

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Институт естественных и точных наук
Кафедра физической электроники

53(07)
Г951

С.Ю. Гуревич

КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ

Учебное пособие

Часть II

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2018

УДК 53(07)
Г951

*Одобрено
учебно-методической комиссией физического факультета*

Рецензенты:

д.ф-м.н., проф. Бучельников В.Д., д.ф-м.н., проф. Песин Л.А.

Гуревич, С.Ю.

Г951 Краткий курс физики: учебное пособие / С.Ю. Гуревич –
Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – Ч. II. – 234 с.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по технологическим и техническим направлениям подготовки бакалавров и специалистов. Дисциплина «Физика» входит в федеральный компонент цикла общих математических и естественно-научных дисциплин в государственных образовательных стандартах 3-го поколения. Материал пособия ориентирован на курс физики объемом 420–430 часов, или 12 зачётных единиц, при этом объём самостоятельной работы студентов должен составлять 210–220 часов. Содержание пособия соответствует «Примерным программам дисциплины «Физика», утвержденным НМС по физике Минобрнауки РФ 11.02.2009. Приступая к изучению дисциплины «Физика» студент должен знать физику в рамках программы средней школы.

Физика создает универсальную базу для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре, аспирантуре. В пособие в краткой форме изложены основные принципы и положения курса физики, необходимые будущему бакалавру для самостоятельной конструкторской, технологической и организационной работы. Физика является предшествующей дисциплиной при изучении курсов «Теоретическая механика», «Термодинамика», «Сопротивление материалов», «Электротехника и электроника» и др.

УДК 53(07)

© Гуревич С.Ю., 2018

© Издательский центр ЮУрГУ, 2018

ГЛАВА VI. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Тема 14. Магнитное поле в вакууме

§ 1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции

Магнитным полем (от греч. magnetis – камень из Магнесии, древнего города в Малой Азии) называется одна из форм материи, которая проявляется в силовом воздействии на движущиеся электрические заряды, проводники с током и на тела, обладающие магнитными свойствами (например, постоянные магниты). Название «магнитное» поле связывают с опытом Эрстеда (датский физик), в котором было обнаружено ориентирующее действие проводника с током на магнитную стрелку. В отличие от электрического поля, действующего как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды, магнитное поле действует только на движущиеся электрические заряды: электроны проводимости в металлическом проводнике, или электроны, движущиеся в атомах постоянных магнитов. В свою очередь, источниками магнитного поля также являются движущиеся электрические заряды. Таким образом, взаимодействие двух движущихся друг относительно друга электрических зарядов не исчерпывается их электрическим взаимодействием, так как между ними существует еще и магнитное взаимодействие.

Основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Условно считают, что вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в произвольной точке поля совпадает по направлению с силой, которая действует на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку поля. Стрелка должна быть бесконечно малой по двум причинам: 1) она своим полем не должна искажать измеряемого поля; 2) она должна характеризовать поле в точке пространства. Для графического изображения магнитных полей используются линии магнитной индукции. Это – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{B}$ в этих точках поля. За направление линий магнитной индукции принимается направление, образующее острый угол с вектором $\vec{B}$. Плоские сечения магнитных полей некоторых источников представлены на рис. 1.

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током. Вблизи проводников линии магнитной индукции лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Магнитное поле вне соленоида (катушки, у которой $l \gg d$, где l – длина, d – диаметр соленоида) подобно магнитному полю полосового магнита (соленоид от греч. solen – трубка и eidos – вид).

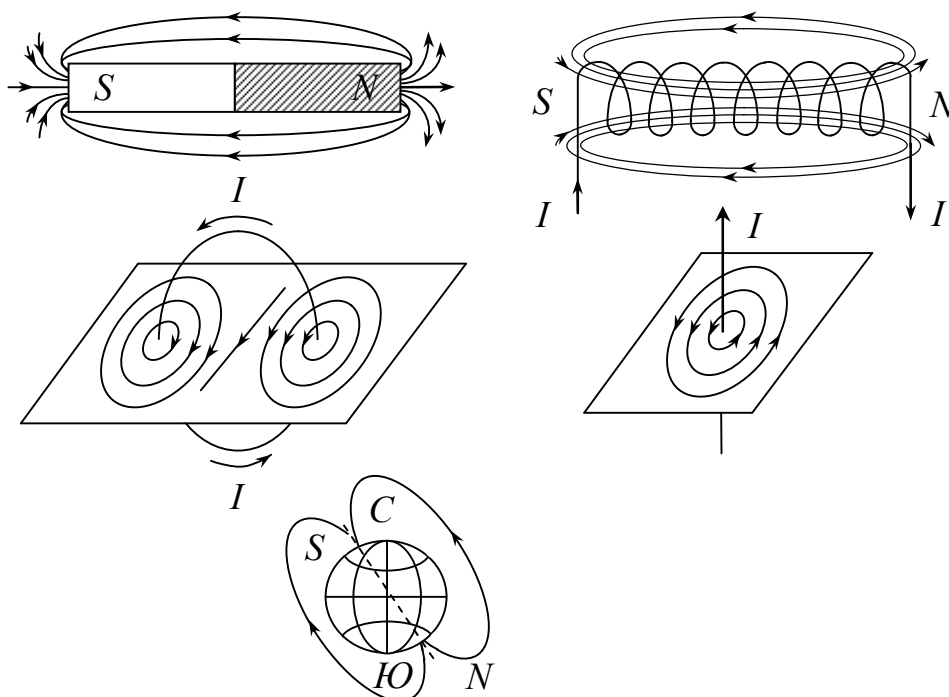


Рис. 1. Магнитные поля некоторых источников

§ 2. Закон Ампера

Проводники с током создают вокруг себя магнитное поле и действуют на находящиеся около них магниты. В свою очередь магнитное поле магнитов действует на проводники с током, поскольку в этих проводниках движутся электрические заряды. Это явление исследовал французский физик Ампер и установил, что электромагнитная сила F , которая действует на прямолинейный проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле, прямо пропорциональна магнитной индукции B , величине тока I в проводнике, его длине l и синусу угла между направлением тока в проводнике и вектором $\vec{B}$ (рис.2):

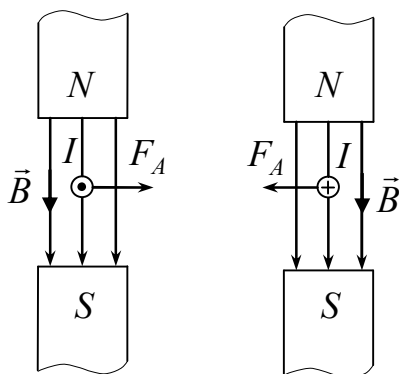


Рис. 2. Действие магнитного поля на проводник с током

$$F_A = BIl \sin \alpha.$$

Закон Ампера легко обобщить на случай неоднородного магнитного поля и проводника произвольной формы и размеров. В самом деле, бесконечно малый элемент dl любого проводника можно считать прямолинейным, а магнитное поле в малой области, занятой элементом dl , можно считать однородным.

Поэтому в общем случае закон Ампера в скалярной форме имеет вид:

$$dF = B dl \sin(\vec{dl} \wedge \vec{B}),$$

где dF – сила, действующая на элемент проводника длиной dl , $d\vec{l}$ – вектор, численно равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с электрическим током. Закон Ампера позволяет определить модуль вектора магнитной индукции. Пусть элемент dl проводника с током I перпендикулярен вектору $\vec{B}$, тогда $\sin(d\vec{l}, \vec{B}) = 1$. В результате закон Ампера можно записать в виде:

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

Отсюда следует, что магнитная индукция численно равна силе, действующей со стороны поля на единицу длины проводника, по которому течет электрический ток единичной величины и который расположен перпендикулярно вектору $\vec{B}$. Таким образом, магнитная индукция $\vec{B}$ является силовой характеристикой магнитного поля, подобно тому, как напряженность $\vec{E}$ является силовой характеристикой электростатического поля.

Последнее выражение дает возможность также определить единицу измерения магнитной индукции, название которой тесла (Тл): 1 Тл – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, по которому течет ток величиной 1 А и который расположен перпендикулярно силовым магнитным линиям. 1 Тл = 1 Н / А·м. Название единицы установлено в честь сербского физика Теслы.

Если элемент $d\vec{l}$ проводника с током перпендикулярен вектору $\vec{B}$, то направление силы $d\vec{F}$ определяется по правилу левой руки. Во всех остальных случаях необходимо пользоваться правилом векторного произведения: вектор $d\vec{F}$ направлен перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ в сторону, откуда вращение от $d\vec{l}$ к $\vec{B}$ по кратчайшему пути происходит против хода часовой стрелки (рис.3). В векторной форме закон Ампера имеет вид:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

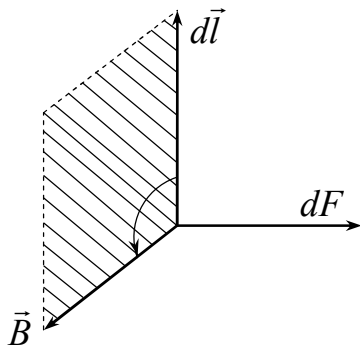


Рис. 3. Векторная диаграмма для закона Ампера

Силы электромагнитного взаимодействия имеют существенную особенность, которая выражена в законе Ампера. По сравнению с силами электростатического взаимодействия, выраженными в законе Кулона и являющимися центральными, силы электромагнитного взаимодействия центральными не являются. Как видно из

рис. 2 сила Ампера не действует по линии, соединяющей магнитные полюсы, но перпендикулярна этой линии. Если кулоновская сила, действующая

на точечный заряд, помещенный в электростатическое поле напряженностью $\vec{E}$, совпадает по направлению с вектором $\vec{E}$ и направлена по касательной к силовой линии электростатического поля, то амперова сила направлена перпендикулярно в данной точке линиям магнитной индукции.

§ 3. Закон Био–Савара–Лапласа

В 1820 году французские физики Био и Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе прямолинейным током, круговым током, катушкой с током и т.д. На основании многочисленных опытов они пришли к следующим выводам:

1) во всех случаях индукция $\vec{B}$ магнитного поля электрического тока пропорциональна величине тока I ;

2) магнитная индукция зависит от формы и размеров проводника с током;

3) магнитная индукция $\vec{B}$ в произвольной точке поля зависит от расположения этой точки по отношению к проводнику с током.

Французский математик Лаплас обобщил экспериментальные результаты Био и Савара с учетом того обстоятельства, что магнитная индукция является векторной величиной. Кроме того, Лаплас высказал важную гипотезу о том, что индукция $\vec{B}$ в каждой точке магнитного поля любого проводника с током представляет собой векторную сумму индукций $d\vec{B}$ элементарных полей, создаваемых каждым участком $d\vec{l}$ этого проводника. Тем самым Лаплас предположил, что при наложении магнитных полей справедлив принцип суперпозиции (наложения). В результате Лаплас получил дифференциальную форму закона Био–Савара–Лапласа (БСЛ):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}].$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м; μ – магнитная проницаемость среды, величина, показывающая во сколько раз индукция поля в данной среде больше, чем в вакууме (для вакуума $\mu = 1$); $d\vec{l}$ – векторный элемент длины проводника с током I ; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента $d\vec{l}$ в рассматриваемую точку поля.

Из закона БСЛ следует, что вектор магнитной индукции в какой-либо точке магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ в сторону, откуда кратчайшее вращение от $d\vec{l}$ к $\vec{r}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 4). Нетрудно видеть, что такое же направление вектора $d\vec{B}$ дает правило правого винта.

Если учесть, что модуль векторного произведения

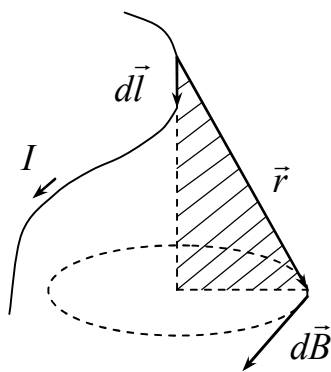


Рис. 4. Магнитное поле элемента проводника с током

$$\left| [d\vec{l}, \vec{r}] \right| = r dl \sin(\angle d\vec{l}, \vec{r}),$$

то численное значение вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl \sin(\angle d\vec{l}, \vec{r})}{r^2}.$$

Наряду с магнитной индукцией $\vec{B}$ вводится другая векторная характеристика магнитного поля – напряженность $\vec{H}$, связанная с $\vec{B}$ следующим соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}.$$

Видно, что напряженность магнитного поля электрического тока не зависит от свойств среды и поэтому позволяет записывать законы электромагнетизма в форме, отражающей только свойства источника магнитного поля, нежели с использованием вектора $\vec{B}$. Например, закон БСЛ с использованием вектора $\vec{H}$ имеет вид:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l}, \vec{r}].$$

Соответственно численное значение вектора $d\vec{H}$:

$$dH = \frac{I dl \sin(\angle d\vec{l}, \vec{r})}{4\pi r^2}.$$

Название единицы измерения напряженности магнитного поля – ампер на метр (А/м).

Сравнение векторных характеристик электростатического ($\vec{E}$ и $\vec{D}$) и магнитного ($\vec{B}$ и $\vec{H}$) полей показывает, что аналогом вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}$ является вектор магнитной индукции $\vec{B}$, так как $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды, в которой создаются поля. В свою очередь аналогом вектора $\vec{D}$ является вектор $\vec{H}$ напряженности магнитного поля, так как оба не зависят от свойств среды.

Закон БСЛ позволяет найти напряженность $\vec{H}$ и индукцию $\vec{B}$ магнитного поля электрического тока, текущего по проводнику конечных размеров и произвольной формы. В соответствии с принципом суперпозиции магнитная индукция $\vec{B}$ в любой точке магнитного поля проводника с током I равна векторной сумме индукций $d\vec{B}$, создаваемых элементами $d\vec{l}$ проводника с током:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B},$$

где l – математический контур, совпадающий в пространстве с проводником с током.

§ 4. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

Пусть часть замкнутой электрической цепи – прямолинейный проводник MN – лежит в плоскости чертежа (рис. 5). Согласно закону БСЛ вектор

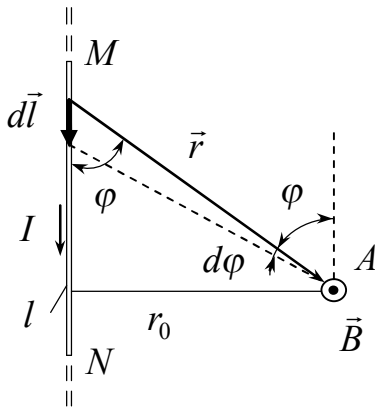


Рис. 5. К расчету магнитного поля прямолинейного проводника с током

магнитной индукции $d\vec{B}$ поля, создаваемого в т. А элементом dl проводника с током I численно равен

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \varphi}{r^2},$$

где φ – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ для всех участков прямолинейного проводника лежат в плоскости чертежа. Поэтому в т. А все векторы $d\vec{B}$, характеризующие магнитные поля, создаваемые отдельными участками проводника, направлены перпендикулярно плоскости чертежа. Это упрощает определение индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля: вектор $\vec{B}$ также направлен перпендикулярно к плоскости чертежа и численно равен интегральной сумме модулей векторов $d\vec{B}$:

индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля: вектор $\vec{B}$ также направлен перпендикулярно к плоскости чертежа и численно равен интегральной сумме модулей векторов $d\vec{B}$:

$$B = \int_l dB = \int_l \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \varphi}{4\pi r^2}.$$

Учитывая, что величины μ_0 , μ и I в процессе интегрирования не изменяются, получаем

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_l \frac{dl \sin \varphi}{r^2}.$$

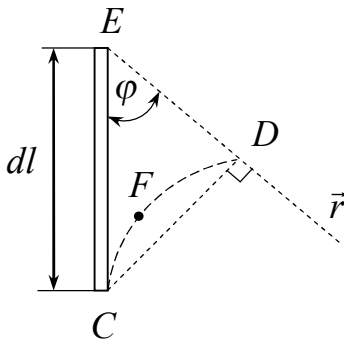


Рис. 6. К связи геометрических параметров

Чтобы произвести интегрирование, выразим dl и r через одну независимую переменную φ . Проведем из точки А дугу окружности CFD , радиус которой, вследствие малости длины dl участка проводника EC , можно считать равным r (рис. 6). По этой же причине угол D при вершине треугольника CDE можно считать прямым. Обозначим через r_0 кратчайшее расстояние от проводника до точки А. Как видно из рис. 5 и рис. 6.

$$r = \frac{r_0}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad dl = \frac{CD}{\sin \varphi}.$$

В то же время $CD = rd\varphi$ (рис.5), так как длина бесконечно малой дуги CFD и длина стягивающей ее бесконечно малой хорды CD равны между собой, поэтому $CFD=CD$ и

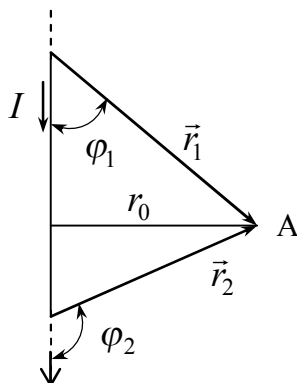


Рис. 7. Положение углов φ_1 и φ_2

$$dl = \frac{rd\varphi}{\sin \varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Тогда

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{r_0} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi.$$

После интегрирования

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

углы φ_1 и φ_2 показаны на рис. 7.

Если проводник бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$, тогда магнитная индукция в любой точке поля такого проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{r_0}.$$

Таким образом, индукция в каждой точке магнитного поля бесконечно длинного проводника с током прямо пропорциональна величине тока и обратно пропорциональна кратчайшему расстоянию от этой точки до проводника.

Напряженность магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r_0}.$$

§ 5. Взаимодействие прямолинейных проводников с током

Рассмотрим два длинных прямолинейных проводника, расположенных параллельно друг другу на расстоянии a (рис. 8). Опыт показывает, что при пропускании по проводникам электрического тока между ними возникают силы взаимодействия.

Если токи I_1 и I_2 в обоих проводниках направлены в одну сторону, то проводники притягиваются друг к другу, а если направления токов взаимно противоположны, то проводники отталкиваются друг от друга. Взаимодействие параллельных токов легко объяснить, если учесть, что каждый из проводников создает магнитное поле, которое силой Ампера действует на другой проводник с током.

По закону Ампера на элемент dl_2 , например, второго проводника с током I_2 действует со стороны магнитного поля первого проводника сила dF_{21} , численно равная

$$dF_{21} = B_1 I_2 dl_2 \sin(\vec{dl}_2, \vec{B}_1),$$

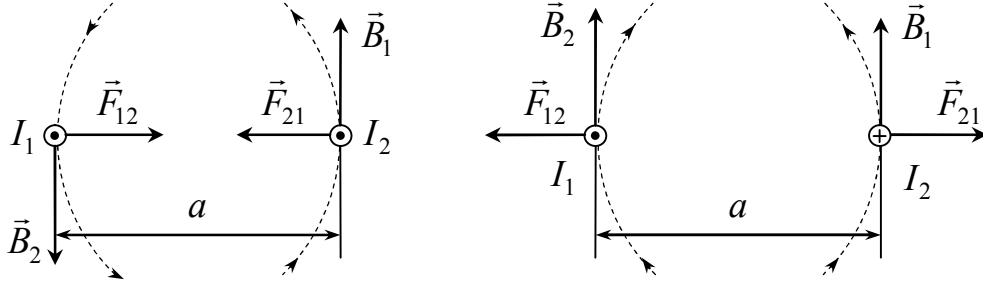


Рис. 8. Взаимодействие параллельных токов

где B_1 – магнитная индукция поля, создаваемая током I_1 первого проводника. Если длина проводников во много раз больше расстояния a между ними, а элемент dl находится вдали от концов проводника, то при определении $\vec{B}_1$ можно считать первый проводник бесконечно длинным. Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{a},$$

причем вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярен элементу $\vec{dl}_2$ второго проводника, поэтому $\sin(\vec{dl}_2, \vec{B}_1) = 1$ и сила

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl_2.$$

Аналогично можно показать, что на участок dl_1 первого проводника действует сила dF_{12} , которая направлена в сторону, противоположную силе dF_{21} и численно равна ей:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl_1.$$

В итоге для обеих сил dF_{21} и dF_{12} можно написать общую формулу:

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl,$$

так как $dl_1 = dl_2 = dl$.

Для нахождения численного значения вектора силы $\vec{F}$, действующей на участок проводника конечной длины l , проинтегрируем последнее выражение от 0 до l :

$$F = \int_0^l dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} l.$$

Последнее выражение дает возможность дать определение единицы величины тока.

В международной системе единиц СИ за единицу величины тока принимается величина такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, находящимся в вакууме на расстоянии 1 метр друг от друга, возникает сила электромагнитного взаимодействия, равная $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины проводника. Название этой единицы – ампер (А).

Если $a = 1$ м, $\mu = 1$ и $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, то $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$.

§ 6. Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент

В электрических машинах, например, в электродвигателе, проводящие контуры с током (статор и ротор) имеют сложную пространственную форму. Для расчета формы и размеров этих контуров сначала необходимо определить параметры элементарного контура с током, например, кругового витка с током.

Вычислим индукцию и напряженность магнитного поля в центре кругового витка радиуса R , по которому протекает ток I (рис. 9). По закону БСЛ магнитная индукция $d\vec{B}$ поля, создаваемого в точке O элементом $d\vec{l}$ витка с током,

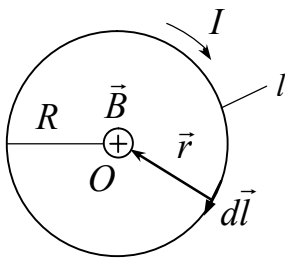


Рис. 9. Магнитное поле кругового тока

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl \underbrace{\sin(\vec{dl}, \vec{r})}_{=1}.$$

Определим направление вектора $\vec{B}$. В рассматриваемом случае радиус-вектор $\vec{r} \perp d\vec{l}$, поэтому вектор $\vec{B}$ направлен так, как показано на рис. 9. По модулю $r = R$, поэтому

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}.$$

Все векторы $d\vec{B}$ магнитных полей, создаваемых в точке O различными участками $d\vec{l}$ кругового витка с током, направлены перпендикулярно плоскости чертежа в соответствии с правилом правого винта. Поэтому индукция результирующего поля в точке O

$$B = \int_l dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0 \mu I}{2R};$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2R}.$$

Отсюда видно, что чем больше радиус витка, тем слабее магнитное поле в его центре.

Чтобы охарактеризовать положение в пространстве кругового витка с током с учётом его магнитных свойств, существует понятие магнитного момента контура с током. Если обозначить через S площадь, охватываемую круговым витком ($S = \pi R^2$), то магнитная индукция в центре кругового витка с током (рис. 10), умноженная и делённая на πR^2

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi R^3} IS.$$

Произведение величины тока I , текущего в витке, и площади S этого витка, называется магнитным моментом p_m витка с током:

$$p_m = IS.$$

Магнитный момент – это векторная величина, направленная вдоль оси витка с током в ту же сторону, что и индукция $\vec{B}$ его магнитного поля, т.е. в сторону, откуда ток в витке виден идущим против хода часовой стрелки (см. рис. 10).

