_0 = T/12$, где T – период колебаний маятника?

Решение. Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника соответственно равны:

$$E_K = \frac{mV^2}{2}, \qquad E_n = \frac{kx^2}{2}, \tag{2.1}$$

где k – коэффициент жёсткости пружины, m – масса маятника. Циклическая частота свободных колебаний маятника определяется по формуле: $\omega = \sqrt{k/m}$. Определим скорость движения груза:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t. \tag{2.2}$$

Отсюда находим кинетическую и потенциальную энергии маятника:

$$E_K = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2 \omega t, \qquad E_n = \frac{kx_0^2}{2} \sin^2 \omega t. \tag{2.3}$$

Частота колебаний с периодом колебаний связана следующей формулой $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Найдём отношение E_K/E_n для момента времени $t_0 = T/12$.

$$\frac{E_k}{E_n} = \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} = \mathrm{ctg}^2\, \omega t = \mathrm{ctg}^2 \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} \right) = \mathrm{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3.$$

Ответ: $E_K/E_n = 3$.

Задача 3. Определить, насколько отстанут маятниковые часы за сутки, если их поднять на высоту h = 5 км над поверхностью Земли.

Решение. Период колебаний маятниковых часов определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3.1}$$

где g – ускорение свободного падения, l – длина маятника. В результате того, что часы поднимут на некоторую высоту, ускорение свободного падения уменьшится, а период колебаний возрастёт, следовательно, часы будут отставать. Найдем ускорение свободного падения на поверхности g и на высоте h над поверхностью Земли g'. Для этого воспользуемся формулой Ньютона:

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad g' = G\frac{M}{(R+h)^2}, \tag{3.2}$$

где Период колебаний маятника на поверхности Земли T = 1 с, а над поверхностью – T':

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{R+h}{R}, \tag{3.3}$$

$$\frac{T+\Delta T}{T}=1+\frac{\Delta T}{T}=1+\frac{h}{R}, \tag{3.4}$$

Период колебаний маятника на высоте h будет больше на ΔT, чем на поверхности:

$$\Delta T = T\frac{h}{R}=1\,\text{с}\cdot\frac{5\,\text{км}}{6400\,\text{км}}=7{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{с}. \tag{3.5}$$

В сутках 86400 с. Тогда отставание маятника за сутки будет составлять:

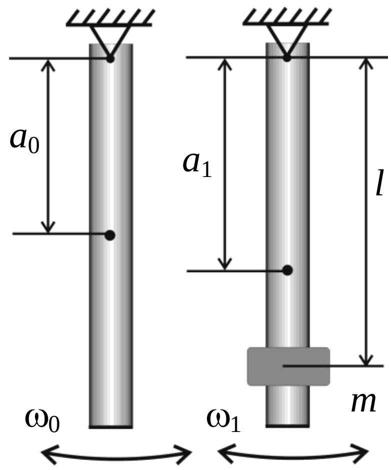
$$\Delta t = 86400\cdot 7{,}8\cdot 10^{-4}=68\,\text{с}.$$

Ответ: $\Delta t = 68\,\text{с}.$

Задача 4. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с циклической частотой ω_0 = 15 рад/с. Если к нему прикрепить небольшое тело массой m = 50 г на расстоянии l = 20 см ниже оси, то циклическая частота колебаний становится ω_1 = 10 рад/с. Найти момент инерции этого маятника относительно оси качания.

Решение. Допустим, что физический маятник имеет массу M, расстояние от оси до его центра масс – a_0, а момент инерции маятника относительно оси качания – I_0. Тогда, циклическая частота малых колебаний относительно оси равна:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{Mga_0}{I_0}}. \tag{4.1}$$



Если прикрепить груз массой m к маятнику на расстоянии l ниже оси, то циклическая частота станет равной:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(M+m)ga_1}{I_0+ml^2}}. \tag{4.2}$$

Положение центра масс маятника с грузом сместится, а расстояние от оси до центра масс станет равным a_1:

$$a_1=\frac{Ma_0+ml}{M+m}. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получаем:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{Mga_0+mgl}{I_0+ml^2}}. \tag{4.4}$$

Решая совместно уравнения (4.1) и (4.4), находим:

$$I_0=ml^2\cdot\frac{\omega_1^2-g/l}{\omega_0^2-\omega_1^2}=8\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2. \tag{4.5}$$

Ответ: $I_0=8\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$

Задача 5. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле, где её потенциальная зависит от координаты x как $U(x) = U_0(1 - \cos\alpha x)$, где U_0 и α – некоторые постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Связь между силой и потенциальным полем определяется выражением:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -U_0\alpha\sin(\alpha x) \approx -U_0\alpha^2 x. \tag{5.1}$$

Здесь учтено, что колебания малые, $\sin(\alpha x) \approx \alpha x$. С другой стороны, по II закону Ньютона

$$F_x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5.2}$$

Приравнивая (5.1) и (5.2), получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний частицы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + U_0\alpha^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{5.3}$$

Циклическая частота колебаний равна: $\omega = \alpha\sqrt{\frac{U_0}{m}}$, а период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}}$.