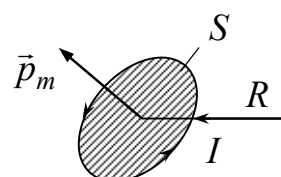


Рис.10. Магнитный момент витка с током

Понятие магнитного момента кругового тока можно распространить на произвольный контур с током (рис. 11):

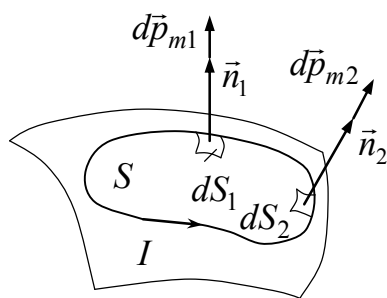


Рис. 11. Магнитный момент контура с током

$$d\vec{p}_m = I \vec{n} dS \text{ и } \vec{p}_m = \int_S d\vec{p}_m = I \int_S \vec{n} dS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к элементарному участку поверхности S , ограниченной контуром.

Очевидно, что в случае плоского контура поверхность S также плоская и все векторы $\vec{n}$ имеют одинаковое направление ($\vec{n} = \text{const}$), поэтому их можно вынести за знак интеграла:

$$\vec{p}_m = I \vec{n} \int_S dS = IS \vec{n},$$

и модуль вектора магнитного момента

$$p_m = IS.$$

§ 7. Закон полного тока

Вычисление индукции магнитных полей, создаваемых различными источниками, значительно упрощается, если использовать так называемый

закон полного тока, основанной на понятии циркуляции вектора $\vec{H}$. В общем случае, циркуляцией некоторого вектора $\vec{T}$ вдоль произвольного замкнутого контура L называется интеграл

$$\oint_L (\vec{T}, d\vec{l}) = \oint_L T dl \cos(\vec{T}, d\vec{l}) = \oint_L T_l dl,$$

где $d\vec{l}$ – векторный элемент длины математического контура L , направленный вдоль направления обхода контура; $T_l = T \cos(\vec{T}, d\vec{l})$.

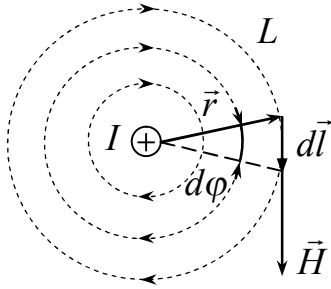


Рис. 12. К циркуляции вдоль силовой линии вектора $\vec{H}$ поля прямого тока

Для формулировки закона сначала вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ напряженности магнитного поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником с током (рис. 12).

В рассматриваемом случае магнитные силовые линии представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны проводнику, а центры лежат на оси проводника. Совместим математический контур L с одной из силовых линий радиуса r , тогда циркуляция вектора $\vec{H}$ напряженности этого

поля вдоль контура L

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_L H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_L H_l dl,$$

где $dl = r d\varphi$; $H_l = H \cos(\vec{H}, d\vec{l})$.

Во всех точках окружности вектор $\vec{H}$ численно равен

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

и направлен по касательной к окружности, поэтому $\cos(\vec{H}, d\vec{l}) = 1$, откуда $H_l = H$ и

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_0^{2\pi} H dl = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r = I.$$

Таким образом, циркуляция вектора $\vec{H}$ магнитного поля прямолинейного тока одинакова вдоль любой силовой линии (не зависит от r) и равна величине тока.

Для сравнения полученного результата с электростатическим полем вспомним, что циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль произвольного замкнутого контура:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L \frac{F}{Q} dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) =$$

$$= \frac{1}{Q} \oint_L \underbrace{F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l})}_{=dA} = \frac{1}{Q} \oint_L dA = 0,$$

так как работа кулоновской силы не зависит от пути перемещения заряда Q и, следовательно, при его перемещении вдоль замкнутого математического контура должна быть равна нулю. Такие силы называются, как известно, консервативными, а поля – потенциальными, таким образом, циркуляция силового вектора является критерием потенциальности поля. Поскольку циркуляция вектора $\vec{H}$ напряженности вектора магнитного поля оказалась отличной от нуля, то магнитное поле не является потенциальным. Такие поля называются вихревыми полями.

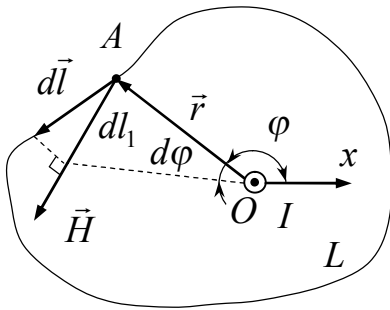


Рис. 13. К циркуляции вектора $\vec{H}$ вдоль произвольного контура

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль замкнутого математического контура L произвольной формы, охватывающего бесконечно длинный прямолинейный проводник с током (рис. 13). В точке A контура L вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ тока I направлен перпендикулярно радиусу-вектору $\vec{r}$. Из рис. 13. видно, что

$$H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = H dl_1,$$

где $dl_1 = dl \cos(\vec{H}, d\vec{l})$ – проекция вектора $d\vec{l}$ на направление вектора $\vec{H}$. В то же время бесконечно малый отрезок dl_1 касательной к окружности радиусом r можно заменить дугой окружности

$$dl_1 = r d\varphi,$$

где $d\varphi$ – центральный угол, под которым виден элемент dl контура L из центра окружности. Тогда

$$H dl_1 = \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{I}{2\pi} d\varphi.$$

Интегрируя вдоль всего замкнутого контура L и учитывая, что при этом угол φ изменяется от 0 до 2π , находим

$$\oint_L H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I.$$

Таким образом, циркуляция вектора $\vec{H}$ вдоль произвольного замкнутого математического контура, охватывающего прямолинейный проводник с током, также равна величине тока в проводнике.

Наконец, вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль произвольного замкнутого математического контура L_1 , не охватывающего проводник с током (рис. 14). В этом случае

$$\oint_{L_1} H_l dl = \int_1^2 H_l dl + \int_2^1 H_l dl = \frac{I}{2\pi} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \right) = 0.$$

Следовательно, циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого математического контура, не охватывающего проводник с током, равна нулю.

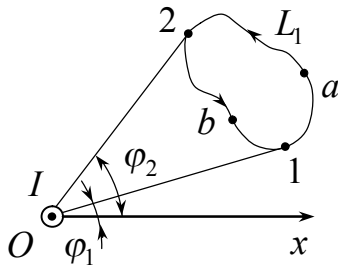


Рис. 14. К циркуляции вектора $\vec{H}$ вдоль произвольного контура, не охватывающего проводник с током

На практике магнитное поле обычно создается несколькими проводниками, по которым текут токи $I_1, I_2, I_3, \dots$. Обозначим напряженности магнитных полей этих токов $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \vec{H}_3, \dots$.

Напряженность $\vec{H}$ результирующего поля в соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i,$$

где N – число проводников с током.

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль произвольного замкнутого математического контура L , мысленно проведенного в магнитном поле:

$$\oint_L H_l dl = \oint_L \sum_{i=1}^N H_{il} dl = \sum_{i=1}^N \oint_L H_{il} dl.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, равен либо I_i , либо нулю

$$\oint_L H_{il} dl = \begin{cases} I_i, & \text{если } L \text{ охватывает } I_i; \\ 0, & \text{если } L \text{ не охватывает } I_i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\oint_L H_l dl = \sum_k I_k,$$

где k – число проводников с током, охватываемых контуром L ($k \leq N$). Поскольку направления токов I_k могут быть противоположными, то и направления векторов $\vec{H}_i$ могут быть противоположными, поэтому сумма токов I_k должна быть алгебраической.

Эта формула является математическим выражением закона полного тока: циркуляция вектора $\vec{H}$ напряженности магнитного поля вдоль произ-

вольного замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром. Для индукции $\oint_L B_l dl = \mu_0 \mu_k S I_k$.

Закон полного тока имеет для расчета магнитных полей постоянного электрического тока такое же значение, как и теорема Остроградского–Гаусса для расчета электростатических полей.

§ 8. Магнитное поле соленоида

Применим закон полного тока для вычисления магнитной индукции поля бесконечно длинной цилиндрической катушки – соленоида (рис. 15). В отношении создаваемого им поля соленоид эквивалентен системе одинаковых круговых токов с общей прямой осью. Кроме того, соленоид симметричен относительно любой перпендикулярной его оси плоскости. Взятые попарно симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, магнитная индукция которого перпендикулярна плоскости (рис. 16). Следовательно, в любой точке внутри и вне соленоида вектор $\vec{H}$ может иметь лишь направление, параллельное оси.

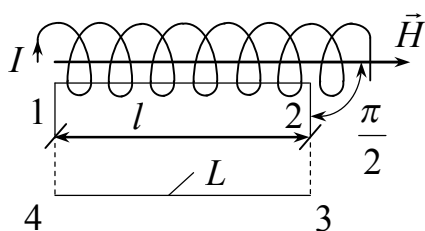


Рис. 15. Магнитное поле соленоида

Для вычисления напряженности $\vec{H}$ магнитного поля соленоида воспользуемся определением циркуляции вектора $\vec{H}$. Выберем прямоугольный контур 1–2–3–4 (см. рис. 15). Циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль этого контура можно представить в виде суммы линейных интегралов:

$$\oint_L H_l dl = \int_1^2 H_l dl + \int_2^3 H_l dl + \int_3^4 H_l dl + \int_4^1 H_l dl.$$

Здесь второй и четвертый интегралы равны нулю, так как вектор $\vec{H}$ перпендикулярен участкам контура 2–3 и 4–1, т.е. $H_l = H \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = 0$. В соответствии с законом полного тока контур, вдоль которого вычисляется циркуляция, является произвольным, в том числе может быть бесконечно протяженным. Поэтому, выбрав участок 3–4 на бесконечном расстоянии от соленоида, где магнитное поле отсутствует, пренебрегаем интегралом по участку 3–4. В итоге, в соответствии с определением циркуляции вектора, получим

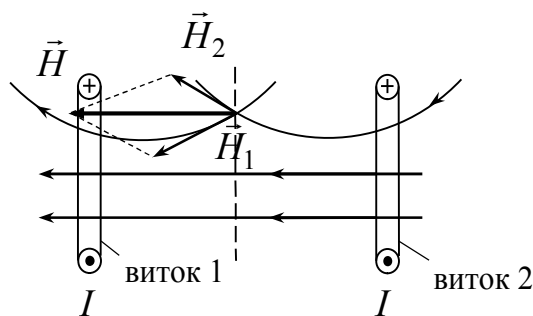


Рис. 16. Структура вектора $\vec{H}$ в соленоиде

$$\oint_L H_l dl = \int_1^2 H_l dl = H \int_1^2 dl = Hl,$$

где $H = H_l$ – напряженность магнитного поля в тех точках, где располагается участок 1–2, l – длина этого участка контура.

Далее вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль контура L в соответствии с законом полного тока. Так как контур произвольный, участок 1–2 может располагаться внутри соленоида на любом расстоянии от его оси. Пусть контур L охватывает проводники, алгебраическая сумма токов в которых

$$\sum_k I_k = NI,$$

где I – ток в соленоиде; N – число витков, охваченных контуром L .

Тогда циркуляция вектора $\vec{H}$ вычисляется так:

$$\oint_L H_l dl = NI.$$

Приравнявая правые части выражений для циркуляции вектора $\vec{H}$, получим

$$Hl = NI.$$

Отсюда видим, что

$$H = \frac{N}{l} I.$$

Так как соленоид – бесконечно длинная катушка, то $N \rightarrow \infty$, поэтому следует использовать величину $n = N/l$, т.е. число витков, приходящиеся на единицу длины соленоида. Тогда $H = \frac{N}{l} I = nI$, или

$$B = \mu\mu_0 H = \mu_0 \mu \cdot nI.$$

Полученный результат не зависит от того, на каком расстоянии от оси внутри соленоида располагается участок 1–2 контура L .

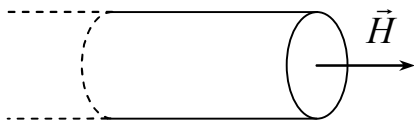


Рис. 17. Магнитное поле на торце соленоида

Таким образом, внутри соленоида напряженность магнитного поля всюду одинакова по величине и направлению, т.е. поле однородно, а вне соленоида поле отсутствует. Поэтому соленоид является устройством, концентрирующим магнитное поле в ограниченной части пространства, причем напряженность $\vec{H}$

магнитного поля прямо пропорциональна величине nI , называемой числом ампер-витков на метр. Если участок 1–2 располагается вне соленоида, то алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром L равна нулю, поэтому

$$\oint_L H_l dl = 0, \quad H = 0 \text{ вне соленоида.}$$

Обе половины соленоида принимают равное участие в создании поля. Поэтому, если половину соленоида удалить, то у торца оставшегося полубесконечного соленоида магнитная напряженность будет равна половине (рис. 17):

$$H = 0,5nI \quad \text{и} \quad B = \mu\mu_0 H = 0,5\mu_0\mu nI.$$

Магнитный момент $\vec{p}_m$ соленоида равен векторной сумме магнитных моментов всех его витков. Ток во всех витках одинаков, их площади равны, а оси совпадают с осью соленоида. Поэтому магнитный момент $\vec{p}_m$ соленоида направлен по оси соленоида и численно равен:

$$p_m = ISN = ISnl,$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида, а nl – общее число витков.

§ 9. Контур с током в магнитном поле

Практический интерес представляет действие магнитного поля на замкнутые проводники с током (проводящие контуры), так как на этом явлении основана работа электрических двигателей. Известно, что прямоугольная рамка с током, находясь в магнитном поле, поворачивается таким образом, что ее плоскость располагается перпендикулярно вектору $\vec{B}$. Изменяя направление тока и расположение полюсов электромагнита, можно убедиться в том, что рамка с током всегда устанавливается во внешнем однородном магнитном поле таким образом, чтобы собственный магнитный момент $\vec{p}_m$ рамки совпадал с направлением вектора $\vec{B}$ магнитной индукции. Таким образом, о направлении магнитного поля можно судить по ориентации в этом поле не только магнитной стрелки, но и рамки с током. Найдем выражение для момента сил, действующих в однородном магнитном поле на прямоугольную рамку с током (рис. 18а).

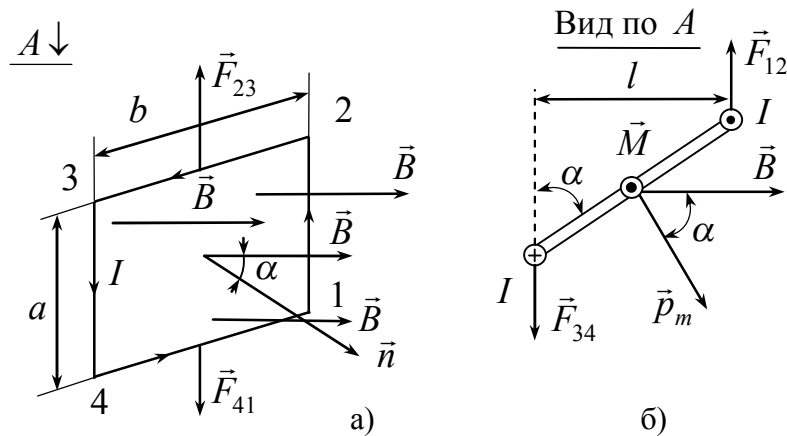


Рис. 18. Рамка с током в магнитном поле

Пусть стороны рамки 2–3 и 1–4 лежат в плоскостях, параллельных векторам $\vec{B}$ индукции магнитного поля, а стороны 1–2 и 3–4 перпендикулярны вектору $\vec{B}$. Силы $\vec{F}_{41}$ и $\vec{F}_{23}$ направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны, поэтому они могут вызвать лишь деформацию рамки. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{34}$ по закону Ампера численно равны (рис. 18б)

$$F_{12} = F_{34} = B I a .$$

Эти силы лежат в плоскости, перпендикулярной оси рамки и направлены в противоположные стороны. Таким образом, эти силы образуют пару сил, момент которой численно равен

$$M = F_{12} l = F_{34} l ,$$

где $l = b \sin \alpha$.

Тогда

$$M = B I a b \sin \alpha = B I S \sin \alpha ,$$

где $S = ab$ – площадь рамки.

Так как $IS = p_m$, а $\alpha = (\vec{p}_m, \hat{\vec{B}})$, то

$$M = p_m B \sin(\vec{p}_m, \hat{\vec{B}}) .$$

Как видно из рис. 18б, вращение рамки под действием пары сил F_{12} и F_{34} происходит вокруг вертикальной оси, которая перпендикулярна плоскости, содержащей векторы $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$, причем вектор $\vec{M}$ направлен в сторону, откуда кратчайшее вращение от $\vec{p}_m$ к $\vec{B}$ видно происходящим против хода часовой стрелки. Совокупность этих трех признаков удовлетворяет определению векторного произведения двух векторов, поэтому

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}] .$$

Из последних формул видно, что если $\sin(\vec{p}_m, \hat{\vec{B}}) = 0$, то вращающий

момент равен нулю. Это возможно, если векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ параллельны или антипараллельны. В первом случае равновесие устойчивое, так как выведение рамки из этого положения приводит к появлению вращающего момента, возвращающего рамку в исходное положение (рис. 19а). Во втором

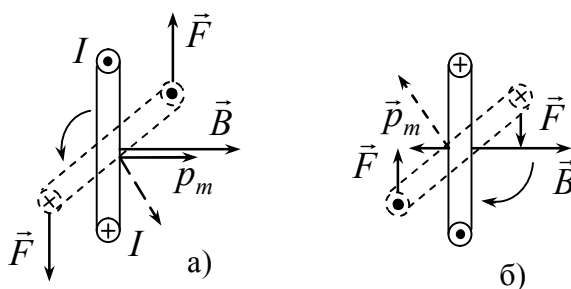


Рис. 19. Вращение рамки с током в магнитном поле

случае, как видно из рис. 19б, положение рамки является неустойчивым. Явление вращения рамки с током в магнитном поле используется при создании электродвигателей, а также при изготовлении электроизмерительных приборов.

§ 10. Магнитный поток

Многие явления и законы электромагнетизма математически выражаются с помощью такого понятия как магнитный поток. Например, закон электромагнитной индукции математически наиболее просто записывается через магнитный поток. Магнитным потоком, или потоком вектора магнитной индукции сквозь элементарную площадку dS называется физическая величина, равная произведению величины этой площадки и проекции B_n вектора $\vec{B}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке dS (рис. 20):

$$d\Phi_m = B_n dS = B dS \cos(\vec{B}, \vec{n}) = (\vec{B}, \vec{n}) dS, |\vec{n}| \equiv 1.$$

Это дифференциальный магнитный поток. Интегрируя последнее выражение по S , получим:

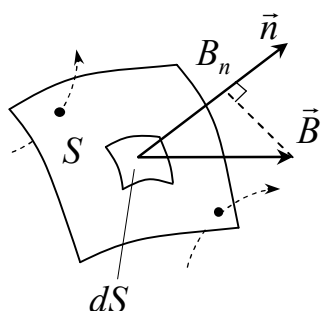


Рис. 20. К понятию магнитного потока

$$\Phi_m = \int_0^{\Phi_m} d\Phi_m = \int_S B_n dS,$$

где Φ_m – интегральный магнитный поток сквозь произвольную поверхность S .

Если поле однородно ($\vec{B} = \text{const}$), а поверхность S плоская ($\vec{n} = \text{const}$) и расположена перпендикулярно полю ($B_n = B$), то

$$\Phi_m = B_n \int_S dS = BS.$$

За единицу магнитного потока, называемую вебер (Вб) (в честь немецкого физика Вебера) в СИ, принимается магнитный поток сквозь плоскую поверхность величиной 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл :

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

Магнитный поток пропорционален числу силовых линий, проходящих сквозь площадку единичной площади и графически представляется густотой силовых линий.

В электромагнетизме доказывается теорема Остроградского–Гаусса для магнитного поля – магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_0^{\Phi_m} d\Phi_m = \oint_S (\vec{B}, \vec{n}) dS = \oint_S B_n dS = 0.$$

Эта теорема является следствием того, что в природе нет магнитных зарядов, и линии магнитной индукции любого источника всегда замкнуты, т.е. число линий, входящих с одной стороны поверхности, равно числу линий, выходящих с другой ее стороны. Кроме того, различие в правых частях теорем для электростатического и магнитного полей объясняется различ-

ной физической природой этих полей: электростатическое поле является потенциальным, а магнитное – вихревым.

В качестве примера рассчитаем магнитный поток Φ_m , создаваемый соленоидом с током I . Магнитная индукция поля внутри соленоида, который содержит сердечник, магнитная проницаемость которого μ ,

$$B = \mu_0 \mu n I.$$

Магнитный поток Φ_i сквозь один виток соленоида площадью S и магнитный поток Φ_m сквозь любое поперечное сечение соленоида S – одна и та же величина, поэтому

$$\Phi_{m_i} = \Phi_m = BS = \mu_0 \mu \cdot nIS = \mu_0 \mu \cdot n p_m.$$

§ 11. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле

Для определения эффективности работы электрических машин, например для определения к.п.д. электродвигателя, необходимо знать, как вычисляется работа, совершённая электродвигателем. Естественно, что в основе способов вычисления этой работы должны лежать формулы для вычисления работы по перемещению в пространстве элементарных объектов, например, проводника и контура с током.

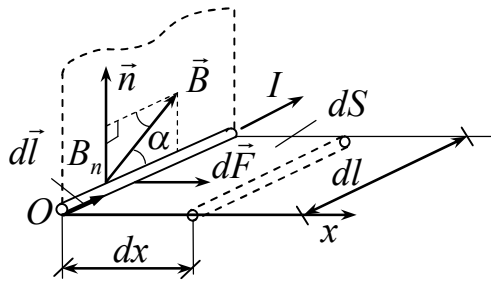


Рис. 21. Перемещение проводника с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, подчиняющиеся закону Ампера. Если проводник не закреплен, то под влиянием сил Ампера он будет перемещаться в магнитном поле. Вычислим работу dA , совершаемую силами Ампера при перемещении элемента dl проводника с током I в магнитном поле. Предположим, что элемент проводника dl перемещается в направлении действующей на него

силы $d\vec{F}$ (рис. 21). В этом случае работа равна произведению численных значений силы $d\vec{F}$ и перемещения dx :

$$dA = dF dx.$$

По закону Ампера

$$dF = B I dl \sin(\vec{dl}, \vec{B}) = B I dl \sin \alpha,$$

где B – индукция магнитного поля.

С учетом этого получим

$$dA = B I \sin \alpha \cdot dl \cdot dx = B I dS \sin \alpha.$$

Сила dF и перемещение dx направлены перпендикулярно элементу проводника $d\vec{l}$. Следовательно, произведение $dl dx$ представляет собой

площадь поверхности, образованной элементом dl проводника при его перемещении на расстояние dx . Так как $B \sin \alpha = B_n$, где B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали n к площади dS , то произведение $B_n dS$ есть дифференциальный магнитный поток сквозь поверхность dS . Поэтому

$$dA = B_n IdS = Id\Phi_m.$$

Если ток I не изменяется, то работа A перемещения проводника

$$A = \int_0^A dA = I \int_0^{\Phi_m} d\Phi_m = I\Phi_m.$$

Таким образом, работа, совершаемая силами Ампера по перемещению в магнитном поле проводника, ток в котором постоянен, равна произведению величин тока и магнитного потока сквозь поверхность, которую образует проводник при своем движении. Другими словами, работа равна произведению величины тока и магнитного потока, пересеченного движущимся проводником.

Найдем выражение для работы, совершаемой силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура, по которому течет постоянный ток I . Пусть в результате бесконечно малого перемещения контур занял новое положение. Контур мысленно разобьем на два соединенных своими концами проводника – левый и правый. Тогда работа по перемещению контура в целом будет представлять собой сумму работ по перемещению левой и правой части контура (рис.22):

$$dA = dA_1 + dA_2.$$

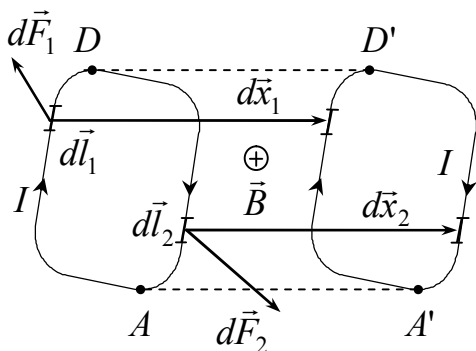


Рис. 22. Перемещение контура с током в магнитном поле

Пусть вектор $\vec{B}$ магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости чертежа, как показано на рис. 22. В этом случае сила $d\vec{F}_1$, действующая на произвольный элемент dl_1 части контура, образует тупой угол с вектором перемещения $d\vec{x}_1$ и работа dA_1 этой силы будет отрицательной. Наоборот, работа dA_2 силы $d\vec{F}_2$ будет положительной, так как сила $d\vec{F}_2$ образует острый угол с вектором перемещения $d\vec{x}_2$. В результате

$$dA = dA_1 + dA_2 = -I d\Phi_{m1} + Id\Phi_{m2} = I(d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1}),$$

где $d\Phi_{m1}$ – магнитный поток сквозь поверхность, образованную движением левой части контура, а $d\Phi_{m2}$ – сквозь поверхность, образованную движением правой части контура.

Из рис. 23 видно, что в результате графического вычитания

$$d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1} = d\Phi_m,$$

где $d\Phi_m$ – разность магнитных потоков, пронизывающих поверхность контура в конечном и в начальном положениях.

Поэтому окончательное выражение для элементарной работы dA примет вид

$$dA = I d\Phi_m.$$

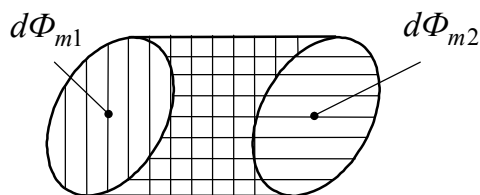


Рис. 23. Графическое представление работы в магнитном поле

Интегрируя это выражение, найдем работу A , совершаемую силами Ампера при любом перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi_m.$$

Работа, совершаемая силами Ампера по перемещению в магнитном поле замкнутого проводящего контура с постоянным током равна произведению величины то-

ка и изменения магнитного потока сквозь поверхности, ограниченные контуром в конечном и начальных положениях. Эта работа совершается за счет запаса энергии источника тока, который создает ток в проводящем контуре.

Полученный нами результат справедлив для контуров любой формы и размеров. Например, в случае перемещения в магнитном поле катушки с током, состоящей из N витков, элементарная работа dA сил Ампера

$$dA = \sum_{i=1}^N dA_i,$$

где dA_i – элементарная работа силы Ампера при перемещении одного i -го витка.

С учетом формулы

$$dA_i = I d\Phi_{mi},$$

получим

$$dA = I \sum_{i=1}^N d\Phi_{mi} = Id \sum_{i=1}^N \Phi_{mi} = Id(N\Phi_{mi}) = Id\Psi,$$

где величина $\Psi = N\Phi_{mi}$ – потокосцепление, обусловленное как внешним магнитным полем, так и магнитным полем тока I в самой катушке, т.е. «сцепляются» два магнитных поля – внешнее и собственное поле катушки с током.

§ 12. Сила Лоренца

Когда давалось определение магнитного поля, то указывалось, что магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные электрические заряды, движущиеся в нем. Экспериментально установлено, что силы, действующие на эти заряды со стороны магнитного по-

ля, направлены перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}$ ($\vec{v}$ – вектор скорости движения заряженной частицы).

Найдем выражение для силы, действующей на электрический заряд, который движется в магнитном поле. По закону Ампера на элемент $d\vec{l}$ проводника с током I , находящийся в магнитном поле индукцией B , действует сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}] = [Id\vec{l}, \vec{B}].$$

Если ток I в проводнике обусловлен движением частиц, заряд которых равен Q , то

$$I = jS; \quad \vec{j} = Qn_0\langle\vec{v}\rangle,$$

где j – плотность тока; S – площадь поперечного сечения проводника; n_0 – концентрация заряженных частиц; $\langle\vec{v}\rangle$ – средняя скорость их упорядоченного движения под действием сторонних сил, например, за счет э.д.с. источника тока. Вспомним, что движение частицы называется упорядоченным, если всегда существует неизменная по времени составляющая скорости частицы.

Последняя формула получена в классической теории электропроводности металлов. В результате можно записать, что

$$Id\vec{l} = Qn_0\langle\vec{v}\rangle Sdl = Q\langle\vec{v}\rangle n_0 dV = Q\langle\vec{v}\rangle dN,$$

где dN – число частиц в объеме проводника dV . Знак вектора $d\vec{l}$ перенесен на $\vec{v}$.

Поэтому сила

$$d\vec{F} = [Q\langle\vec{v}\rangle dN, \vec{B}] = QdN[\langle\vec{v}\rangle, \vec{B}].$$

Поделив обе части уравнения на число частиц dN , найдем силу $\vec{F}_L$, действующую на каждую заряженную частицу

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{F}}{dN} = Q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Здесь символ усреднения скорости опущен, так как вычисляется сила Лоренца, действующая на одну частицу. Это выражение было впервые получено голландским физиком Лоренцем. В нём Q – алгебраическая величина движущегося заряда, т.е. $Q > 0$ для положительных зарядов и $Q < 0$ для отрицательных зарядов. Соответственно в пространстве различаются и силы Лоренца (рис. 24):

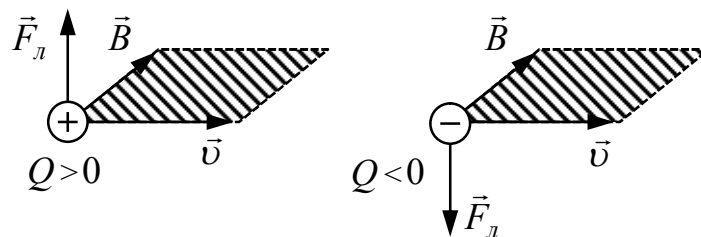


Рис. 24. Действие магнитного поля на движущийся заряд

Как видно, сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости движения заряда и поэтому играет роль центростремительной силы. По этой причине сила Лоренца не совершает работы. Она только изменяет направление движения заряда в магнитном поле; модуль вектора скорости и его кинетическая энергия при этом не изменяются. Модуль силы Лоренца

$$F_L = QvB \sin(\vec{v}, \vec{B}) = QvB \sin \alpha.$$

В общем случае на движущийся электрический заряд, помимо магнитного поля индукцией B , может действовать еще и электрическое поле напряженностью $\vec{E}$. Тогда результирующая сила $\vec{F}$, приложенная к заряду, равна векторной сумме двух сил:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Это выражение называется формулой Лоренца.

§ 13. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

Формула Лоренца позволяет установить ряд закономерностей движения частиц в магнитном поле, лежащих в основе работы различных устройств от электронного осциллографа до ускорителя заряженных частиц. Рассмотрим движение частиц в однородном магнитном поле, при этом будем считать, что на частицы не действуют электрические поля.

1. Пусть заряженная частица движется вдоль линии индукции магнитного поля ($\vec{v} \parallel \vec{B}$). При таком движении частицы угол α между векторами скорости $\vec{v}$ и индукции $\vec{B}$ равен либо нулю, либо π . В том и другом случае сила Лоренца равна нулю так как $\sin 0 = \sin \pi = 0$, т.е. магнитное поле не действует на частицу, и она будет двигаться по инерции равномерно и прямолинейно.

2. Пусть заряженная частица движется перпендикулярно линиям магнитной индукции ($\alpha = \pi/2$). Тогда модуль силы Лоренца

$$F_L = |Q|vB$$

и она направлена перпендикулярно векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Под действием этой силы частица движется в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, причем с позиций механики сила Лоренца представляет собой центростремительную силу, так как она направлена к центру кривизны траектории перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$. Модуль центростремительной силы, как известно,

$$F_{ц.с.} = \frac{mv^2}{R},$$

где m – масса заряженной частицы, а R – радиус кривизны ее траектории.

Приравняв правые части выражений для F_L и $F_{ц.с.}$, видим, что

$$|Q|vB = \frac{mv^2}{R}.$$

Определим радиус кривизны траектории

$$R = \left| \frac{m}{Q} \right| \frac{v}{B} = \frac{v}{B|Q/m|},$$

где $\frac{Q}{m}$ – удельный заряд частицы.

Так как в однородном поле $B = \text{const}$, а численное значение скорости частицы в магнитном поле не изменяется, то радиус кривизны траектории этой частицы есть величина постоянная. Поэтому заряженная частица будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна магнитному полю, а радиус прямо пропорционален скорости частицы и обратно пропорционален произведению ее удельного заряда Q/m и индукции B поля.

Направление силы Лоренца $\vec{F}_L$ и направление вызываемого им отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависит от знака заряда Q частицы (рис. 25). Если частица движется в плоскости чертежа перпендикулярно вектору $\vec{B}$, то при $Q > 0$ частица отклоняется вниз, а при $Q < 0$ – вверх. Таким образом, по характеру отклонения частицы в магнитном поле можно судить о знаке ее заряда.

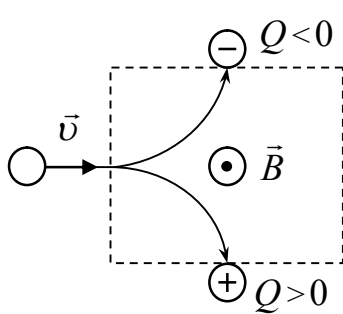


Рис. 25. Отклонение заряженной частицы в магнитном поле

Так как модуль вектора скорости частицы силой Лоренца не изменяется, то ее движение по окружности радиуса R равномерно. Поэтому период обращения частицы:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{Q} \right| = \frac{2\pi}{B|Q/m|}.$$

Период обращения обратно пропорционален произведению индукции магнитного поля и удельного заряда частицы и не зависит от ее скорости. Однако при скоростях $\vec{v}$, близких к скорости света, проявляется зависимость массы частицы от ее скорости и, следовательно, период T будет зависеть от скорости v .

3. Рассмотрим общий случай движения заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда ее скорость $\vec{v}$ направлена под произвольным углом к вектору поля $\vec{B}$. Разложим вектор скорости $\vec{v}$ на две составляющие: параллельную вектору $\vec{B}$ ($\vec{v}_{\parallel}$) и перпендикулярную ему ($\vec{v}_{\perp}$) (рис. 26):

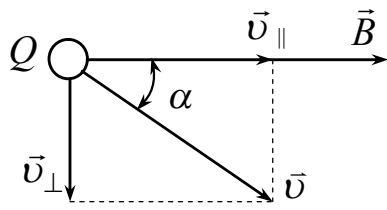


Рис. 26. Движение заряженной частицы в магнитном поле

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha;$$

$$v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Скорость $\vec{v}_{\parallel}$ в магнитном поле не изменяется, а за счет скорости $\vec{v}_{\perp}$ частица должна двигаться по окружности радиусом R , плоскость которой перпендикулярна вектору $\vec{B}$, а радиус

$$R = \left| \frac{m}{Q} \right| \frac{v_{\perp}}{B} = \left| \frac{m}{Q} \right| \frac{v \sin \alpha}{B}.$$

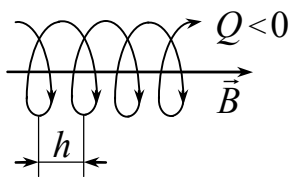


Рис. 27. Винтовая линия движущегося заряда

Частица одновременно участвует в двух движениях: она равномерно вращается со скоростью $\vec{v}_{\perp}$ по окружности радиусом R и движется поступательно со скоростью $\vec{v}_{\parallel}$ в направлении, перпендикулярном плоскости вращения. Поэтому траектория заряженной частицы представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с линией индукции

магнитного поля (рис. 27):

Радиус R витков выражается формулой

$$R = \left| \frac{m}{Q} \right| \frac{v \sin \alpha}{B},$$

а расстояние между соседними витками (шаг винтовой линии):

$$h = \vec{v}_{\parallel} T.$$

Заменяв период T по формуле

$$T = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{Q} \right|,$$

а $\vec{v}_{\parallel}$ по формуле

$$\vec{v}_{\parallel} = v \cos \alpha,$$

получим

$$h = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{Q} \right| v \cos \alpha.$$

Тема 15. Электромагнитное поле

§ 14. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея

Ранее было показано, что электрические токи создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Связь магнитного поля и тока позволила Фарадею решить обратную задачу возбуждения тока в контуре с помощью магнитного поля. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, которое заключается в возникновении э.д.с. индукции в проводящем кон-

туре, магнитный поток сквозь который меняется. Протекающий при этом в контуре электрический ток называется индукционным. Поскольку магнитный поток одновременно прямо пропорционален и индукции магнитного поля и площади поверхности, охватываемой контуром, то индукционный ток в проводящем контуре возникает не только при изменении индукции $\vec{B}$, но и при изменении величины S_n , т.е. проекции площади S поверхности на поверхность, перпендикулярную вектору $\vec{B}$. Фарадей также установил, что величина индукционного тока не зависит от способа изменения магнитного потока, а определяется лишь скоростью его изменения. Таким образом, в соответствии с законом Фарадея, э.д.с. индукции в контуре

$$\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Российский физик Э.Х. Ленц исследовал связь между направлением индукционного тока и характером изменения вызвавшего его магнитного потока и сформулировал правило Ленца: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока. Например, при приближении полосового магнита к замкнутой на гальванометр катушке в ней наводится индукционный ток, который своим магнитным полем препятствует приближению магнита и связанному с этим возрастанию магнитного потока сквозь витки катушки. При удалении магнита индукционный ток препятствует этому удалению. Легко проверить, что внутри контура магнитное поле индукционного тока в первом случае противоположно по направлению магнитному полю магнита, а во втором – совпадает с ним (рис. 28).

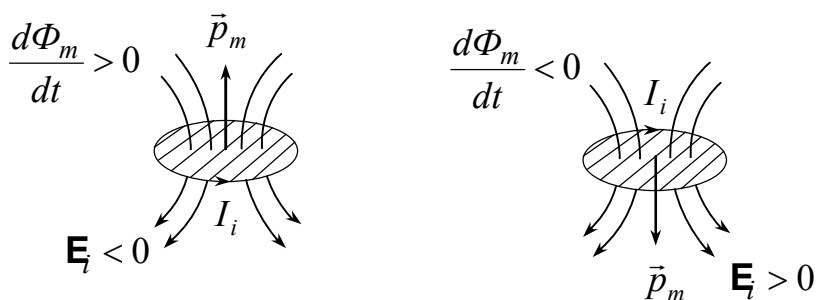


Рис. 28. Индукционные явления в контуре, находящемся в переменном магнитном поле

Условно принято считать э.д.с. электромагнитной индукции в контуре положительной, если магнитный момент $\vec{p}_m$ соответствующего ей индукционного тока образует острый угол с линиями магнитной индукции того поля, которое наводит этот ток. Сопоставив этот результат с законом Фарадея и полагая, что все входящие в него величины измерены в единицах одной и той же системы единиц, получим, что $k = -1$ и э.д.с. индукции

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Эта формула является математическим выражением закона электромагнитной индукции: электродвижущая сила электромагнитной индукции в замкнутом проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

С теоретической точки зрения закон электромагнитной индукции является следствием закона сохранения энергии. Рассмотрим замкнутый проводящий контур, помещенный в неоднородное магнитное поле. Если этот контур включить в цепь источника тока, то под действием сил Ампера незакрепленный контур придет в движение. Элементарная работа dA_1 , совершаемая при перемещении контура с током I за время dt

$$dA_1 = Id\Phi_m,$$

где $d\Phi_m$ – изменение за время dt магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

Работа, совершаемая за то же время по преодолению электрического сопротивления цепи

$$dA_2 = I^2 R dt.$$

Обе работы совершаются за счет запаса энергии источника тока, который совершает работу

$$dA_1 + dA_2 = dA = I\mathbf{E} \cdot dt.$$

Записав закон сохранения энергии, получим

$$I\mathbf{E}dt = Id\Phi_m + I^2 R dt,$$

Откуда, разделив левую и правую части последнего уравнения на dt , получим

$$I = \frac{\mathbf{E} - \left(\frac{d\Phi_m}{dt} \right)}{R} = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}_i}{R},$$

где

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Таким образом, при изменении магнитного потока, проходящего сквозь проводящий контур, в последнем возникает добавочная э.д.с. индукции помимо э.д.с. источника тока.

Если контур, в котором индуцируется э.д.с., состоит не из одного витка, а из N одинаковых витков, то он представляет собой соленоид или тороид. Поскольку витки соленоида соединены последовательно, э.д.с. индукции $\mathbf{E}$ будет равна сумме э.д.с., индуцируемых в каждом витке в отдельности:

$$\mathbf{E}_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_{mi}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \Phi_{mi} \right).$$

Так как все витки одинаковы, то магнитный поток сквозь каждый виток в любой момент времени также будет одинаков, поэтому

$$\sum_{i=1}^N \Phi_{mi} = N\Phi_m = \Psi,$$

где Ψ – потокосцепление. В результате для многовиткового контура

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \Phi_m \right) = -\frac{d}{dt} N\Phi_m = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

§ 15. Электромагнитная индукция в движущемся проводнике

Работа генератора электрического тока основана на явлении электромагнитной индукции. Для расчета конструкции такого генератора необходимо знать механизм возникновения э.д.с. индукции в проводнике простейшей формы.

Рассмотрим прямолинейный металлический проводник длиной l , который движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ в плоскости xOy , перпендикулярной вектору $\vec{B}$. При этом на электроны проводимости проводника действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = Q[\vec{v}, \vec{B}]$$

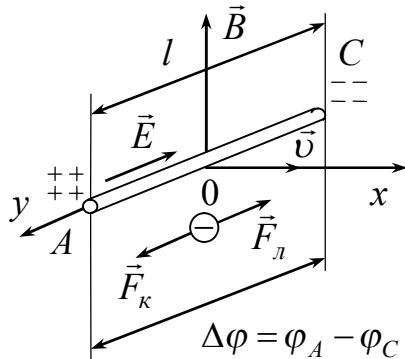


Рис. 29. Индукционные явления в движущемся в магнитном поле отрезке проводника

в направлении, указанном на рис. 29. В результате электроны сместятся вдоль проводника от т. A к т. C , поэтому в части C проводника возникает избыточный отрицательный заряд, а в части A , где будет иметь место недостаток электронов, возникнет избыточный положительный заряд. В проводнике возникает электрическое поле, направление напряженности $\vec{E}$ которого показана на рис. 29, и которая численно равна

$$E = -\text{grad}\phi = \frac{\phi_A - \phi_C}{l} = \frac{\Delta\phi}{l}.$$

На электроны будет действовать кулоновская сила, численно равная

$$F_k = QE,$$

направление которой противоположно силе Лоренца. При равенстве модулей этих сил дальнейшее движение электронов по проводнику прекратится. Поэтому для состояния механического равновесия каждого электрона относительно проводника получим

$$QE = QvB,$$

или

$$\frac{\Delta\varphi}{l} = vB, \quad \Delta\varphi = Blv.$$

Из закона Ома для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{\mathbf{E} + (\varphi_A - \varphi_C)}{R}$$

следует, что при $I = 0$ разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = -\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – э.д.с., приложенная в цепи, т.е. в проводнике AC .

Так как на участке AC источников тока нет, то возникающая в проводнике э.д.с. есть э.д.с. индукции $\mathbf{E}_i$. Заменяв разность потенциалов $\Delta\varphi$ на $\mathbf{E}_i$, получим

$$\mathbf{E}_i = -Blv.$$

Поскольку скорость v движения проводника вдоль оси Ox равна $\frac{dx}{dt}$, то

$$\mathbf{E}_i = -Bl \frac{dx}{dt}.$$

Произведение $l dx = dS$ и представляет собой площадь поверхности, описываемой проводником при его движении за время dt , а $BdS = d\Phi_m$ – магнитный поток сквозь эту поверхность. Следовательно, э.д.с. индукции выражается формулой

$$\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Таким образом, источника тока в проводнике AC нет, а э.д.с. есть, то есть в проводнике возникает стороннее электрическое поле. Так называется электрическое поле, возникающее в проводниках и замкнутых проводящих контурах в отсутствие источников тока. Это поле не следует путать с полем сторонних (некулоновских) сил, так как в данном случае роль сторонних сил играют силы Лоренца.

§ 16. Э.д.с. индукции в проводящем контуре, вращающемся в магнитном поле

Ранее было выяснено поведение проводящей рамки с током в магнитном поле, т.е. рассмотрено преобразование электрической энергии в механическую. Рассмотрим обратную задачу преобразования механической энергии в электрическую на основе явления электромагнитной индукции. Пусть плоская одновитковая рамка вращается в однородном магнитном поле ($\vec{B} = \text{const}$) равномерно с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ (рис. 30).

Магнитный поток, проходящий сквозь рамку площадью S , в любой момент времени t

$$\Phi_m = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где $\alpha = \omega t$ – угол поворота нормали $\vec{n}$ к рамке в момент времени t (начало отсчета времени выбрано так, что при $t = 0$ $\alpha = 0$).

При вращении рамки в ней будет возникать переменная э.д.с. индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = BS\omega \sin \omega t,$$

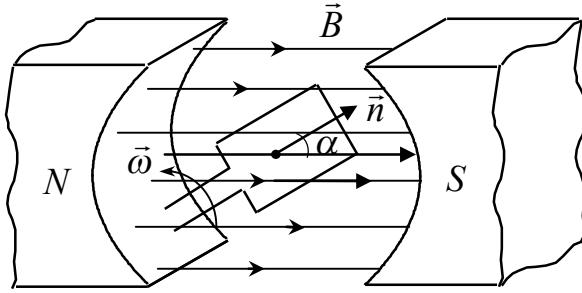


Рис. 30. Вращение рамки в магнитном поле

изменяющаяся со временем по гармоническому закону. При $\sin \omega t = 1$ э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ максимальна, т.е.

$$\mathcal{E}_{\max} = BS\omega.$$

С учетом последнего выражения э.д.с. индукции в рамке

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t.$$

Таким образом, если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней

возникает переменная э.д.с., изменяющаяся по гармоническому закону. На этом явлении основан принцип работы генераторов электрического тока.

§ 17. Магнитный поток самоиндукции. Индуктивность проводящего контура

Любой проводник с током создает магнитное поле. Чтобы различать внешний по отношению к этому проводнику магнитный поток и собственный магнитный поток самого проводника с током, последний называют поток самоиндукции. Например, собственное магнитное поле одновиткового проводящего контура l создает магнитный поток самоиндукции Φ_{mc} сквозь поверхность, ограниченную этим контуром (рис. 31):

$$\Phi_{mc} = \int_S B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля на нормаль к элементу dS поверхности S . Это – определение магнитного потока самоиндукции в математической форме.