Задачи

7.1. Точка совершает колебания по гармоническому закону с амплитудой A = 1 см и частотой ω = 0,1 рад/с. Определить ускорение a точки в момент времени, когда её смещение равно x = 0,5 см.

7.2. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период колебаний равен T_1 = 0,5 с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен T_2 = 0,6 с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого груза?

7.3. В однородный стержень длиной l массой M, подвешенный за один конец, попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью V. Написать уравнение колебаний стержня, если пуля попала в его нижний конец.

7.4. Ареометр массой m плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнёт совершать колебания с периодом T. Считая колебания незатухающими, найти по данным этого опыта плотность жидкости, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра d.

ТЕМА 8. ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Основные понятия: идеальный газ, уравнение состояния идеального газа, универсальная газовая постоянная, количество вещества, работа газа, молярная теплоёмкость вещества, внутренняя энергия, I начало термодинамики, температура, изопроцессы, II начало термодинамики, энтропия.

Контрольные вопросы

1. Что такое идеальный газ? Напишите уравнение состояния идеального газа.
2. Как определяется работа газа?
3. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы и как она определяется для идеального газа?
4. Сформулируйте I начало термодинамики
5. Какие существуют термодинамические изопроцессы?
6. Сформулируйте II начало термодинамики.
7. Какой физический смысл имеет энтропия?
8. Как определяется приращение энтропии в обратимом термодинамическом процессе?

Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде объёмом V = 30 л содержится идеальный газ при температуре t = 0° С. После того как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на Δp = 0,78 атм (без изменения температуры). Найти массу выпущенного газа Δm. Плотность данного газа при нормальных условиях ρ = 1,3 г/л.

Решение. Запишем уравнения состояния для идеального газа с молярной массой M. Учтём, что температура газа T и объём сосуда V сохраняются, а масса газа и давление в сосуде – нет:

$$p_1V = \frac{m_1}{M}RT, \qquad p_2V = \frac{m_2}{M}RT. \tag{1.1}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(p_1 - p_2)V = \frac{m_1 - m_2}{M}RT, \quad \Rightarrow \quad \Delta pV = \frac{\Delta m}{M}RT, \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \Delta p\frac{MV}{RT}. \tag{1.2}$$

Преобразуем уравнение состояния идеального газа, чтобы определить молярную массу газа M, считая, что газ находится при нормальных условиях (p = 1 атм = 10^5 Па, t = 0° С):

$$p = \frac{m}{V}\cdot\frac{RT}{M} = \rho\cdot\frac{RT}{M}, \quad \Rightarrow \quad M = \rho\cdot\frac{RT}{p}. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\Delta m = \frac{\Delta p}{p}\rho V = \frac{0{,}78\,\text{атм}}{1\,\text{атм}} 30\ \text{л} \cdot 1{,}3\,\frac{\text{г}}{\text{л}} = 30\ \text{г}. \qquad (1.4)$$

Ответ: $\Delta m = 30\,\text{г}$.

Задача 2. Объём одного моля кислорода возрастает по закону $V = \alpha/T$, где $\alpha = 3$ м^3·К. Определить работу газа A при уменьшении температуры на ΔT = 40 К и количество теплоты Q, подведённой к газу.

Решение. 1) Работа, совершённая газом, определяется по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV\,. \qquad (2.1)$$

Выразим давление через объём и температуру с помощью уравнения состояния для идеального газа:

$$p = \frac{\nu RT}{V}\,, \qquad (2.2)$$

где ν – количества вещества, R – универсальная газовая постоянная. Подставляя выражение (2.2) в (2.1) с учётом условия задачи ($T = \alpha/V$), получаем:

$$A = \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R}{V^2} dV = -\nu R\left(\frac{\alpha}{V_2} - \frac{\alpha}{V_1}\right) = \nu R \Delta T = -1 \cdot 8{,}31 \cdot (-40) = 332\ \text{Дж}. \qquad (2.3)$$

2) Найдём количество теплоты Q, которое должно быть подведено к газу в этом процессе. Воспользуемся I началом термодинамики:

$$Q = A + \Delta U\,. \qquad (2.4)$$

Для этого необходимо определить приращение внутренней энергии кислорода ΔU в этом процессе:

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \frac{5}{2}\nu R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot (-40) = -831\ \text{Дж}. \qquad (2.5)$$

Здесь учтено, что молярная теплоёмкость при постоянном объёме C_V двухатомного газа, каким является кислород, равна $5R/2$.