Вычислим магнитный поток самоиндукции. По закону БСЛ магнитная индукция $d\vec{B}$ в точке, находящейся на расстоянии r от элемента $d\vec{l}$ контура с током I ,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}],$$

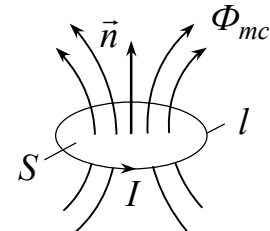


Рис. 31. Собственное магнитное поле контура с током

откуда

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}],$$

где интегрирование распространяется на всю длину контура l . Здесь математический и проводящий контуры совпадают.

Проекция векторной суммы $\vec{B}$ на некоторое направление равна алгебраической сумме проекций на это же направление всех составляющих векторов. Поэтому

$$B_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]_n,$$

где $[d\vec{l}, \vec{n}]_n$ – проекция векторного произведения $[d\vec{l}, \vec{n}]$ на направление нормали к элементу dS поверхности S , ограниченной контуром l .

В результате магнитный поток самоиндукции можно вычислить так:

$$\Phi_{mc} = \int_S \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]_n \right\} dS,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала вектора $d\vec{l}$ в центр элемента dS поверхности S .

Величина тока I в контуре не зависит от S , а $\mu_0/4\pi$ есть постоянная величина, поэтому

$$\Phi_{mc} = I \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]_n,$$

или

$$\Phi_{mc} = LI,$$

где

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]_n.$$

Последнее выражение позволяет вычислить так называемую статическую (так как $I = \text{const.}$) индуктивность L (или просто индуктивность) проводящего контура. Здесь предполагается так же, что $\mu = \text{const.}$

Индуктивностью проводящего контура называется физическая величина, численно равная магнитному потоку самоиндукции контура, по которому течет ток величиной, равной единице.

Из последнего выражения следует, что индуктивность контура зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости среды, в которой он находится. В этом отношении индуктивность контура является аналогом электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды.

В СИ за единицу индуктивности, называемую генри (Гн) в честь американского физика Генри, принимается индуктивность такого проводящего контура, магнитный поток самоиндукции которого равен 1 Вб при величине тока 1 А:

$$1\text{Гн} = \frac{1\text{Вб}}{1\text{А}}.$$

Вспомним, что магнитная постоянная μ_0 выражается через генри:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Вычислим индуктивность соленоида длиной l , площадью поперечного сечения S , содержащего N витков. В соответствии с определением индуктивности для многovitкового контура

$$L = \frac{N\Phi_{mc}}{I} = \frac{\Psi}{I},$$

где Φ_{mc} – магнитный поток сквозь площадь S , создаваемый одним витком:

$$\Phi_{mc} = B_n \cdot S = B \cdot S.$$

Магнитная индукция B поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 \mu n I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I.$$

В результате индуктивность соленоида вычисляется так:

$$L = \frac{N\Phi_{mc}}{I} = \frac{N}{I} \mu_0 \mu \frac{N}{l} IS = \mu_0 \mu \left(\frac{N}{l} \right)^2 lS = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где V – объем соленоида.

Из этой формулы видно, что индуктивность соленоида зависит только от его размеров и формы, а также от магнитных свойств сердечника соленоида.

§ 18. Явление самоиндукции

В предыдущем параграфе был рассмотрен магнитный поток самоиндукции проводящего контура, ток в котором не изменяется. Выясним, что произойдет, если электрический ток в этом же контуре будет меняться. Очевидно, что изменяющийся ток создает в контуре меняющийся магнитный поток самоиндукции, и в контуре, по закону электромагнитной индукции, возникает э.д.с. самоиндукции $\mathbf{E}_c$.

Возникновение э.д.с. индукции в проводящем контуре вследствие изменения магнитного потока, создаваемого меняющимся током в этом же контуре, называется самоиндукцией. Э.д.с. в этом случае называется электродвижущей силой самоиндукции:

$$\mathbf{E}_c = -\frac{d\Phi_{mc}}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Под действием э.д.с. самоиндукции появляется дополнительный индукционный ток, который по правилу Ленца противодействует изменению величины первичного тока в цепи: замедляет его возрастание или убывание. Э.д.с. самоиндукции и индукционный ток при прочих равных условиях прямо пропорциональны индуктивности контура. Таким образом, по физическому смыслу индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока в нем.

Определим закон изменения тока в электрической цепи, индуктивность которой равна L , а электрическое сопротивление равно R . В соответствии с законом Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}_i}{R},$$

где $\mathbf{E}$ – алгебраическая сумма э.д.с. источников тока, включенных в цепь, а $\mathbf{E}_i$ – э.д.с. индукции.

Если внешнее магнитное поле постоянно, то индукционные явления в неподвижной электрической цепи обусловлены только изменением тока, вызванным, например, замыканием или размыканием цепи, поэтому

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt},$$

откуда

$$I = \frac{\mathbf{E} - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Последнее выражение представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; перепишем его в виде

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathbf{E} - IR}{L}; \quad \frac{dI}{\mathbf{E} - IR} = \frac{1}{L} dt.$$

Умножим левую и правую часть полученного выражения на $-R$, одновременно в левой части выражения внесем под знак полного дифференциала постоянную величину $\mathbf{E}$:

$$\frac{d(\mathbf{E} - IR)}{\mathbf{E} - IR} = -\frac{R}{L} dt.$$

В результате интегрирования получившегося выражения имеем

$$\ln(\mathbf{E} - IR) = -\frac{R}{L} t + \ln C.$$

После потенцирования этого выражения получим

$$\mathbf{E} - IR = Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Для определения постоянной C воспользуемся начальными условиями. Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ величина тока в цепи составляет I_0 . Тогда при $t = 0$

$$\mathbf{E} - I_0 R = C.$$

Подставляя полученное выражение в формулу связи между величиной тока I и временем t , получим

$$\mathbf{E} - IR = (\mathbf{E} - I_0 R) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}; \quad \mathbf{E} - IR = \mathbf{E} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - I_0 R \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В итоге зависимость величины тока I от времени t примет вид

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathbf{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

§ 19. Ток при замыкании и размыкании электрической цепи, содержащей L и R

Определим зависимость величины тока в электрической цепи от времени при подключении в эту цепь и отключении от нее источника постоянного тока, э.д.с которого равна $\mathbf{E}$ (рис. 32).

1. Подключение источника тока ($I_0 = 0$). Этому соответствует положение 1 ключа K . В этом случае

$$I = \frac{\mathbf{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{\mathbf{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

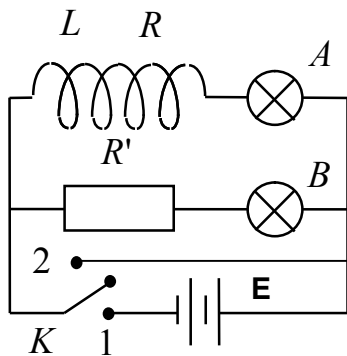


Рис. 32. Электрическая схема для демонстрации изменения величины тока во времени в цепях с индуктивностью

Здесь величина $\tau = L/R$ носит название постоянной времени. Постоянная времени численно равна отрезку времени, в течении которого величина тока изменяется в « e » раз. График полученной функции представлен на рис. 33.

Как видно, ток в цепи увеличивается от нуля до $\mathbf{E}/R$, причем нарастание тока происходит тем быстрее, чем меньше постоянная времени, т.е. чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

Это явление можно наблюдать на опыте с использованием электрической схемы, изображенной на рис. 32. При замыкании ключа K в положение 1 ток в лампе B устанавливается практически мгновенно, а в лампе A он возрастает постепенно.

2. Выключение источника тока ($\mathbf{E} = 0$). Этому соответствует положение 2 ключа K . В этом случае для верхнего участка цепи, содержащего индуктивность L

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

График полученной функции представлен на рис. 34.

Ток в цепи уменьшается от начального значения I_0 до нуля, причем тем быстрее, чем меньше постоянная времени. При отключении источника тока с помощью ключа K (положение 2) лампа B гаснет мгновенно, а лампа A — постепенно. Размыкание цепи соответствует резкому возрастанию э.д.с. самоиндукции в цепи, и индукционный ток значительно превышает ток, созданный источником тока. Например, первичный ток от э.д.с. источника тока составляет 5А. За время размыкания электрической цепи $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$ с ток уменьшился до нуля. В результате средняя э.д.с. самоиндукции пропорциональна

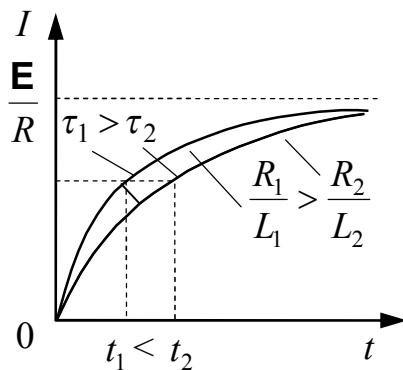


Рис. 33. График изменения величины тока при замыкании цепи

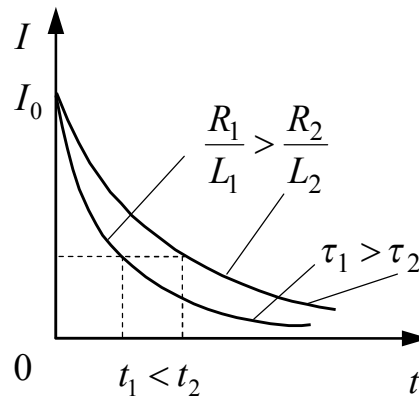


Рис. 34. График изменения величины тока при размыкании цепи

$$\langle E_c \rangle \sim \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{5 - 0}{1 \cdot 10^{-2}} = 500,$$

то есть может превысить э.д.с. источника тока в 500 раз. Соответственно и ток самоиндукции увеличился во столько же раз. Поэтому цепь, содержащую значительную индуктивность, нельзя резко размыкать, так как это приводит к выходу из строя электроизмерительных приборов.

§ 20. Энергия магнитного поля

Силы магнитного поля, например сила Ампера, перемещают в пространстве проводники с током, т.е. совершают работу, поэтому магнитное поле обладает энергией. Естественно предположить, что энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается источником электрического тока на создание этого поля. Вычислим эту работу.

Рассмотрим проводящий контур индуктивностью L , по которому течет ток I . С этим контуром сцеплен магнитный поток $\Phi_{mc} = LI$, причем при изменении тока на dI магнитный поток изменяется на $d\Phi_{mc} = LdI$. Однако для изменения магнитного потока на величину $d\Phi_{mc}$ необходима работа.

$$dA = Id\Phi_{mc} = LI dI ,$$

которая совершается за счет запаса энергии источника тока.

Работа по созданию магнитного потока Φ_{mc}

$$A = \int_0^A dA = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, созданного контуром индуктивностью L

$$E_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Энергию магнитного поля можно представить как функцию величин, характеризующих это поле, т.е. как функцию B , H и μ . Для этого рассмотрим частный случай – однородное магнитное поле внутри соленоида. Поскольку индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V ,$$

а величина тока связана с напряженностью магнитного поля соотношением

$$H = nI , \quad I = \frac{H}{n} ,$$

то, подставляя последние формулы в выражение для вычисления энергии магнитного поля, получим

$$E_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \cdot n^2 V \frac{H^2}{n^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \cdot H^2 V = \frac{BH}{2} V .$$

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной объемной плотностью

$$w = \frac{E_m}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu \cdot H^2}{2}.$$

Последнее выражение справедливо только для сред, которым присуща линейная зависимость B от H ; это слабомагнитные среды – диа- и парамагнетики.

§ 21. Основы теории Максвелла электромагнитного поля.

Первое уравнение Максвелла

С помощью силы Лоренца можно объяснить возникновение индукционного тока в проводниках, движущихся в магнитном поле. Согласно закону Фарадея, возникновение э.д.с. электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного проводящего контура, находящегося в переменном магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение э.д.с. индукции. Теоретическое обоснование этого явления дал Максвелл.

Он предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем его пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводящем контуре, находящимся в этом поле.

Найдем связь между напряженностью $\vec{E}$ электрического поля и изменением магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную математическим контуром L . Во-первых, в соответствии с определением э.д.с. в данном случае

$$\mathbf{E}_i = \oint_L (\vec{E}_{cm}, d\vec{l}).$$

Здесь математический контур L совпадает с проводящим. В проводящем контуре $\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{cm}$, где $\vec{E}_k$ – напряженность электростатического поля, поэтому

$$\mathbf{E}_i = \oint_L (\vec{E} - \vec{E}_k, d\vec{l}) = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) - \oint_L (\vec{E}_k, d\vec{l}).$$

В силу потенциальности электростатического поля

$$\oint_L (\vec{E}_k, d\vec{l}) = 0,$$

поэтому

$$\mathbf{E}_i = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Магнитный поток Φ_m сквозь поверхность, ограниченную контуром, может изменяться по ряду причин – благодаря изменению формы контура и его расположения в магнитном поле, а так же вследствие изменения магнитной индукции $\vec{B}$ со временем. Полная производная $d\Phi_m / dt$ учитывает влияние обеих причин. В случае неподвижного ($\vec{n} = \text{const}$) и не деформируемого ($S = \text{const}$) контура, когда нет сил Лоренца, необходимо знать зависимость магнитной индукции $\vec{B}$ только от времени, т.е. вместо $d\Phi_m / dt$ брать в расчет частную производную $\partial\Phi_m / \partial t$. Поэтому, во-вторых, э.д.с. индукции в неподвижном замкнутом контуре в соответствии с законом электромагнитной индукции равна

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}.$$

В результате, приравняв правые части выражений для $\mathbf{E}_i$, получим

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}.$$

Таким образом, электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем является вихревым – циркуляция его вектора напряженности вдоль замкнутого проводящего контура отлична от нуля.

В соответствии с определением магнитного потока

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S B \cos(\vec{B}, \vec{n}) dS.$$

Так как $|\vec{n}| = n = 1$, то

$$\Phi_m = \int_S B \cdot \vec{n} \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) dS = \int_S (\vec{B}, \vec{n}) dS.$$

Поэтому получим, что

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, \vec{n}) dS.$$

Здесь S – произвольная поверхность, опирающаяся на контур L .

Так как контур L и связанная с ним поверхность S неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами. В результате

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n} \right) dS.$$

Полученное выражение называется первым уравнением Максвелла в интегральной форме. Оно описывает физическое явление, при котором переменное магнитное поле всегда порождает в пространстве вихревое электрическое поле.

§ 22. Второе уравнение Максвелла. Ток смещения

Максвелл предположил, что аналогично предыдущим рассуждениям всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем его пространстве вихревого магнитного поля. Поскольку исторически первым источником изучаемого магнитного поля явился электрический ток, то, по аналогии, Максвелл назвал переменное электрическое поле, возбуждающее магнитное поле, также электрическим током, но, в отличие от тока проводимости, добавил слово «смещение». В результате получился ток смещения $I_{см}$. Такое моделирование позволило Максвеллу сохранить математическую форму уже известных законов Ампера, БСЛ и других, которые выражаются через ток I . Далее Максвелл обобщил закон полного тока, распространив его на токи смещения.

Во-первых, по определению и по теореме Остроградского–Гаусса электрический поток вектора $\vec{D}$

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \sum_i Q_i,$$

где Q_i – свободные заряды, например, заряды на обкладках конденсатора.

Если существует переменное электрическое поле, то должна быть отлична от нуля первая производная от величины зарядов, создающих это поле. Вычислим первую производную по времени от этого выражения:

$$\frac{d}{dt} \sum_i Q_i = \frac{d}{dt} \oint_S D_n dS = \oint_S \frac{d}{dt} D_n dS.$$

Если поверхность S неподвижна и не деформируется, то можно перейти к частной производной под знаком интеграла, как в первом уравнении Максвелла:

$$\oint_S \frac{dD_n}{dt} dS = \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS.$$

В результате

$$\frac{d}{dt} \sum_i Q_i = \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS,$$

где

$$\frac{d}{dt} \sum_i Q_i = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} = \sum_i I_{icm} = I_{cm}.$$

В итоге получается, что, в соответствии с понятием тока смещения

$$I_{cm} = \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS,$$

где $\partial D_n / \partial t$ - переменное электрическое поле.

Поскольку, во-вторых по определению ток в проводнике $I = dQ/dt$, а через плотность $\vec{j}$ тока величина тока

$$I = \int_S j_n dS,$$

то, сравнивая полученные выражения, видим, что величина $\partial D_n / \partial t$ имеет размерность плотности тока, но она обусловлена не движением свободных электрических зарядов, а изменением во времени электрического поля. Максвелл назвал величину $\partial \vec{D} / \partial t$ плотностью тока смещения:

$$\vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Как видно, эта величина численно равна скорости изменения вектора электрической индукции в какой-либо точке пространства и направлена в ту же сторону, что и вектор $\partial \vec{D} / \partial t$.

Током смещения сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смеще-

ния сквозь эту поверхность. Отсюда следует, что ток смещения можно вычислить так:

$$I_{см} = \int_S (\vec{j}_{см})_n dS = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial D_n}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial D_n}{\partial t} S = \frac{\partial(D_n S)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}.$$

С помощью представления о токе смещения Максвелл обосновал замкнутость цепей переменного электрического тока. До Максвелла существовало определенное противоречие, которое заключалось в следующем. При зарядке и разрядке конденсатора по электрической цепи протекает электрический ток. В то же время зазор между пластинами конденсатора не является проводящим, т.е. получается, что электрический ток протекает по незамкнутой цепи.

С точки зрения теории Максвелла, цепи любых непостоянных токов замкнуты, причем замкнутость таких цепей обеспечивается токами смещения, которые в форме переменного электрического поля как бы протекают по непроводящим участкам цепи (рис. 35).

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся электрическое поле. Следовательно, он существует и внутри проводника, по которому течет меняющийся электрический ток. Однако внутри проводников $I_{см}$ обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Максвелл обобщил закон полного тока, добавив в его правую часть ток смещения:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_k I_k + I_{см} = \sum_k I_k + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}.$$

Это выражение называется вторым уравнением Максвелла в интегральной форме.

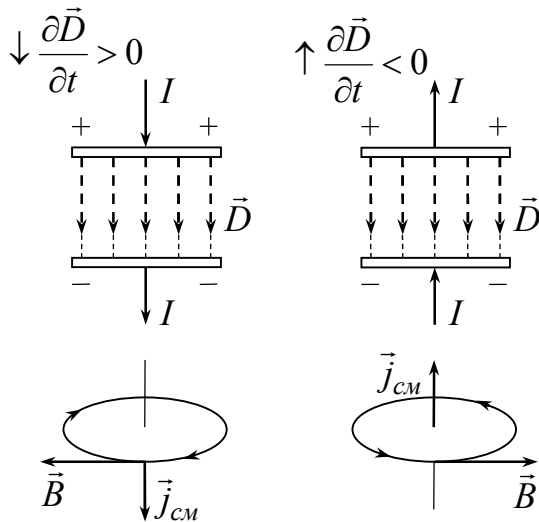


Рис. 35. Токи смещения при заряде и разряде конденсатора

Если токи проводимости, конвекционные токи, обусловленные движением одиночных зарядов и все э.д.с., кроме э.д.с. электромагнитной индукции, отсутствуют, то оба уравнения имеют симметричный вид:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}.$$

Из сравнения этих уравнений можно сделать следующие выводы.

1. Между электрическим и магнитными полями существует тесная взаимосвязь — изменение во времени электрического поля вызывает появление магнитного поля, а переменное

магнитное поле является источником вихревого электрического поля.

2. Знаки при скоростях изменения магнитного и электрического потоков различны. Это различие соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца. В случае одинаковых знаков при $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ увеличение одного из полей вызвало бы увеличение другого поля и, далее, неограниченное возрастание обоих полей, а уменьшение одного из полей влекло бы за собой полное исчезновение этих полей. Различие знаков при $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в правых частях уравнений Максвелла является необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла являются наиболее общими интегральными уравнениями для электрических и магнитных полей в покоящихся относительно данной системы отсчета средах. Они играют в теории электромагнетизма такую же роль, как законы Ньютона в механике.

Как мы увидим в главе IX, согласно принципу относительности Эйнштейна механические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, т.е. описываются одинаковыми уравнениями. Из этого принципа вытекает, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл. Так, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, движутся относительно другой и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично, неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает относительно этих систем вихревое электрическое поле. Таким образом, теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а так же теория относительности Эйнштейна приводит к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующихся на представлении о едином электромагнитном поле.

Уравнения Максвелла описывают огромную область физических явлений. Они лежат в основе электротехники и радиотехники и играют важную роль в развитии таких актуальных направлений современной физики как физика плазмы и управляемый термоядерный синтез, магнитная гидродинамика, нелинейная оптика, астрофизика и другие. Уравнения Максвелла неприменимы лишь при больших частотах электромагнитных волн, когда становятся существенными квантовые эффекты, т.е. когда энергия отдельных квантов электромагнитного поля — фотонов — велика и в процессах участвует сравнительно небольшое число фотонов.

ГЛАВА VII. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 23. Магнитные моменты электронов и атомов

Для выяснения причины различия магнитных свойств сред и их влияния на величину индукции магнитного поля необходимо изучить процессы, происходящие в веществе под действием внешнего магнитного поля. В любом веществе, находящемся в магнитном поле, возникает особое состояние намагниченности и создается внутреннее магнитное поле, обусловленное взаимодействием атомов и молекул вещества с внешним магнитным полем.

Сначала рассмотрим, какое магнитное поле создает один электрон, входящий в состав атома, находящегося вне магнитного поля. Согласно представлениям классической физики электроны в атомах движутся по круговым орбитам. Такое движение каждого электрона эквивалентно замкнутому контуру тока, поэтому любой атом или молекулу можно рассматривать как некоторую совокупность электронных (или молекулярных)

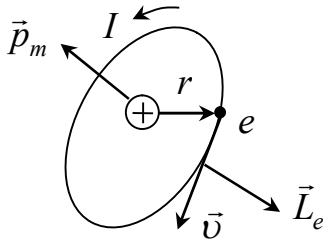


Рис. 36. Классическое движение электрона по орбите

микротоков. В этом заключается гипотеза Ампера о природе магнетизма. Рассмотрим движение электрона по орбите радиуса r (рис. 36), при этом частота вращения равна ν . Как м.т. электрон обладает орбитальным механическим моментом импульса $\vec{L}_e$, а как электрический заряд — орбитальным магнитным моментом $\vec{p}_m$, так как движущийся по орбите электрический заряд представляет собой электрический ток (аналог витка с током), а площадь внутри орбиты аналогична площади витка. Найдем связь между $\vec{p}_m$ и $\vec{L}_e$. Эти векторы направлены в противоположные стороны, поэтому:

$$\vec{p}_m = -g\vec{L}_e.$$

По определению:

$$L_e = J\omega = m_e r^2 \cdot \frac{\nu}{r} = m_e \nu r;$$

$$p_m = I \cdot S = e\nu \cdot \pi r^2 = e \frac{\nu}{2\pi \cdot r} \pi r^2 = \frac{e\nu r}{2}.$$

Чтобы вычислить коэффициент g умножим и разделим на $2e$ выражение для L_e :

$$L_e = m_e \nu r \frac{2e}{2e} = \frac{e\nu r}{2} \cdot \frac{2m_e}{e} = p_m \frac{2m_e}{e},$$

или

$$p_m = \frac{e}{2m_e} L_e = g L_e;$$

отсюда

$$g = \frac{e}{2m_e}.$$

Величина g называется гиромагнитным (от греч. gyros – круг) отношением орбитальных моментов.

Для атома, содержащего z электронов, орбитальный магнитный и механические моменты

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^z \vec{p}_{mi}; \quad \vec{L}_a = \sum_{i=1}^z \vec{L}_{ei},$$

где z – число электронов в атоме, а L_{ei} – момент импульса i -го электрона. В результате для атома:

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^z \vec{p}_{mi} = \sum_{i=1}^z (-g) \vec{L}_{ei} = -g \sum_{i=1}^z \vec{L}_{ei} = -g \vec{L}_a.$$

Гиромагнитное отношение определяется универсальными постоянными e и m_e и одинаково для любой орбиты, хотя для различных орбит значения v и r отличаются.

Экспериментальное определение гиромагнитного отношения для большинства атомов подтвердило указанные выше соотношения, однако для ферромагнитных металлов Fe, Co, Ni привело к значению $g_s = e/m_e$, которое оказалось в два раза большим, чем рассмотренная ранее величина g . Для объяснения этого результата было предположено, а в последствии доказано, что кроме орбитальных моментов электрон обладает собственным механическим моментом импульса $\vec{L}_{es}$, называемым спином (от англ. spin – веретено). При этом считалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг собственной оси, однако это представление оказалось неверным. В настоящее время установлено, что спин является неотъемлемым свойством электрона, подобно его заряду и массе. Соответственно спину электрона соответствует спиновый магнитный момент $\vec{p}_{ms}$. В большинстве атомов эти моменты взаимно компенсируют друг друга, а в Fe, Co, Ni этого не происходит, поэтому появляется спиновый магнитный момент атома:

$$\vec{P}_{ms} = -g_s \vec{L}_{es}.$$

Величина g_s называется гиромагнитным отношением спиновых моментов. В общем случае магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. В свою очередь магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых магнитных моментов входящих в его состав электронов и магнитного момента ядра, который

обусловлен магнитными моментами входящих в ядро протонов и нейтронов. Однако магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому при вычислении общего магнитного момента атома ими пренебрегают:

$$\vec{P}_m = \sum \vec{P}_m + \sum \vec{P}_{ms}.$$

Магнитный момент молекулы также равен векторной сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

§ 24. Диа- и парамагнетики

Всякое вещество способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться) и поэтому называется магнетиком.

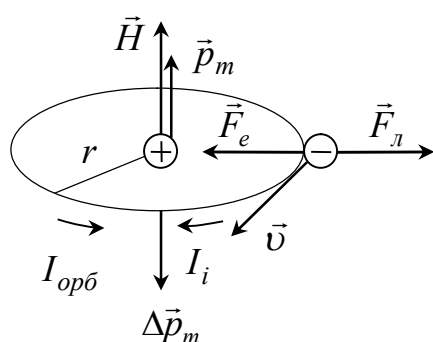


Рис. 37. Движение
электрона по круговой
орбите в магнитном поле

Намагничивание происходит следующим образом. Предположим, что одноэлектронный атом вещества помещен в магнитное поле, напряженность которого равна $\vec{H}$. Плоскость круговой орбиты электрона перпендикулярна вектору $\vec{H}$ (рис. 37). В этом случае к силе притяжения F_e электрона ядром, которая существует независимо от того, есть внешнее поле $\vec{H}$ или нет и является с точки зрения механики центростремительной силой, добавляется сила Лоренца F_L , направленная в противоположную сторону,

причем величина этой силы пропорциональна величине напряженности внешнего магнитного поля. Равнодействующая этих сил также есть центростремительная сила, но уже равная разности F_e и F_L . При наличии внешнего магнитного поля центростремительная сила убывает, так как $(F_e - F_L) < F_e$, что и приводит к уменьшению угловой скорости вращения электрона и, следовательно, к уменьшению орбитального тока I_{orb} и орбитального магнитного момента $\vec{P}_m$. С точки зрения явления электромагнитной индукции уменьшение орбитального тока можно объяснить возникновением индукционного тока противоположного направления. Соответственно, индукционный ток создаст свой дополнительный магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$, направленный против внешнего магнитного поля. В результате внутреннее магнитное поле в веществе ослабляется и становится меньше внешнего.

Если орбита электрона ориентирована относительно вектора $\vec{H}$ произвольным образом (рис. 38), составляя с ним угол α , то она приходит в такое движение вокруг вектора $\vec{H}$, при котором вектор $\vec{P}_m$ вращается вокруг направления $\vec{H}$ с некоторой угловой скоростью, при этом $\alpha = \text{const}$. Такое

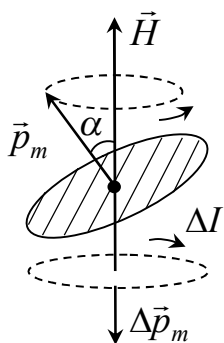


Рис. 38. Прецессия
электрона в атоме

движение в механике называется прецессией (от лат. praecessio – опережающее движение). Прецессию вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры, совершает, например, механическая игрушка волчок при замедлении движения. Указанное движение приводит к возникновению эквивалентного кругового тока ΔI , текущего в плоскости, перпендикулярной $\vec{H}$. Этот ток создает индуцированный магнитный момент $\Delta \vec{p}_m$, направленный против внешнего магнитного поля. В веществе векторы этих моментов атомов складываются и создают собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Указанное явление называется диамагнитным эффектом, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления этого поля называются диамагнитными (от греч. dia – расхождение).

В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетик немагнитен, поскольку суммарный магнитный момент каждого атома, равный сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов, равен нулю. Диамагнетиками являются многие металлы – Ag, Au, Cu, Bi, а также углерод и большинство органических соединений. Диамагнитный эффект присущ всем веществам.

Наряду с диамагнетиками существуют парамагнетики – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля. У парамагнитных (от греч. para – возле) веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, поэтому атомы парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов по полю (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов). Таким образом парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется парамагнитным. В парамагнетике магнитная индукция B' , создаваемая атомами вещества

$$B' \sim \frac{\mu_0 n_0 P_m^2}{3kT},$$

где n_0 – концентрация магнитных моментов $\vec{P}_m$ атомов. Величина P_m^2 в числителе отражает ориентирующее действие внешнего магнитного поля, а величина kT в знаменателе отражает дезориентирующее действие теплового движения атомов. При ослаблении внешнего поля до нуля ориентация

магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается, и парамагнетик размагничивается. К парамагнетикам относятся Pt, Al, O₂, NO, щелочные и редкоземельные металлы.

Видно, что существует аналогия между намагничиванием парамагнетиков и ориентационной поляризацией диэлектриков с полярными молекулами, если электрический момент атомов в случае поляризации заменить на магнитный момент атомов в случае намагничивания. Соотношение между диа- и парамагнитными эффектами устанавливается следующим образом. Атомы всех видов являются носителями диамагнитных свойств, однако если магнитный момент атомов не равен нулю, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком. Если же магнитный момент атомов равен нулю, или очень мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

§ 25. Намагниченность. Магнитная индукция в веществе

Для количественного описания намагничивания магнетиков вводится векторная величина – намагниченность – определяемая магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{M} = \lim_{V \rightarrow V'} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_{mi} \right),$$

где V – объем рассматриваемого магнетика, V' – физически бесконечно малый объем, $\vec{P}_{mi}$ – магнитный момент i -того атома. Если магнетик однороден и изотропен ($\vec{P}_{mi} = \text{const}$), то

$$\vec{M} = \frac{N\vec{P}_m}{V} = n_0 \vec{P}_m,$$

где $\vec{P}_m$ – магнитный момент атома вещества; n_0 – концентрация магнитных моментов $\vec{P}_m$.

Магнитное поле в веществе складывается из двух полей: внешнего поля, создаваемого источником магнитного поля, например, электрическим током I , и поля, создаваемого самим намагниченным веществом. Тогда вектор магнитной индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен векторной сумме внешнего поля $\vec{B}_0$ и поля $\vec{B}'$, создаваемого молекулярными микротоками в соответствии с гипотезой Ампера:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \text{ где } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}.$$

Для вычисления поля $\vec{B}'$ рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечением S и длиной l , находящийся в однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}_0$ (рис. 39). Возникающее в магнетике магнитное поле молекулярных микротоков будет направлено противоположно внешнему для диамагнетиков и совпадать с ним по направлению для парамагнетиков.

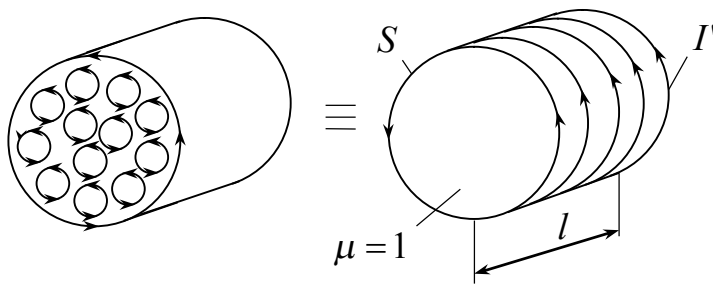


Рис. 39. К вычислению магнитного поля в веществе

Если рассмотреть любое поперечное сечение цилиндра, то на внутренних участках сечения магнетика молекулярные микротоки соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Некомпен-

сированными будут лишь молекулярные микротоки, выходящие на боковую поверхность цилиндра. Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленоиде и создает внутри него поле, магнитную индукцию $\vec{B}'$ которого можно вычислить по формуле

$$B' = \mu_0 \frac{NI'}{l},$$

где I' – величина молекулярного микротока, текущего по поверхности цилиндрического магнетика, N – число микротоков. Магнитный момент соленоида равен

$$P'_m = NP_m = NI'S,$$

откуда

$$NI' = \frac{NP_m}{S}.$$

В результате в векторной форме

$$\vec{B}' = \mu_0 \frac{N\vec{P}_m}{\underbrace{S \cdot l}_{=V}} = \mu_0 \frac{N\vec{P}_m}{V} = \mu_0 \vec{M}.$$

Подставив результат в формулу для вычисления результирующего поля в магнетике, получим:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \text{ или } \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}.$$

Как показывает опыт, в малых полях намагниченность прямо пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничивание, т.е.

$$\vec{M} = \chi \vec{H},$$

где χ – безразмерная величина, называемая магнитной восприимчивостью вещества. Для диамагнетиков χ отрицательна. Это вытекает из формулы

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0 \chi \vec{H},$$

так как диамагнетик намагничивается против поля ($B < B_0$), и физически $\chi < 0$ означает, что поле молекулярных микротоков по направлению противоположно внешнему. Для парамагнетиков $\chi > 0$ (рис. 40). Окончательно результирующая индукция магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Безразмерная величина $\mu = 1 + \chi$ есть магнитная проницаемость вещества, входящая в формулу

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Так как абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало (для диа: $\chi \cong -1,5 \cdot 10^{-6}$, для пара: $\chi \cong 1 \cdot 10^{-5} \dots 1 \cdot 10^{-3}$), то для них и μ мало отличается от единицы. Объясняется это тем, что магнитное поле молекулярных микротоков значительно слабее внешнего намагничивающего (поляризующего) поля. Таким образом, для диамагнетиков $\chi < 0$ и $\mu < 1$, для парамагнетиков $\chi > 0$ и $\mu > 1$.

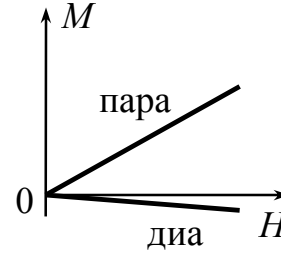


Рис. 40. Полевые зависимости намагниченности

Чтобы вычислить магнитное поле в веществе, созданное токами проводимости, используем закон полного тока, который для магнетиков выглядит так (здесь использован вектор $\vec{B}$, так как он зависит от свойств вещества):

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl = \mu_0 (I + I'),$$

где величина молекулярного микротока I' неизвестна. Вектор $\vec{B}$ таким образом характеризует результирующее поле, созданное как токами проводимости (внешнее поле), так и молекулярными микротоками (внутреннее поле), то есть циркуляция $\vec{B}$ никогда не равна нулю, так как молекулярный микроток всегда существует, поэтому линии вектора $\vec{B}$ для магнетиков не имеют источников и являются замкнутыми. Несмотря на то обстоятельство, что величина тока I' неизвестна, магнитное поле в веществе можно вычислить, используя определение циркуляции вектора (в данном случае $\vec{B}$), вдоль произвольного замкнутого математического контура L :

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), d\vec{l} = \oint_L \mu_0 (\vec{H}, d\vec{l}) + \oint_L \mu_0 (\vec{M}, d\vec{l}) = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L (\vec{M}, d\vec{l}).$$

Здесь $\oint_L \mu_0 (\vec{H}, d\vec{l}) = \mu_0 I$ по закону полного тока для вакуума, т.е. в отсутствие магнетика.

Разделив на μ_0 левую и правую часть последнего выражения получим:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}, d\vec{l} \right) - \oint_L (\vec{M}, d\vec{l}) = I; \quad \oint_L \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)}_{=\vec{H}}, d\vec{l} = I; \quad \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I.$$

Циркуляция вектора $\vec{H}$ магнитного поля в веществе вдоль произвольного замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов, охватыва-

емых этим контуром, то есть циркуляция вектора $\vec{H}$ в веществе вычисляется точно так же, что и в вакууме. Полученный результат объясняется тем, что напряженность $\vec{H}$ магнитного поля одинакова и в веществе и в вакууме, а указанное равенство есть теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$, или закон полного тока для магнитного поля в веществе. Поскольку величина тока I , создающего внешнее магнитное поле, заведомо известна, то из последнего выражения можно вычислить напряженность поля $\vec{H}$ и, зная μ , индукцию $\vec{B}$.

§ 26. Ферромагнетики. Природа ферромагнетизма

Ферромагнетиками (от лат. ferrum – железо) называются вещества, обладающие спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Они интересны тем, что в них внутреннее магнитное поле может в сотни тысяч раз превышать внешнее поле. Ферромагнетиками являются железо, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и соединения.

Экспериментальное изучение ферромагнетиков было начато российским физиком А.Г. Столетовым. Столетов установил, что для железа зависимости намагниченности и индукции от внешнего поля $\vec{H}$ существенно отличаются от аналогичной зависимости для диа- и парамагнетиков. Для последних она линейна, а для железа имеет вид (рис. 41):

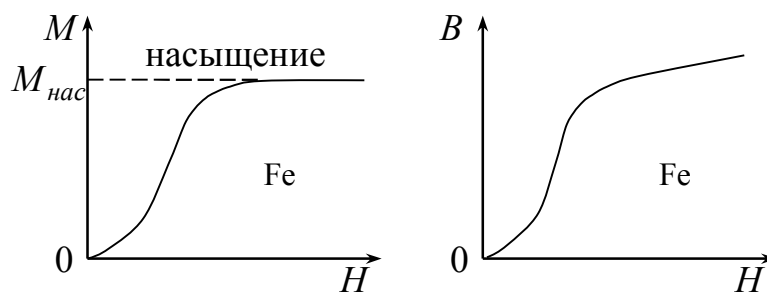


Рис. 41. Полевые зависимости намагниченности и магнитной индукции для ферромагнетика

По мере возрастания H намагниченность M сначала растет медленно, потом быстро, затем снова медленнее и, наконец, достигается так называемое магнитное насыщение $M_{нас}$, не зависящее от H . Такой характер зависимости $M = M(H)$ можно объяснить тем, что по мере увеличения внешнего поля увеличивается доля магнитных моментов (каких – узнаем позже), ориентированных по полю, однако этот процесс начнет замедляться, когда доля неориентированных магнитных моментов убывает и, наконец, когда все магнитные моменты будут ориентированы по полю, дальнейшее увеличение M прекращается, что и называется магнитным насыщением.

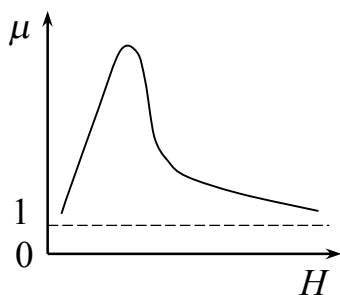


Рис. 42. Полевая зависимость магнитной проницаемости

$\mu(H)$ (рис. 42): μ растет, достигает максимума и уменьшается, стремясь при сильных полях к единице, так как

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu_0 H + \mu_0 M}{\mu_0 H} = 1 + \frac{M}{H}.$$

При $M = M_{\text{нас}} = \text{const}$, если $H \uparrow$, то $(M/H) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 1$. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков $\chi_m > 0$ и имеет значения $10^4 \dots 10^5$

Столетов обнаружил также явление магнитного гистерезиса (от греч. hysteresis – запаздывание), то есть способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние после

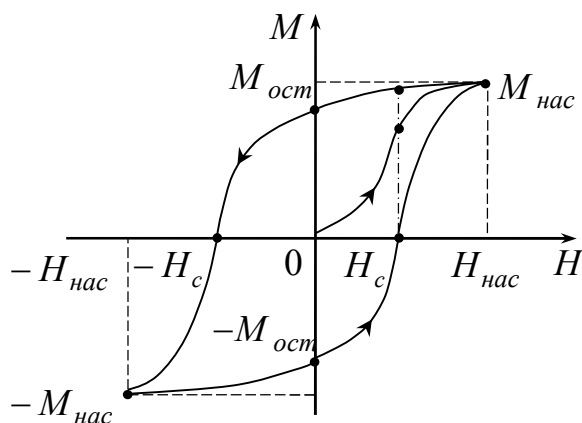


Рис. 43. Петля магнитного гистерезиса

того, как внешнее поле уменьшено до нуля. Таким образом, значение M зависит от магнитной предыстории ферромагнетика, что и делает зависимость $M(H)$ неоднозначной, т.е. одному значению H соответствует не одно (в данном случае три) значения M (рис. 43).

Если намагнитить ферромагнетик до насыщения, а затем начать уменьшать напряженность H внешнего поля, то уменьшение M описывается кривой, лежащей выше кривой начального намагничивания. При $H = 0$ имеет место быть остаточное намагничивание $M_{\text{ост}}$, которое объясняет, почему существуют постоянные магниты. Чтобы размагнитить образец, необходимо создать внешнее поле противоположного направления. Напряжённость этого поля H_c называют коэрцитивной силой (от греч. coercitio – удерживание).

Ферромагнетики с малой H_c , или узкой петлей гистерезиса (Fe, Fe–Ni) применяются для изготовления сердечников трансформаторов. Эти ферромагнетики легко намагничиваются и размагничиваются, т.е. на эти процес-

сы затрачивается относительно мало энергии. Поэтому они применяются в магнитных устройствах (например, трансформаторы) электрических цепей переменного тока. Такие ферромагнитные материалы называют магнитомягкими (МММ). Наоборот, ферромагнетики с большой H_c , или широкой петлей гистерезиса (углеродистые и вольфрамовые стали) трудно размагнитить, поэтому они применяются для изготовления постоянных магнитов. Это – магнитотвердые материалы (МТМ) (рис. 44).

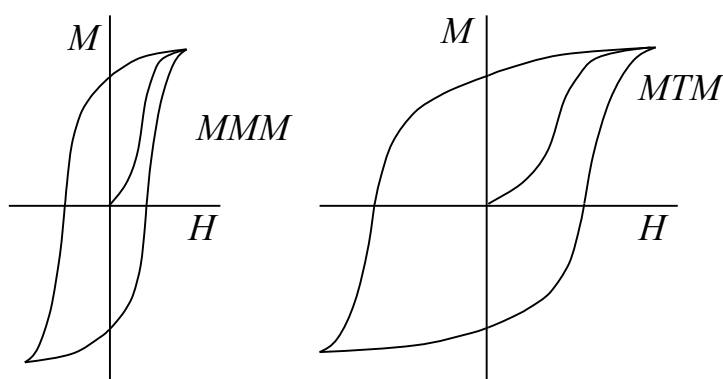


Рис. 44. Петля гистерезиса для различных ферромагнетиков

Ферромагнетики обладают еще одной существенной особенностью: для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая точкой Кюри (французский физик) T_c , выше которой он теряет свои магнитные свойства (рис. 45).

Выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик. Превращение не сопровождается поглощением или выделением теплоты, поэтому называется фазовым переходом второго рода. Для Fe $T_c = 768^\circ\text{C}$.

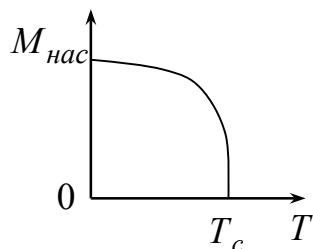


Рис. 45. Температурная зависимость намагниченности ферромагнетика

Наконец, намагничивание ферромагнетиков сопровождается изменением их линейных размеров и объемов. Это явление называется магнитострикцией, или эффектом Джоуля. Противоположное явление – изменение намагниченности ферромагнетика при его деформации – называется магнитоупругим эффектом, или эффектом Виллари (итальянский физик).

Качественная теория ферромагнетизма была разработана французским физиком Вейссом, согласно которой ферромагнетики при температурах ниже точки Кюри разбиты на большое количество малых областей – доменов (от франц. domain – область), которые самопроизвольно намагничены до насыщения. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент образца из ферромагнетика равен нулю, т.е. образец не намагничен. Внешнее магнитное поле ориентирует магнитные моменты не отдельных атомов, как в случае парамагнетика, а магнитные моменты доме-

нов. Поэтому $\vec{M}$ и $\vec{B}$ увеличиваются очень быстро уже в слабых полях, причем эти зависимости имеют ступенчатый вид (так называемые скачки Баркгаузена, немецкий физик). Объясняется этот вид тем, что домены поворачиваются по полю скачком (рис. 46).

При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ферромагнетики сохраняют остаточное намагничивание, так как тепловое движение дезориентирует магнитные моменты доменов не мгновенно, а в течение длительного времени. Этим объясняется явление магнитного гистерезиса.

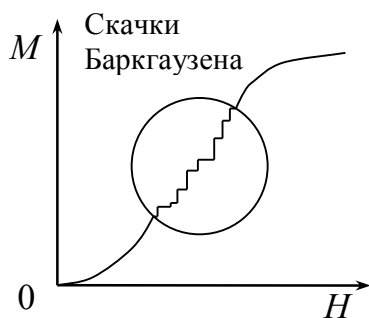


Рис. 46. Зависимость $M(H)$ для ферромагнетика

Чтобы ферромагнетик размагнитить, необходимо приложить магнитное поле противоположного направления, т.е. коэрцитивную силу. Размагничиванию способствуют нагрев, а также динамические нагрузки: встряхивание ферромагнетика или удары по нему. Существование доменов доказано экспериментально, их линейные размеры составляют примерно 10^{-5} м.