Таким образом, Q = 332 – 831 = –499 Дж.

Ответ: $A = 332\,\text{Дж}$, Q = –499 Дж.

Задача 3. Показать, что внутренняя энергия U воздуха в комнате не зависит от температуры, если наружное давление p постоянно. Вычислить U, если p равно нормальному атмосферному давлению. Объем комнаты V = 40 м^3.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле:

$$U = \nu C_V T, \tag{3.1}$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме. Если молекула газа имеет i степеней свободы, то $C_V = \frac{i}{2}R$. Воздух состоит преимущественно из двухатомных молекул азота N_2 и кислорода O_2, значит $i = 5$. Следовательно,

$$U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV = \frac{5}{2}\cdot 10^5 \cdot 40 = 10^7 \text{ Дж}. \tag{3.2}$$

Ответ: $U = 10$ МДж.

Задача 4. Аргон при нормальных условиях имел объём $V_1 = 0{,}2$ м^3. Определить изменение внутренней энергии газа ΔU и работу A, совершённую газом, при его адиабатном расширении до объёма $V_2 = 0{,}3$ м^3.

Решение. 1) Определим приращение внутренней энергии газа ΔU при адиабатном расширении. Аргон является одноатомным газом, поэтому молекулы аргона имеют 3 степени свободы ($i = 3$). Значит, внутренняя энергия газа при температуре T определяется по формуле:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV. \tag{4.1}$$

Приращение внутренней энергии в этом процессе равно:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right). \tag{4.2}$$

Начальное давление $p_1 = 10^5$ Па. Конечное давление p_2 аргона определяется из уравнения адиабаты для идеального газа:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma, \tag{4.3}$$

где γ – показатель адиабаты газа, который зависит от числа степеней свободы молекулы i:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}. \tag{4.4}$$

Отсюда:

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = 10^5\left(\frac{0{,}2}{0{,}3}\right)^{\frac{5}{3}} = 0{,}509\cdot 10^5 \text{ Па}. \tag{4.5}$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(0{,}509\cdot 10^5\cdot 0{,}3 - 10^5\cdot 0{,}2\right) = -4{,}7\cdot 10^3 \text{ Дж}. \tag{4.6}$$

2) Определим работу газа A. Поскольку процесс является адиабатическим, то тепло к нему не подводится:

$$Q = A + \Delta U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\Delta U = 4,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \qquad (4.7)$$

Ответ: $\Delta U = -4,7$ кДж, $\quad A = 4,7$ кДж.

Задачи

8.1. Сколько молекул газа содержится в баллоне объёмом V = 40 л при температуре T = 300 К и давлении p = 4 МПа?

8.2. Определить плотность воздуха при нормальных условиях (давление p = 1 атм, температура t = 0 ºС).

8.3. ν = 1 моль азота, находящийся при нормальных условиях (p = 10^5 Па, T = 273 К), расширяется адиабатически в 5 раз. Найти изменение внутренней энергии газа и работу, совершённую при расширении.

8.4. Гелий совершил работу A = 8 кДж при расширении. Определить количество теплоты Q, подведённое к газу, если этот процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарически.

8.5. Водород массой m_1 = 20 г находится при температуре T_1 = 300 К. Сначала водород расширяется адиабатно, увеличив свой объём в пять раз, а затем сжимается при постоянной температуре до начального объёма. Определить температуру изотермического процесса T_2, полную работу, совершенную газом A. Изобразить процесс графически.

8.6. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части. В одной находиться два моля гелия, в другой – вакуум. Перегородку убирают. Определить изменение энтропии гелия.

8.7. Одноатомный газ в количестве ν = 0,1 кмоль под давлением p_1 = 100 кПа занимал объем V_1 = 5 м^3. Газ сжимался изобарно до объема V_2 = 1 м^3, затем сжимался адиабатно и расширялся изотермически до начального состояния. Построить график цикла. Определить:

1. температуры характерных точек цикла,
2. работу газа,
3. термический КПД цикла,
4. КПД цикла Карно при том же температурном интервале,
5. изменение энтропии на каждом участке.

ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

g = 9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения тела на поверхности Земли,

$R = 8{,}31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная,

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана,

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро,

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная,

$M = 6 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли,

R = 6400 км – радиус Земли.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: Учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2015. – 557 с.

2. Детлаф, А.А. Курс физики: Учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 10-е изд., стер. – М.: Академия, 2015.– 719 с.

3. Савельев, И.В. Курс физики Т.1: Механика, колебания и волны, молекулярная физика: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям в 3-х томах / И.В. Савельев – СПб: Лань, 2021, – 462 с.