Ответ на вопрос о том, почему каждый домен самопроизвольно намагничен до насыщения, дали советский физик Я.И. Френкель и немецкий физик Гайзенберг. Магнитные свойства ферромагнетиков определяются спиновыми магнитными моментами электронов. Ферромагнитными свойствами могут обладать только кристаллические вещества, в атомах которых имеются нестроенные внутренние электронные оболочки, у которых спины электронов не компенсированы. В таких кристаллах возникают силы (они называются обменными силами), которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться параллельно друг другу, что и приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания. Обменные силы имеют квантовую природу — они обусловлены волновыми свойствами электронов.

В последнее время большое применение получили ферриты. Это полупроводниковые ферромагнетики, химический состав которых выражается формулой $MeO \times Fe_2O_3$, где Me — ион двухвалентного металла (Mn, Co, Ni, Cu, Fe, Mg, Zn, Cd). Они обладают заметными магнитными свойствами при очень высоком значении электросопротивления, поэтому в них нет потерь энергии в виде теплоты Ленца–Джоуля, когда они входят в состав цепей переменного электрического тока. Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, ферритовых антенн, сердечников радиочастотных контуров, элементов оперативной памяти в вычислительной технике и т.д.

Выше было показано, что обменное взаимодействие, являющееся основой ферромагнетизма, создает в ферромагнетиках параллельное упорядочение соседних спинов. Однако в некоторых твердых телах обменное вза-

взаимодействие вызывает антипараллельное упорядочение спинов. В результате магнитные моменты соседних частиц вещества ориентированы навстречу друг другу (антипараллельно, рис. 47), и поэтому намагниченность тела в отсутствие магнитного поля в целом равна нулю. Такие вещества называются антиферромагнетиками.

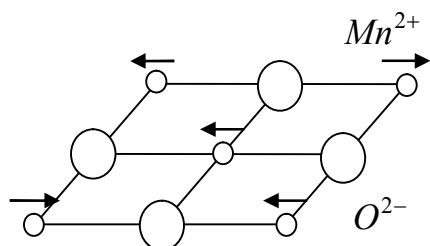


Рис. 47. Магнитная структура антиферромагнетика

Сюда относятся такие элементы таблицы Менделеева как Dy, Er и соединения MnO , FeO , CoO , NiO и др.

Существование антиферромагнетиков в 1930-х г.г. предсказали советской физик Л.Д. Ландау и французский физик Неель, которые объяснили существование антиферромагнетиков переходом парамагнетика в новое состояние, названное анти-

ферромагнитным. Ниже некоторой температуры T_N (температура Нееля, от 12 до 220 К) силы обменного взаимодействия между магнитными моментами соседних атомов оказываются сильнее, чем разупорядочивающее действие теплового движения. В результате средний по времени магнитный момент каждого атома становится отличным от нуля и принимает определенное значение и направление, и в веществе возникает магнитное упорядочение. Оно характеризуется тем, что средние магнитные моменты ближайших соседей любого атома направлены навстречу его собственному магнитному моменту. В каждом антиферромагнетике устанавливается определенный порядок чередования магнитных моментов. Антиферромагнитные кристаллы обнаруживают положительную магнитную восприимчивость при всех температурах ($\chi = 10^{-4} \dots 10^{-6}$). Выше температуры Нееля они имеют обычные парамагнитные свойства и подчиняются теории Вейсса. Ниже температуры Нееля моменты атомов не могут свободно следовать за полем, и восприимчивость не подчиняется теории Вейсса. При абсолютном нуле восприимчивость антиферромагнетика равна нулю.

ГЛАВА VIII. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Тема 16. Электромагнитные колебания

§ 27. Свободные затухающие электромагнитные колебания. Колебательный контур

Из большого многообразия электромагнитных явлений выделяются электромагнитные колебания, так как они лежат в основе работы электро- и радиотехнических цепей. Электромагнитными колебаниями называются периодические изменения величины электрического заряда, напряжения или величины тока в электрической цепи, а также периодические изменения электрических и магнитных полей.

Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний применяются определенные устройства, простейшим из которых является колебательный контур – электрическая цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора (от лат. resisto – сопротивляюсь) сопротивлением R (рис. 48).

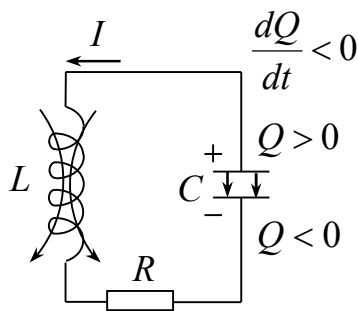


Рис. 48. Колебательный контур

Согласно второму правилу Кирхгофа, для контура, содержащего L , C и R ,

$$IR + U_c = \mathcal{E}_c,$$

где IR – напряжение на резисторе, $U_c = Q/C$ – напряжение на конденсаторе; $\mathcal{E}_c$ – э.д.с. самоиндукции:

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Следовательно,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение таким образом, чтобы в нем присутствовала одна переменная – заряд Q . Для этого, подставив $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$; $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} = \ddot{Q}$ и разделив последнее выражение на L , получим

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением свободных затухающих электромагнитных колебаний.

В рассматриваемом случае источники тока отсутствуют, поэтому колебания электрического заряда представляют собой свободные колебания, а за счет наличия электросопротивления R в контуре они являются также затухающими.

Сравним полученное уравнение с дифференциальным уравнением свободных затухающих механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $2\delta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, x – смещение колеблющейся материальной точки от положения равновесия, δ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебаний при $r = 0$. Решение этого уравнения известно:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Решение получено при условии $\delta^2 \ll \omega_0^2$ (затухание мало)

Чтобы его использовать, введем обозначения:

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

тогда дифференциальное уравнение свободных затухающих электромагнитных колебаний примет вид:

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Используя выявленную аналогию двух уравнений можем записать решение последнего уравнения:

$$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где Q_m – максимальная величина заряда конденсатора, α – начальная фаза колебаний. Из обозначений видно, что величина R/L аналогична величине r/m , величина $1/LC$ аналогична k/m , т.е. электросопротивление R аналогично коэффициенту сопротивления r , индуктивность L аналогична массе m , обратная емкость $1/C$ аналогична коэффициенту k . Это понятно, так как по физическому смыслу m и L – меры инертности колебательных систем; r и R отражают способность среды и контура сопротивляться движению или изменениям в них; k и $1/C$ свидетельствуют о способности системы возвращаться в состояние равновесия.

График функции, представляющей собой решение рассмотренного уравнения представлен на рис. 49.

Для свободных затухающих электромагнитных колебаний частота колебаний вычисляется по формуле (по аналогии с механическими свободными затухающими колебаниями):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

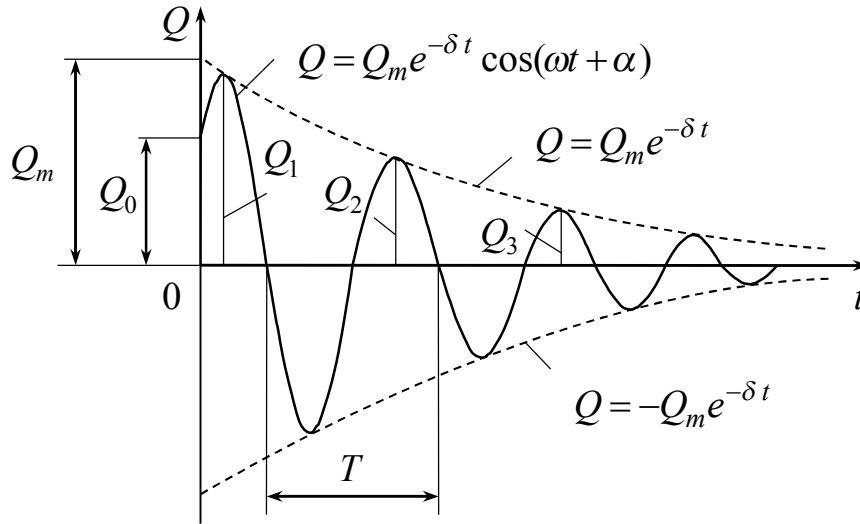


Рис. 49. График свободных затухающих колебаний заряда конденсатора

Таким образом, частота затухающих колебаний меньше частоты ω_0 собственных колебаний, которые происходят в контуре при $R = 0$.

Напряжение на конденсаторе вычисляется так:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где U_m – амплитуда напряжения.

Чтобы найти величину тока продифференцируем по времени выражения для электрического заряда Q :

$$\begin{aligned} I = \dot{Q} &= Q_m \left[e^{-\delta t} (-\delta) \cos(\omega t + \alpha) + e^{-\delta t} (-1) \sin(\omega t + \alpha) \omega \right] = \\ &= Q_m e^{-\delta t} \left[-\delta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение принято записывать в более простом виде. Для этого разделим и умножим правую часть уравнения на ω_0 :

$$I = \omega_0 Q_m e^{-\delta t} \left[-\frac{\delta}{\omega_0} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

Далее введем угол φ , определяемый условиями ($\delta^2 \ll \omega_0^2$):

$$\cos \varphi = -\frac{\delta}{\omega_0}; \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Тогда выражение в квадратных скобках примет вид:

$$\cos \varphi \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \sin \varphi \cdot \sin(\omega t + \alpha) = \cos(\varphi + \omega t + \alpha).$$

Окончательно можно записать:

$$I = \omega_0 Q_m e^{-\delta t} \cos(\varphi + \omega t + \alpha) = I_m e^{-\delta t} \cos(\varphi + \omega t + \alpha).$$

Поскольку $\cos \varphi < 0$, а $\sin \varphi > 0$, то $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Сравнив последнюю формулу с выражением для вычисления напряжения на конденсаторе видим, что при наличии в контуре сопротивления R ток опережает по фазе напряжение более чем на $\frac{\pi}{2}$, а при $R = 0$ опережение составляет ровно $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, при $R = 0$ и $\delta = 0$, отсюда $\cos \varphi = 0$, значит $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. когда величина тока достигает максимального значения, заряд (а так же напряжение) обращаются в нуль и наоборот.

Затухание колебаний характеризуется логарифмическим декрементом затухания. Обозначим символом $A(t)$ амплитуду соответствующих величин: Q, I, U . Тогда логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_m e^{-\delta t}}{A_m e^{-\delta(t+T)}} = \ln \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta T}} = \ln e^{\delta T} = \delta T.$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

При $R = 0$ (идеальный контур) коэффициент затухания $\delta = 0$ и $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$ – формула У. Томсона (лорд Кельвин, английский физик).

Физический смысл логарифмического декремента затухания заключается в том, что он обратен по величине числу колебаний N_e , по истечении которых амплитуда колебаний $A(t)$ уменьшится в « e » раз:

$$\theta = \frac{1}{N_e}.$$

Колебательный контур характеризуется его добротностью Q_k , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q_k = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e.$$

Отсюда видно, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевает произойти, прежде чем амплитуда $A(t)$ уменьшится в « e » раз. Физический смысл добротности наиболее ярко проявляется при резонансных явлениях в контуре. Она показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при резонансе превышает амплитуду при его отсутствии. Таким образом, добротность характеризует способность кон-

тура воспринимать внешнюю энергию. Для радиотехнических контуров Q_k достигает 1000 ед.

§ 28. Вынужденные электромагнитные колебания

Так как сопротивление R колебательного контура не равно нулю, то свободные электромагнитные колебания в контуре затухают. Для получения незатухающих колебаний необходимо извне периодически подводить энергию в контур. В результате в контуре возникнут вынужденные электромагнитные колебания. При этом контур схематически будет выглядеть так, как показано на рис. 50.

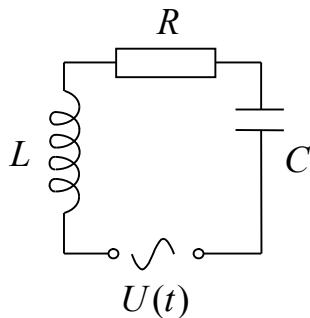


Рис. 50. Колебательный контур, содержащий источник тока переменного напряжения $U(t)$

Пусть $U = U_m \cos \omega t$, тогда по II правилу Кирхгофа:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = U_m \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

которое совпадает с уже известным нам дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид:

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \psi).$$

Это простейший вариант решения, который имеет место при условии, что затухание невелико, т.е. $\delta^2 \ll \omega_0^2$.

В этом выражении

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Разделив заряд Q на емкость C , получим выражение для напряжения на конденсаторе

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{cm} \cos(\omega t - \psi),$$

где

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Вычислим величину тока в контуре

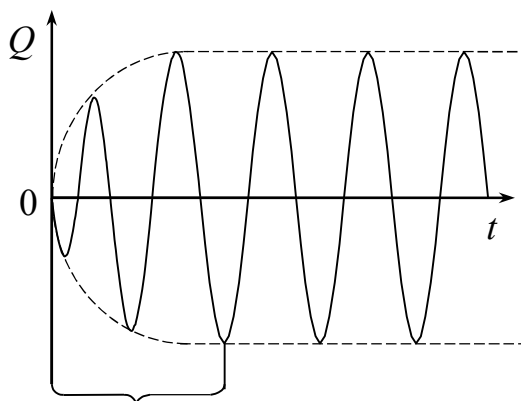
$$I = \frac{dQ}{dt} = -\underbrace{\omega Q_m}_{=I_m} \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}}) = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где амплитуда тока имеет значение

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}.$$

Здесь $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$

Последнее выражение приведено к виду, совпадающему с законом Ома, поэтому величина Z называется полным сопротивлением электрической цепи переменного тока. Оно зависит от активного (омического) сопротивления R , индуктивного сопротивления ωL и емкостного сопротивления $1/\omega C$. Величина $X = \omega L - 1/\omega C$ называется реактивным сопротивлением контура.



Установление колебаний

Рис. 51. График вынужденных электромагнитных колебаний

График вынужденных колебаний (рис. 51) отражает то обстоятельство, что решение дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение $Q_m = Q_{m_0} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha)$ играет роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения Q_m . Здесь $Q_{m_0} = Q_m$ при $t = 0$. Следова-

тельно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят частотой ω и являются гармоническими, амплитуда и фаза колебаний так же зависят от ω .

Из сравнения выражений:

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \psi);$$

$$U_c = U_{cm} \cos(\omega t - \psi);$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad \varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$$

видно, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$.

§ 29. Электрический резонанс напряжений

Рассмотрим зависимость амплитуды Q_m от частоты ω . Аналогичную зависимость ранее выяснили при изучении механических вынужденных колебаний, поэтому воспользуемся имеющимися результатами: при некоторой определенной для данного колебательного контура частоте, называемой резонансной, амплитуда колебаний достигает максимального значения. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных электромагнитных колебаний, возникающее с приближением частоты источника тока к резонансной частоте контура, называется электрическим резонансом. Резонансная частота равна (из формул для механических вынужденных колебаний)

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad 2\delta = \frac{R}{L}; \quad \omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Подставив $\omega_{рез}$ в выражение для Q_m , получим (рис. 52):

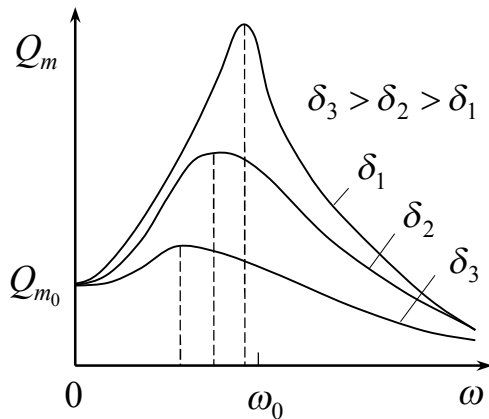


Рис. 52. Резонансные кривые для колебательного контура

$$Q_{m_{рез}} = \frac{Q_m}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{Q_m}{\frac{R}{L} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}}.$$

В случае, когда затухание мало ($\delta^2 \ll \omega_0^2$), значение $\omega_{рез}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы т.е.

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad \text{Так же, при малом}$$

$$\text{затухании} \quad Q_{m_{рез}} = \frac{Q_m}{2\delta\omega_0}. \quad \text{Выразим}$$

добротность контура через δ и ω_0 :

$$Q_k = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1 \cdot L}{\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Отсюда $2\delta = \frac{\omega_0}{Q_k}$ и

$$Q_{m_{рез}} = \frac{Q_m}{2\delta\omega_0} = \frac{Q_m Q_k}{\omega_0 \omega_0} = Q_k \frac{Q_m}{\omega_0^2}.$$

Отсюда видно, что добротность Q_k характеризует резонансные свойства колебательной системы – чем больше Q_k , тем больше $Q_{m_{рез}}$.

Наличие электрического резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые электромагнитные колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний контура. Так, радиотехника, прикладная акустика, устройства, воспринимающие электромагнитные колебания, основаны на явлении резонанса напряжений.

Если в контуре, содержащем последовательно соединенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (рис. 53) выполняется равенство $\omega L = 1/\omega C$, т.е. индуктивное сопротивление равно емкостному, то угол сдвига фаз между током и напряжением $\operatorname{tg} \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R$ обращается в нуль

($\varphi = 0$). В этом случае изменения тока и напряжения происходят во времени одинаковым образом (синфазно). Из условия $\omega L = 1/\omega C$ получаем, что $\omega^2 = 1/LC$. Для рассматриваемого случая (для малых R) эта циклическая частота является резонансной:

$$\omega_{рез}^2 = \frac{1}{LC}.$$

В данном случае полное сопротивление цепи Z становится наименьшим, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется только активным сопротивлением, принимая наибольшие значения. При этом напряжение на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи, а напряжения на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.

Рассмотренное явление называется резонансом напряжений, так как при этом U_L и U_C может значительно превышать приложенное к цепи напряжение. Вычислим каковы эти напряжения. В случае резонанса напряжений

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

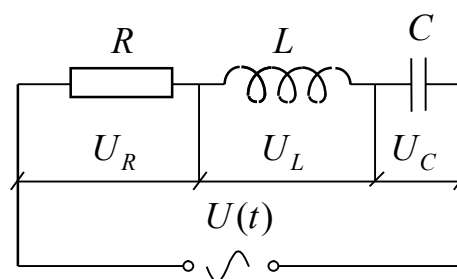


Рис. 53. К электрическому резонансу напряжений

поэтому, подставив в левую и правую части этой формулы значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$\left. \begin{aligned} (U_L)_{рез} &= I_m X_L = I_m \omega_{рез} L = I_m \frac{L}{\sqrt{LC}} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; \\ (U_C)_{рез} &= I_m X_C = I_m \frac{1}{\omega_{рез} C} = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{U_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned} \right\} = Q_k U_m,$$

$$\text{так как } Q_k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

где Q_k – добротность контура. Так как добротность колебательных контуров много больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе значительно превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления напряжения колебаний какой либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение амплитудой $Q_k U_m$. Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты, что позволяет выделить из многих сигналов колебания определенной частоты и настроить радиоприемник на нужную длину волны. При отсутствии резонанса поступающая с антенны в контур электромагнитная энергия расходуется на ленц-джоулеву теплоту.

§ 30. Превращения энергии в колебательном контуре

Рассмотрим превращения энергии в идеальном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R=0$).

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ конденсатор получил заряд Q (рис. 69). Тогда между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле, энергия которого

$$E_e = \frac{Q^2}{2C}.$$

При замыкании конденсатора на катушку индуктивности он начнет разряжаться и в контуре потечет возрастающий со временем ток величиной I . В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки – возрастать и достигнет значения

$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$. Так как $R = 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия

$$E = E_e + E_m = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = \text{const},$$

поскольку нет потерь энергии на нагревание проводника. Поэтому в момент $t = T/4$, когда конденсатор полностью разряжается, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля, и следовательно, ток достигают наибольшего значения. Начиная с этого момента, ток в контуре будет убывать; следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки и в ней индуцируется ток, который течет в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора (см. рис. 54). Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума. Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении и колебательный контур в момент времени $t = T$ придет в первоначальное состояние.

Поскольку

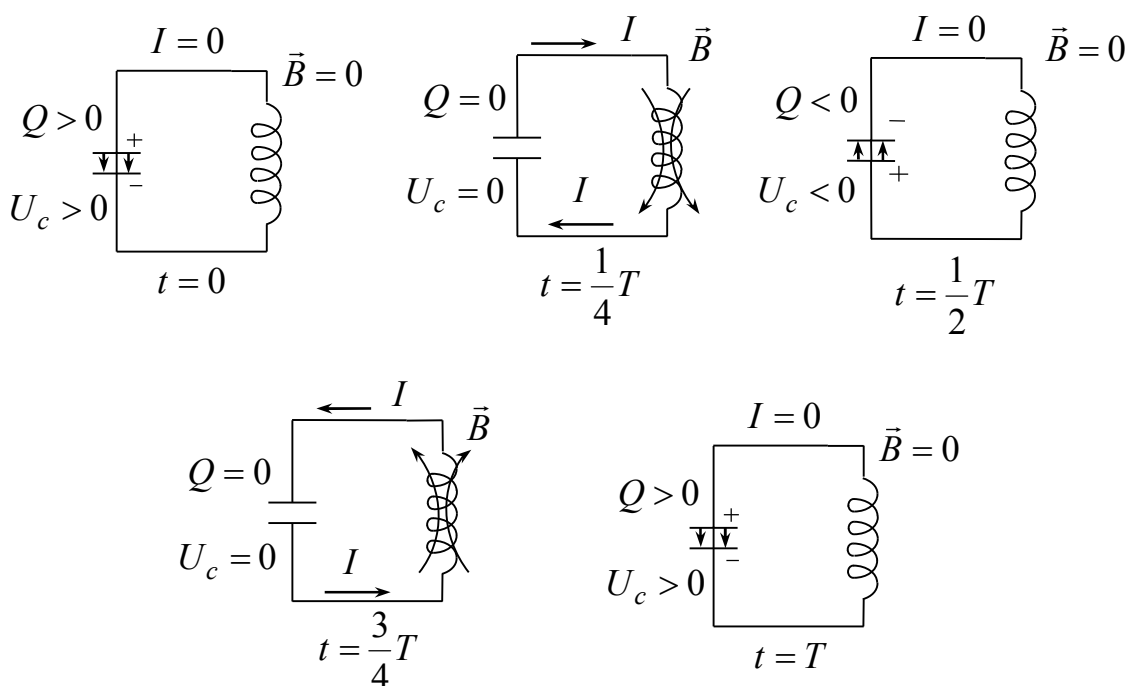


Рис. 54. Превращение энергии электромагнитных колебаний в идеальном контуре

$$I_m = Q_m \omega_0 = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}},$$

а $U_m = Q_m / C$, то амплитуду колебаний величины тока можно вычислить так:

$$I_m = \frac{U_m C}{\sqrt{LC}} = \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Сравнив с законом Ома для участка цепи

$$I_m = \frac{U_m}{R},$$

видим, что величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ аналогична сопротивлению участка цепи, поэтому она носит название волновое сопротивление контура. Оно измеряется в омах, причем волновое сопротивление контура, например проводного телевизионного кабеля, не зависит от его длины. Эта независимость объясняется тем, что индуктивность L и емкость C одинаково зависят от размеров проводника. Поэтому, во сколько раз возрастет числитель дроби L/C при увеличении длины кабеля, во столько же раз возрастет и знаменатель; в результате значение дроби L/C остается неизменным. Величина волнового сопротивления кабеля определяется его конструкцией. Современные телевизионные кабели изготавливаются из оптоволокна.

Тема 17. Электромагнитные волны

§ 31. Уравнение электромагнитной волны. Опыты Герца

В теории электромагнитных явлений, базирующихся на уравнениях Максвелла, было показано, что переменное электрическое поле обуславливает возникновение магнитного поля, а переменное магнитное поле – возникновение вихревого электрического поля. Таким образом, переменные электрическое и магнитное поля тесно взаимосвязаны; они образуют единое электромагнитное поле. Это поле принято характеризовать двумя векторами напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$, соответствующими его электрической и магнитной составляющим. Связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а также их зависимость от координат и времени определяется системой дифференциальных уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Эти уравнения можно получить из интегральных уравнений Максвелла, если воспользоваться теоремами Стокса и Гаусса о преобразовании интегралов вдоль замкнутой кривой L и по замкнутой поверхности S в интегралы, соответственно, по поверхности, ограниченной контуром L , и по объему, ограниченному замкнутой поверхностью S .

Из вида уравнений Максвелла в дифференциальной форме следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должны удовлетворять волновым уравнениям:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$ – электродинамическая постоянная.

Сравним последние выражения с волновым уравнением для механических (упругих) волн:

$$\Delta \xi - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

где v – фазовая скорость волны; ξ – смещение частицы в волне от положения равновесия. Из уравнения видно, что с математической точки зрения уравнения аналогичны, т.е. уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ так же являются волновыми.

Таким образом, переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде электромагнитной волны. Электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве. Из сравнения уравнений так же видно, что $\frac{1}{v^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2}$, поэтому фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}},$$

где ϵ и μ – диэлектрические и магнитные проницаемости среды. Для вакуума $\epsilon = \mu = 1$ и $v = c$. Следовательно, электродинамическая постоянная представляет собой скорость распространения электромагнитной волны в вакууме. Это обстоятельство позволило Максвеллу установить глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями и создать электромагнитную теорию света, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны.

В вакууме ($\epsilon = 1$ и $\mu = 1$) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света. Так как в веществе $\epsilon\mu > 1$, то скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме. Поскольку магнитная проницаемость всех неферромагнитных прозрачных сред очень мало отличается от единицы, то можно считать, что в таких средах фазовая скорость электромагнитных волн

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Существование электромагнитных волн экспериментально доказал Герц в 1888 году. В колебательном контуре, образованном конденсатором C и катушкой L электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное поле – внутри катушки. Чтобы излучение в пространство играло заметную роль, необходимо увеличить расстояние между обкладками конденсатора (рис. 55).

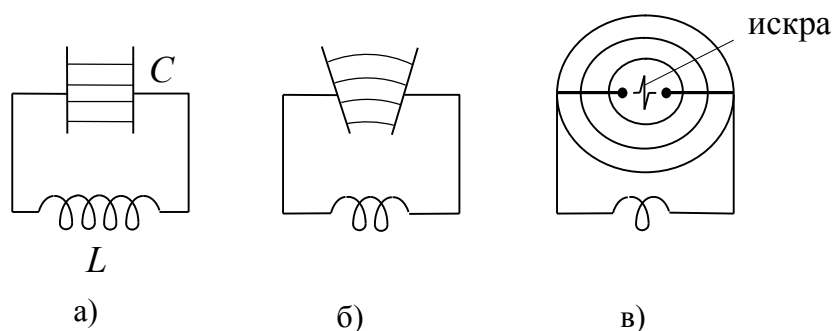


Рис. 55. Иллюстрация к опытам Герца

В результате получается устройство, которое получило название излучатель Герца. Здесь катушка является источником напряжения; при достижении напряжением пробивного значения в зазоре излучателя возникала искра, зазор становился проводящим и в излучателе возникали свободные затухающие электромагнитные колебания, которые излучались в окружающее пространство в виде электромагнитных волн. При исчезновении искры контур размыкался и колебания прекращались. Для регистрации (приема) электромагнитных волн Герц использовал аналогичное устройство, получившее название резонатор.

Герц исследовал отражение и преломление электромагнитных волн и убедился, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике для световых волн. Измерив длину волны Герц вычислил скорость электромагнитных волн, которая оказалась близка к электродинамической постоянной. Кроме того, Герц подтвердил следствие из теории Максвелла, что электромагнитные волны являются поперечными.

Электромагнитные волны, обладая широким диапазоном частот (на сегодняшний день обнаружены волны частотой от $3 \cdot 10^5$ до $5 \cdot 10^{20}$ Гц) отличаются друг от друга по способам их регистрации, а так же по своим свойствам, как это представлено на шкале электромагнитных волн (рис. 56).

Отличие света, видимого человеческим глазом, от электромагнитных волн, получаемых в помощью различных источников, состоит в том, что видимые электромагнитные волны имеют значительно меньшую длину волны. В оптике длины волн принято измерять в нанометрах (10^{-9} м), или в ангстремах ($1\text{Å} = 10^{-10}$ м), в честь шведского физика Ангстрема.



Рис. 56. Шкала электромагнитных волн

§ 32. Свойства электромагнитной волны

Из уравнений Максвелла вытекает, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитной волны всегда взаимно перпендикулярны. Кроме того, они лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 57). Следовательно, электромагнитные волны являются поперечными. Взаимная ориентация векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{v}$ удовлетворяет определению векторного произведения

$$\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}].$$

В случае плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль

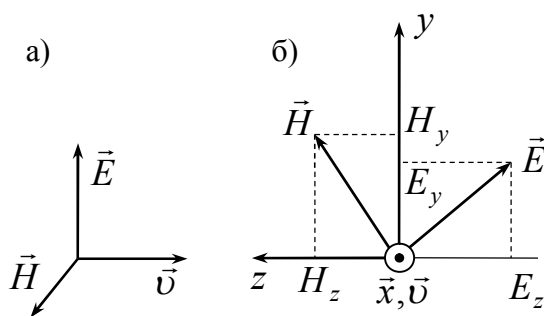


Рис. 57. Взаимная ориентация векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}$

оси Ox , векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны этой оси и зависят только от времени t и координаты x (см. рис. 57а). В самом деле, в любой момент времени во всех точках плоскости $x = \text{const}$ векторы $\vec{E}$ одинаковы и векторы $\vec{H}$ одинаковы, так как эта плоскость является одной из волновых поверхностей плоской волны (см. рис. 57б). В свою очередь плоская волна безгранична для $\vec{E}$ и для $\vec{H}$ в плоскости $x = \text{const}$. Таким образом, $E_x = 0$ и $H_x = 0$, а $(E, H)_{yz} = E, H(t, x)$. Установим соотношение между модулями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Из дифференциальных уравнений Максвелла следует, что между проекциями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на оси Oy и Oz существует связь:

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_z, \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y.$$

Подставив эти выражения в формулу $H = \sqrt{H_y^2 + H_z^2}$, получим

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} E_z^2 + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} E_y^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot \sqrt{E_z^2 + E_y^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E,$$

или

$$\sqrt{\mu_0 \mu} H = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E.$$

Таким образом, взаимно перпендикулярные векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одной фазе – они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений. В этом случае дифференциальное уравнение электромагнитной волны выглядит так:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0.$$

Электромагнитная волна называется монохроматической (от греч. monos – единый, chroma – цвет), если проекции ее векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на оси прямоугольной системы координат совершают колебания одинаковой частоты, называемой частотой волны. Для плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox , например,

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

где ω – циклическая частота волны, $k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число.

Поскольку электромагнитная волна представляет собой набор большого количества колеблющихся векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то в общем случае, за счет неодинаковости начальных фаз α_1 и α_2 стрелка вектора $\vec{E}$ в каждой точке поля описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси Ox (рис. 73). Стрелка вектора $\vec{H}$ так же описывает эллипс, лежащий в той же плоскости, но повернутый вокруг оси Ox на

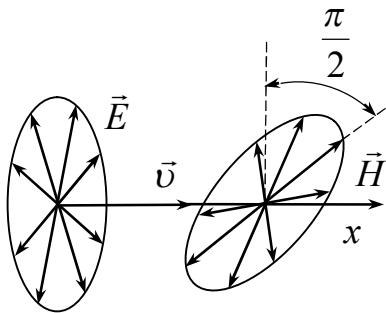
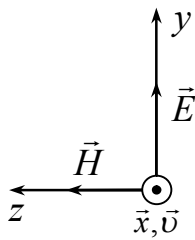


Рис. 58. Эллиптически поляризованная электромагнитная волна

угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 58).

Такая плоская электромагнитная волна называется эллиптически поляризованной. Если разность начальных фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то эллипсы вырождаются в два взаимно перпендикулярных отрезка прямых. Такая волна называется линейно поляризованной. В линейно поляризованной волне векторы

$\vec{E}$ во всех точках поля колеблются вдоль параллельных прямых. Если ось Oy декартовой системы координат направить параллельно этим прямым (рис. 59), то



$$E_y = E, \quad E_z = 0, \quad H_y = 0,$$

$$H_z = H = \sqrt{\frac{\epsilon_o \epsilon}{\mu_o \mu}} E.$$

Рис. 59. Линейно поляризованная электромагнитная волна

Следовательно, для линейно поляризованной монохроматической волны

$$\left. \begin{aligned} E &= E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \\ H &= H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \end{aligned} \right\}.$$

Если одновременно выполняются три условия: монохромность, линейная поляризованность и плоский фронт электромагнитной волны, то волну можно изобразить графически (рис. 60).

Плоскость, проведенная через вектор $\vec{E}$ и вектор $\vec{u}$ скорости распространения волны в данной точке поля, называется плоскостью колебаний волны.

Плоскость, проведенная через векторы $\vec{H}$ и $\vec{u}$, называется плоскостью поляризации волны. Очевидно, что эти понятия применимы только для линейно поляризованных волн.

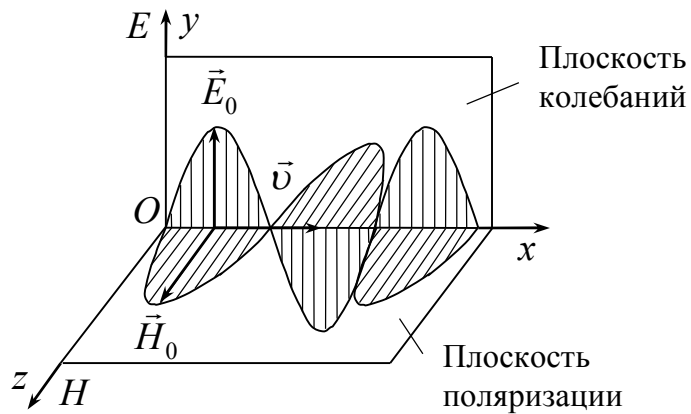


Рис. 60. Графическое изображение электромагнитной волны

§ 33. Энергия электромагнитных волн. Вектор Умова–Пойнтинга

Электромагнитное поле обладает энергией, поэтому распространение электромагнитных волн связано с переносом этой энергии в пространстве, подобно тому, как распространение упругих волн в среде связано с переносом механической энергии. Перенос энергии волной характеризуется плотностью потока энергии. Поток энергии – это физическая величина, численно равная количеству энергии, переносимой волной в единицу времени сквозь некоторую поверхность. Если эта поверхность представляет собой единичную плоскую площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии, то поток энергии превращается в поверхностную плотность потока энергии. Ранее были рассмотрены потоки вектора $\vec{D}$ и векто-

ра $\vec{B}$. Очевидно, что схожесть названий здесь чисто внешняя – поток вектора (например $\vec{B}, \vec{D}$) и поток скаляра (энергии) – различные физические величины: поток вектора – скалярная величина, а поток скаляра – векторная. Направление переноса энергии и ее количество определяются с помощью вектора Умова–Пойнтинга. В общем случае и в применении к упругим волнам вектор плотности потока энергии был предложен российским физиком Н.А. Умовым, а для частного случая электромагнитных волн применен английским физиком Пойнтингом. Это вектор плотности потока энергии волн. Для плоской волны он выражается формулой

$$\vec{S} = w\vec{u},$$

где w – объемная плотность энергии электромагнитной волны (Вт/м³), а $\vec{u}$ – вектор групповой скорости волны. Если распространяются несколько волн близкой частоты, то они образуют так называемый волновой пакет (рис.61). Волновым пакетом называется квазисинусоидальная волна, представляющая собой совокупность синусоидальных волн, частоты которых мало отличаются от некоторой основной частоты ω . За скорость распространения волнового пакета принимают скорость перемещения максимума волнового пакета, рассматривая его как геометрический центр волнового пакета.

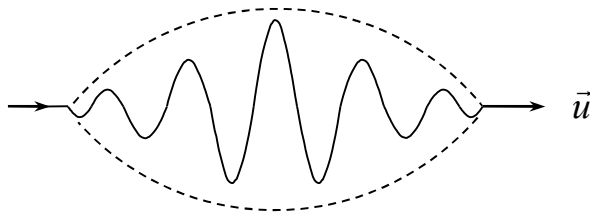


Рис. 61. Мгновенная «фотография» волнового пакета

Групповой скоростью пакета волн называется физическая величина

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

В последней формуле v – фазовая скорость волны, относительно которой отличаются частоты других волн пакета.

Объемные плотности энергии электрического и магнитного полей равны, соответственно

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_o \varepsilon E^2, \quad w_m = \frac{1}{2} \mu_o \mu H^2.$$

Следовательно, результирующая объемная плотность энергии

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon_o \varepsilon E^2 + \mu_o \mu H^2).$$

Для монохроматической волны, т.е. волны одной частоты и, следовательно, одной длины волны $v = \text{const}$ и $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, поэтому групповая скорость $\vec{u}$ равна фазовой скорости волны $\vec{v}$. Отсюда

$$\vec{S} = w \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\varepsilon_o \varepsilon E^2 + \mu_o \mu H^2) \vec{v}.$$

Используя уже известное соотношение $\sqrt{\varepsilon_o \varepsilon} E = \sqrt{\mu_o \mu} H$, откуда $\varepsilon_o \varepsilon E^2 = \mu_o \mu H^2$ перепишем выражение для вектора $\vec{S}$ так:

$$\vec{S} = \varepsilon_o \varepsilon E^2 \vec{v} = \sqrt{\varepsilon_o \varepsilon} E \sqrt{\mu_o \mu} H \vec{v} = \frac{1}{v} EH \vec{v},$$

так как $v = 1/\sqrt{\varepsilon_o \varepsilon \mu_o \mu}$.

Поскольку

$$\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}],$$

то окончательно получим

$$\vec{S} = \frac{1}{v} EH \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}] = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Интенсивностью электромагнитной волны называется физическая величина, численно равная средней по времени энергии, которую переносит волна за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны. Интенсивность волны можно вычислить как модуль среднего значения вектора Умова–Пойнтинга за промежуток времени, равный периоду волны:

$$J = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |[\vec{E}, \vec{H}]| \rangle = \frac{1}{T} \left| \int_0^T [\vec{E}, \vec{H}] dt \right|.$$

Для плоской линейно поляризованной монохроматической волны интенсивность волны вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{T} \left| \int_0^T E_m \cos(\omega t - kx + \alpha) H_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \underbrace{\sin \varphi}_{=1} dt \right| = \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_0^T E_m H_m \cos^2(\omega t - kx + \alpha) dt \right|. \end{aligned}$$

Если это выражение умножить и разделить на ω , то в соответствии с формулой интегрирования

$$\int_0^\alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha,$$

получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{E_m H_m}{\omega T} \left| \frac{1}{2} \omega T + \frac{1}{4} \sin 2\omega T \right| = \frac{1}{2} \frac{E_m H_m}{\omega T} \omega T + \frac{1}{4} \frac{E_m H_m}{\omega T} \underbrace{\sin 2 \frac{2\pi}{T} T}_{=0} = \\ &= \frac{1}{2} E_m H_m. \end{aligned}$$

Поскольку $H_m = E_m \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}}$, то $J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2$, т.е. $J \sim E_m^2$.

Так как электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля электромагнитной волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца. Электроны сталкиваются с ионами или атомами вещества, в результате чего поверхность вещества получает импульс. При средней мощности солнечного излучения, приходящего на Землю, давление для абсолютно поглощающей поверхности составляет примерно 5 мкПа. Российский физик П.Н. Лебедев экспериментально доказал существование светового давления на твердые тела, а затем и на газы.

Существование давления электромагнитных волн означает, что полю электромагнитной волны присущ определенный импульс. Из теории относительности следует, что этот импульс

$$p = \frac{E_{эм}}{c},$$

где $E_{эм}$ – энергия электромагнитного поля. В соответствии с определением импульса частицы, движущейся со скоростью света, он равен $p = mc$. Приравняв правые части, получим:

$$E_{эм} = mc^2.$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля является универсальным законом природы. Согласно специальной теории относительности, это выражение имеет общее значение и справедливо для любых тел и полей независимо от их внутреннего строения.

§ 34. Излучение электромагнитного диполя

Электромагнитное поле излучателя Герца можно представить как модель излучения колеблющегося электрического диполя, поэтому излучатели подобного типа называются также электромагнитными диполями. Излучатель Герца представляет собой, как говорят, полуволновой электромагнитный диполь, потому что его длина равна половине длины излучаемой волны ($l = \lambda/2$). В то же время электромагнитные волны излучают и атомы, размеры которых много меньше длины волны. Такие излучатели называются элементарными диполями (рис. 62).

Простейший элементарный диполь образуют два точечных заряда $Q > 0$ и $Q < 0$, колеблющиеся в противофазе около некоторой т. О (диполь

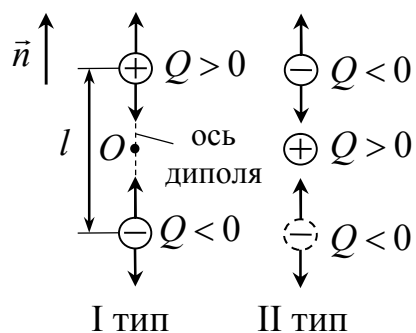


Рис. 62. Электромагнитные диполи

I типа). Дипольный электрический момент такой системы изменяется со временем по закону:

$$\vec{p} = Ql \cos \omega t \cdot \vec{n} = \vec{p}_{\max} \cos \omega t,$$

где l – удвоенная амплитуда (размах) колебаний каждого из зарядов, $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси диполя, $\vec{p}_{\max} = Q \cdot l \cdot \vec{n}$. Такой же электрический момент имеет система, образованная неподвижным положительным зарядом $Q > 0$ и колеблющимися около него с амплитудой l

отрицательными зарядами $Q < 0$ (диполь II типа). Рассмотрение такой излучающей системы особенно важно потому, что к ней может быть сведено излучение электромагнитных волн электроном атома.

Согласно классическим представлениям электрон движется в атоме вокруг ядра по эллиптической орбите. В механике мы рассматривали сложение взаимно перпендикулярных колебаний и установили, что в этом случае траектория движения частицы также представляет собой эллипс. Поэтому для электрона в атоме движение по эллипсу можно разложить на два взаимно перпендикулярных колебания. Таким образом, излучение атома можно свести к излучению элементарного диполя, так как длина волны видимого света ($\sim 10^{-7}$ м) на много порядков больше диаметра орбиты электрона ($\sim 10^{-10}$ м).

В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля носит очень сложный характер, но она очень сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях r , значительно превышающих длину волны ($r \ll \lambda$). Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим, так как r много больше размеров диполя и его можно считать точечным излучателем. В волновой зоне картина поля будет проще потому, что в ней поле не связано с колебаниями диполя и свободно распространяется в пространстве. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке взаимно перпендикулярны, а также перпендикулярны к так называемому лучу, т.е. радиусу – вектору, проведенному в данную точку пространства из элементарного диполя.

В каждой точке волновой зоны векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены так, как показано на рис. 63 и колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды колебаний E_m и H_m зависят от расстояния r до излучателя, и от угла ϑ между направлением луча $\vec{r}$ и осью диполя. Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

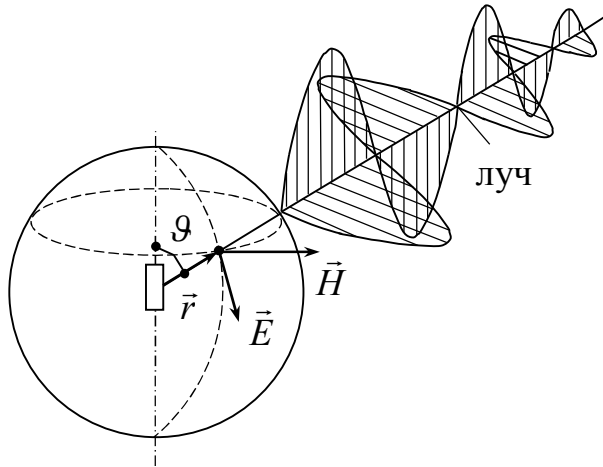


Рис. 63. Излучение
электромагнитного диполя

чения диполя (рис. 64). Из рис. 79 видно так же, что в направлении, совпадающем с осью диполя, электромагнитная энергия не излучается; в то же время в направлении, перпендикулярном оси диполя, излучение электромагнитной энергии максимально.

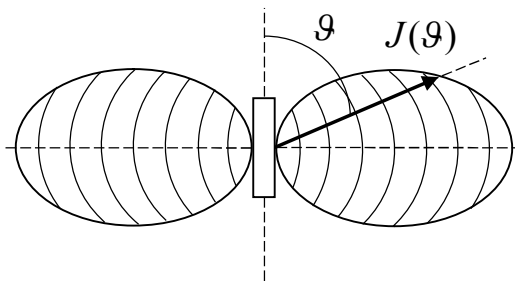


Рис. 64. Диаграмма
направленности излучения

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

Отсюда следует, что величина интенсивности излучения диполя в волновой зоне

$$J \sim \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}.$$

Графическая зависимость $J(\vartheta)$ для диполя любого типа при заданном значении r , приводимая в полярных координатах, называется диаграммой направленности излу-

чения. От свойств диполя I типа величина J зависит следующим образом

$$J \sim p_{\max}^2 \omega^4.$$

Таким образом интенсивность J (или мощность) излучения пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Излучение на частоте 50 Гц является незначительным.

Для излучающего диполя II типа формулу для интенсивности излучения можно записать так

$$J \sim Q^2 a^2,$$

где Q – заряд диполя, a – ускорение движущегося заряда.

Эта формула сохраняет свое значение и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, излучает электромагнитные волны, причем мощность излучения вычисляется по формуле для интенсивности J . Излучением электромагнитных волн в видимом диапазоне космическими частицами, попавшими в магнитное поле Земли и движущимися с ускорением под действием силы Лоренца, объясняется северное сияние.

При $a = 0$ интенсивность излучения обращается в нуль. Следовательно, электрон, движущийся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо в том случае, если скорость электрона $v_{эл}$ не превышает скорости света $v_{св}$ в среде, в которой движется электрон:

$$v_{св} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

В случае $v_{эл} > v_{св}$ наблюдается свечение Черенкова–Вавилова (российские физики), открытое в 1934 году (нобелевская премия, 1958г.).

Электромагнитные волны были использованы через семь лет после опытов Герца. Это сделал А.С. Попов, впервые в мире пославший радиogramму. Он же создал первый в мире радиоприемник.

ГЛАВА IX. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 35. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности. Постулаты Эйнштейна

После возникновения теории Максвелла в физике появилось представление о том, что электромагнитные волны распространяются в особой среде, получившей название электромагнитного эфира. Связав с эфиром систему отсчета и используя механический принцип относительности Галилея (итальянский физик), можно было бы создать абсолютную систему отсчета, по отношению к которой удобно рассматривать движение тел, других систем отсчета и распространение волн.

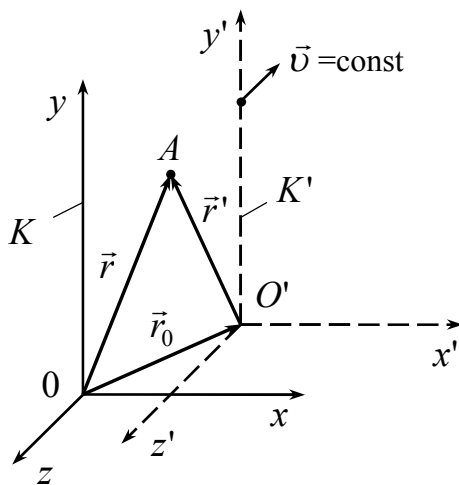


Рис. 65. Системы отсчета

Рассмотрим принцип относительности Галилея. Для этого изобразим две системы отсчета – инерциальную систему $K(x, y, z)$ которую условно будем считать неподвижной, и систему $K'(x', y', z')$, движущуюся относительно K равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ (рис. 65). Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то из рис. 80 видно, что

$$\vec{r}_0 = \vec{v}t.$$

Найдем связь между координатами материальной точки (м.т.) A в обеих системах:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' = \vec{v}t + \vec{r}'.$$

В проекциях на оси координат, например, для Ox получим:

$$x = x' + v_x t.$$

Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах отсчета течёт одинаковым образом, т.е.

$$t = t'$$

получим совокупность 4-х уравнений, которые называются преобразованиями Галилея:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + v_x t, \\ y &= y' + v_y t, \\ z &= z' + v_z t, \\ t &= t' \end{aligned} \right\}.$$

Записанные соотношения справедливы лишь в рамках классической механики при $v \ll c$, где c – скорость света в вакууме. Продифференцировав выражение для радиуса – вектора по времени, получим уравнение для скорости м.т. в системе K :

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}, \text{ или } u_x = u'_x + v_x,$$

которое представляет собой правило сложения скоростей в классической механике. Здесь $\vec{u}'$ – скорость м.т. A в системе отсчета K' .

Ускорение м.т. A в системе отсчета K (вспомним, что $\vec{v} = \text{const}$)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(u' + \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Таким образом, ускорение м.т. A в системах отсчета K и K' , движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

В уравнение II закона Ньютона входит ускорение. Отсюда вытекает, что силы, действующие на м.т. A в системах K и K' так же будут одинаковы. Следовательно, уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е. являются инвариантными (неизменными) по отношению к преобразованиям координат.

Положение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно называется механическим принципом относительности Галилея.

Согласно Ньютону, абсолютные пространство и время представляют собой самостоятельные сущности, которые не зависят ни друг от друга, ни от находящихся в них объектов, ни от протекающих в них процессов.

Казалось бы, никаких препятствий для создания абсолютной системы отсчета не существует, оставалось только экспериментально обнаружить эфир, или, как говорили, «эфирный ветер», обдувающий Землю при ее движении вокруг Солнца. Однако самые точные опыты показали, что эфирного ветра, и, следовательно, эфира не существует. Попытки объяснить отрицательный результат, не отказываясь от гипотезы о мировом эфире, оказались несостоятельными.

Логическое объяснение этих опытных факторов было дано в 1905 году немецким физиком Эйнштейном. Для этого ему пришлось изменить существовавшие в то время представления о пространстве и времени.

Специальная теория относительности (СТО) Эйнштейна представляет собой физическую теорию пространства и времени, в которой из классической механики перенесены предположения о том, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Однако специальная теория относительности отказалась от понятий абсолютного пространства и абсолютного

времени, поскольку эти понятия противоречили принципу постоянства скорости света.

Основой специальной (или частной) теории относительности являются два постулата Эйнштейна:

I. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электромагнитные, оптические), проведенные в любой инерциальной системе отсчета, не могут установить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника или приемника света и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Первый постулат Эйнштейна является обобщенным принципом относительности Галилея на любые физические процессы и утверждает, что уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета.

Согласно второму постулату Эйнштейна постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности является частным случаем так называемой общей теории относительности, или теории тяготения. Согласно этой теории пространство и время органически связаны между собой и образует единую форму существования материи – пространство-время. Свойства же пространства-времени в данной области Вселенной определяются действующими полями тяготения.

Специальная теория относительности часто называется также релятивистской теорией, а специфические явления, описываемые этой теорией – релятивистскими эффектами (от англ. relative – относительный). Постулаты Эйнштейна и СТО установили новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна нашли надежное экспериментальное подтверждение и устойчиво обосновали постулаты Эйнштейна.

§ 36. Преобразования Лоренца

С помощью преобразований Галилея мы установили, что скорость м.т. A в системе K вычисляется так (запишем в проекциях на Ox):

$$u_x = u'_x + v_x.$$

Если в системе K' световой сигнал распространяется со скоростью c ($u'_x = c$), то в системе K скорость сигнала окажется равной

$$u_x = c + v_x > c,$$

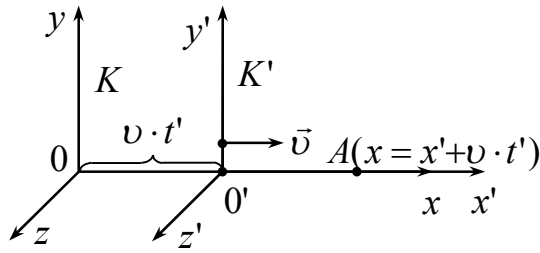


Рис. 66. Относительное движение системы отсчета K и K'

что противоречит принципу инвариантности (или постоянства) скорости света. Поэтому преобразования Галилея необходимо заменить на другие. Устранить противоречие можно, если предположить, что время в различных системах отсчета течет неодинаково.

Пусть система K' движется со скоростью $\vec{v}$ относительно системы K (рис. 66). Из однородности пространства следует, что формулы преобразования координат не должны изменяться при переносе начала координат, т.е. при замене x на $x + a$ и т.д. Этому условию может удовлетворять только линейное преобразование вида $y = kx + b$ (эта функция выражается на графике прямой линией, отсюда термин – «линейное»). Расположим системы отсчета таким образом, чтобы плоскость $y = 0$ совпала с плоскостью $y' = 0$, а плоскость $z = 0$ совпала с плоскостью $z' = 0$. В этом случае координаты y и y' могут быть связаны соотношением только такого вида (в силу равноправности системы отсчета):

$$y = \varepsilon \cdot y' \text{ и } y' = \varepsilon \cdot y.$$

Это следует из однородности пространства. Перемножив формулы, получим

$$\varepsilon^2 = 1; \varepsilon = \pm 1, \text{ т.е. } y = y'.$$

Знак «+» соответствует одинаково направленным осям. Тот же результат получится и для осей Oz и $O'z'$:

$$z = z'.$$

Начало координат т. O системы K имеет координату $x = 0$ и $x' = -v \cdot t'$ в системе K' . При возвращении т. O' в т. O выражение $x' + v \cdot t'$ обращается в нуль, т.к. в этом случае $x' = 0$ и $v \cdot t' = 0$. Одновременно должна обращаться в нуль и координата x т. O' (см. таблицу):

Таблица

т. O		т. O'	
K	K'	K	K'
$x = 0$	$x' = -v \cdot t'$	$x = v \cdot t$	$x' = 0$

Для этого преобразование координат (переход от одной координаты к другой) должно быть линейным, т.е. иметь вид:

$$x = \gamma(x' + v \cdot t').$$

Введение времени t' (со штрихом) означает, что, в соответствии с постулатом постоянства скорости света, необходимо учесть, что время в си-

стемах отсчета K и K' течет неодинаково. Математически это обстоятельство выражается введением коэффициента γ .

Аналогично, начало координат системы отсчета K' имеет координату $x'=0$ в своей же системе K' и координату $x=v \cdot t$ в системе K . Отсюда следует, аналогично предыдущим рассуждениям, что

$$x' = \gamma(x - v \cdot t).$$

Из обеих формул видно, что они одновременно содержат и координаты пространства и время, что отражает их органическую связь между собой в теории единого пространства-времени.

Таким образом, чтобы получить новые, взамен галилеевских, преобразования координат и времени, необходимо определить коэффициент γ , который, в силу полного равноправия систем K и K' , в обоих случаях должен быть одинаковым.

Чтобы найти формулу для определения, например, момента времени t какого-либо события в системе K , исключим x из уравнения для x' и решим получившееся уравнение относительно t :

$$x' = \gamma[\gamma(x' + v \cdot t') - v \cdot t'] = \gamma^2 x' + \gamma^2 v \cdot t' - \gamma v \cdot t;$$

$$t = \frac{\gamma^2}{\gamma v} x' + \frac{\gamma^2}{\gamma v} v \cdot t' - \frac{x'}{\gamma v} = \gamma \frac{x'}{v} + \gamma \cdot t' - \frac{x'}{\gamma \cdot v} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = \gamma \left[t' + \frac{x'}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right].$$

Для нахождения γ используем постулат постоянства скорости света. Предположим, что в момент времени $t = t' = 0$ начала координат совпадают и вдоль оси Ox посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране, находящемся от т. O на расстоянии a (рис. 67). Это событие происходит так же через отрезок времени b в системе K , и a' и b' в системе K' , причем $a = cb$, $a' = cb'$, где c – скорость света в пустоте. Переходя от длин отрезков к координатам и моментам времени, получим:

$$a = x - 0 = x, \quad x = cb, \quad t = b,$$

$$a' = x' - 0 = x', \quad x' = cb', \quad t' = b'.$$

Подставляя в выражения:

$$x = \gamma(x' + v \cdot t') \text{ и } x' = \gamma(x - v \cdot t),$$

получим:

$$cb = \gamma(cb' + v \cdot b') = \gamma(c + v)b',$$

$$cb' = \gamma(cb - v \cdot b) = \gamma(c - v)b,$$

где промежутки времени

$$t - 0 = b; \quad t' - 0 = b'.$$

Перемножив выражения видим, что

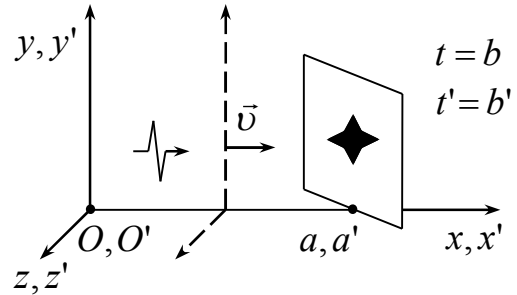


Рис. 67. Распространение светового сигнала

$$c^2 b b' = \gamma^2 (c^2 - v^2) b b'.$$

Отсюда

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Теперь вычислим момент времени t и координату x события в системе K :

$$\left\{ \begin{aligned} t &= \frac{t' + \frac{x'}{v} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)^2} \right]}{\sqrt{\dots}} = \frac{t' + \frac{x'}{v} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]}{\sqrt{\dots}} = \frac{t' + \frac{x'}{v} \left[1 - 1 + \frac{v^2}{c^2} \right]}{\sqrt{\dots}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{\dots}}; \\ x &= \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', \sqrt{\dots} \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned} \right.$$

Дробь $\frac{v}{c}$ часто обозначают как β .

Точно так же можно определить момент времени t и координату события в системе K' :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y; z' = z; \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Последние выражения носят название преобразований Лоренца.

Из сравнения приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при v . Это очевидно, так как, если скорость движения системы K' относительно системы K равна « v », то скорость движения K относительно K' равна « $-v$ ».

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света), т.е. когда $v \ll c$, они переходят в преобразования Галилея. При $v > c$ выражения становятся мнимыми, т.е. не имеют физического смысла.

Пространственные и временные преобразования Лоренца являются взаимозависимыми, поскольку в формулу преобразования координат входит время и наоборот. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени,

а рассматривает неразрывно связанные пространственно-временные координаты, образующие четырехмерное пространство.

§ 37. Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца вытекают необычные с точки зрения классической механики следствия.

1. Одновременность событий в различных системах отсчета. Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события, например, вспышки света (рис. 68) В системе K'

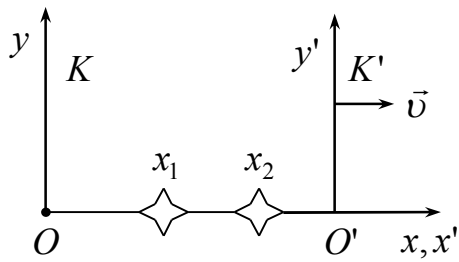


Рис. 68. К одновременности событий в системах K и K'

им соответствуют координаты x'_1 и x'_2 и моменты времени t'_1 и t'_2 . Если события в системе K происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то согласно преобразованиям Лоренца

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) + (t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\text{и } x'_1 = x'_2, t'_1 = t'_2,$$

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если же события в системе K одновременны, но пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), то в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, x'_2 = \frac{x_2 - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, t'_1 = \frac{t - \frac{v \cdot x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; t'_2 = \frac{t - \frac{v \cdot x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т.е.

$$x'_1 \neq x'_2; t'_1 \neq t'_2.$$

Таким образом, в системе K' эти события, оставаясь пространственно разобращенными, оказываются и неодновременными. В зависимости от знака « v » разность $t'_2 - t'_1$ может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Это относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь. Причинно связанные события (например, выстрел и попадание пули в мишень) ни в одной из систем отсчета не будут одновременными, и во всех системах отсчета событие, являющееся причиной, будет предшествовать следствию.

2. Длина тел в различных системах отсчета. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси Ox и покоящийся относительно системы K' (рис. 69). Длина стержня в системе K' $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, а индекс «0» показывает, что в системе отсчета K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K , относительно которой он движется со скоростью v . Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе K в один и тот же момент времени t . Разность координат $x_2 - x_1 = l$. Это и есть длина l стержня в системе K . Используя преобразования Лоренца, получим

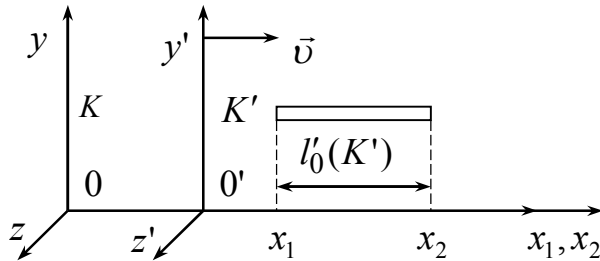


Рис. 69. К определению длины тел в системах отсчета K и K'

на l стержня в системе K . Используя преобразования Лоренца, получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - v \cdot t}{\sqrt{\dots}} - \frac{x_1 - v \cdot t}{\sqrt{\dots}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\dots}} = \frac{l}{\sqrt{\dots}}.$$

Так как $\sqrt{\dots} < 1$, то и

$$\frac{l}{l'_0} = \sqrt{\dots} < 1; \text{ т.е. } l'_0 > l.$$

Таким образом длина стержня, измеренного в системе отсчета, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. В направлении осей y и z размеры стержня одинаковы во всех системах отсчета. У движущихся тел размеры их в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость движения. Это явление называется лоренцевым сокращением.

3. Длительность событий в различных системах отсчета

Пусть в точке с координатой x' , неподвижной относительно системы K' , происходит событие, длительность которого (т.е. разность показаний часов по окончании и в начале события), составляет $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. В системе K , относительно которой точка движется, началу и окончанию события соответствуют моменты времени

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{\dots}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{\dots}}.$$

Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{\dots}}, \text{ или } \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{\dots}}.$$

Здесь $\Delta t'$ – длительность события, определенная по часам, движущимся вместе с телом. Промежуток времени Δt измерен по часам системы K , относительно которой тело движется со скоростью v . Так как $\sqrt{1-\beta^2} < 1$, то $\Delta t' < \Delta t$, т.е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

Существует другое истолкование – интервал времени, отсчитанный по часам системы K' , с точки зрения наблюдателя в системе K , оказывается короче интервала времени, отсчитанного по часам K , т.е. движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся.

Это следствие из преобразований Лоренца получено экспериментальное подтверждение. В составе космических лучей есть элементарные частицы – мюоны. Среднее время жизни мюонов по часам, движущимися вместе с ними, составляет $\sim 2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время они могут пролететь расстояние $l = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 600 \text{ м}$, однако проходят путь длиной 20–30 км. Дело в том, что часы связанные с наблюдателем (Землей) идут большее время, поэтому в системе отсчета, связанной с Землей, мюоны проходят большее расстояние.

§ 38. Релятивистский закон сложения скоростей

Формулы сложения скоростей классической механики противоречат второму постулату Эйнштейна, поэтому необходимо получить новые формулы, вытекающие из преобразований Лоренца.

Рассмотрим движение м.т. в системе K' . Эта система движется относительно системы K со скоростью v . В системе K проекции вектора скорости м.т. на оси Ox , Oy и Oz :

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

В системе K'

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца

$$dx = \frac{dx' + v \cdot dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + v \frac{dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Проведем вычисления

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v \cdot dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + v \frac{dx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x};$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1-\beta^2}}{dt' + v \frac{dx'}{c^2}} = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Если м.т. движется параллельно оси Ox , то скорость u относительно системы K совпадает с u_x , а скорость u' относительно K' равна u'_x . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + v \frac{u'}{c^2}}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - v \frac{u}{c^2}}.$$

Видно, что при малых значениях скоростей (v , u' и $u \ll c$), формулы переходят в формулы сложения скоростей в классической механике: $u = u' + v$; $u' = u - v$. Таким образом законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна. В самом деле, если $u' = c$, то

$$u = \frac{c + v}{1 + c \frac{v}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = c.$$

Этот результат является очередным подтверждением справедливости специальной теории относительности. Таким образом, скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить. Если свет рассматривать в какой-либо среде, то его скорость вычисляется так:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n},$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость; μ – относительная магнитная проницаемость; n – показатель преломления среды, $n \geq 1$.

§ 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки и закон взаимосвязи массы и энергии

Согласно представлениям классической механики масса тела есть величина постоянная. Однако в конце XIX столетия на опытах с быстро движущимися электронами было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а конкретно – возрастает с увеличением скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 – масса покоя м.т., т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой м.т. находится в покое. Масса « m » называется релятивистской массой.

Оказывается, что формулы классической динамики можно сохранить, если в них использовать не «классическую» массу, а релятивистскую. Тогда основной закон релятивистской динамики для м.т. имеет вид (здесь произведена общепринятая замена u' на v):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \text{ или } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ – релятивистский импульс м.т.

В силу однородности пространства в релятивистской механике выполняется закон сохранения релятивистского импульса: релятивистский импульс замкнутой системы тел сохраняется. Отсюда следует закон сохранения релятивистской массы: полная релятивистская масса замкнутой системы тел при любых происходящих в ней процессах сохраняется.

Из последних формул видно, что при скоростях, значительно меньших скорости света, масса $m = m_0$ и может считаться постоянной, импульс $\vec{p} = m_0 \vec{v}$, а основной закон релятивистской динамики переходит в основной закон классической динамики. Следовательно, условием применимости классической (ньютоновской) механики для описания каких-либо процессов является условие $\vec{v} \ll \vec{c}$. Таким образом, классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями.

Найдем релятивистское выражение для энергии м.т. Для этого левую и правую часть основного закона релятивистской динамики умножим на $\vec{v} dt$:

$$\vec{F} \vec{v} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \vec{v} dt.$$

Левая часть – это работа dA , совершаемая над м.т. за время dt . Из закона сохранения энергии следует, что работа, совершаемая над м.т., должна быть равна увеличению энергии dE этой м.т.:

$$\vec{F} \vec{v} dt = dA = dE.$$

Таким образом

$$dE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \vec{v} dt = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Преобразуем правую часть выражения, используя свойства скалярного произведения двух векторов: $\vec{v}^2 = v^2$, $\vec{v} d\vec{v} = v dv$. Получим

$$\begin{aligned}
dE = \vec{v} \left\{ \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\vec{v} + \frac{m_0 \vec{v} \left(\frac{v}{c^2} dv \right) (-2)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right\} &= \frac{m_0 \left[\vec{v} \cdot d\vec{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \vec{v}^2 \cdot \frac{v}{c^2} dv \right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \\
&= \frac{m_0 \left[\vec{v} \cdot d\vec{v} - \vec{v} \cdot d\vec{v} \frac{v^2}{c^2} + \vec{v}^2 \frac{v}{c^2} dv \right]}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} = \frac{m_0 \vec{v} \cdot d\vec{v}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).
\end{aligned}$$

Взяв неопределенный интеграл от левой и правой частей этого выражения, получим

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{const.}$$

Эйнштейн предположил, что $\text{const} = 0$, тогда

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2.$$

Это уравнение выражает фундаментальный закон природы – закон взаимосвязи массы и энергии: полная энергия системы м.т. равна произведению ее полной релятивистской массы и квадрата скорости света в вакууме.

В силу однородности времени в релятивистской механике, как и в классической, выполняется закон сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы частиц сохраняется.

Если $v = 0$, то $E = m_0 c^2$. Эта величина называется энергией покоя частицы. Эта энергия покоя представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с движением частицы как целого.

Классическая механика энергию покоя не учитывает, считая, что при $v = 0$ кинетическая энергия покоящегося тела равна нулю. Релятивистское выражение для кинетической энергии частицы имеет вид:

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

которое при $v \ll c$ принимает классический вид: $E_K = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$.

Найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы. Для этого из выражения для релятивистского импульса p выделим скорость и подставим в выражение для полной энергии E .

В результате получим, что

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Наоборот, релятивистский импульс $\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$.

Закон взаимосвязи релятивистской массы и энергии подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов.

Таким образом, из рассмотренного материала следуют новые представления человечества об окружающей природе: масса частицы не остается постоянной величиной, а зависит от скорости частицы; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; масса и энергия оказываются связанными друг и другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи – пространство-время.

ГЛАВА X. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Тема 18. Интерференция света

§ 40. Основные законы оптики. Принцип Ферма

Волновой оптикой называется раздел физической оптики, изучающий совокупность явлений, в которых проявляется волновая природа света. Важнейшими понятиями и законами волновой оптики являются следующие.

Свет (или световые волны) – это электромагнитные волны, на которые реагирует зрение человека. Световым лучом называется линия, вдоль которой распространяется энергия световой волны. Совокупность световых лучей, излучаемых элементом поверхности источника света в пределах малого телесного угла величиной до 0,01 стерadian называется световым пучком. Телесный (объемный) угол – это часть пространства, заключенная внутри замкнутой конической поверхности; единицей измерения телесного угла является стерadian (ср). $1 \text{ ср} = 7.96 \cdot 10^{-2}$ телесного угла, опирающегося изнутри на сферу. Таким образом, все окружающее человека пространство представляет собой телесный угол величиной 4π ср.

Одной из основных световых величин является световой поток Φ . Это мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению, т.е. по его действию на селективный (от лат. selector – сортировщик) приёмник света с наперёд известной чувствительностью к волнам различной длины. Дело в том, что при оптических измерениях используются разнообразные приёмники излучения (например, глаз, фотоэлемент, фотоумножитель и др.), которые обладают неодинаковой чувствительностью (восприимчивостью) к различным длинам волн. Например, глаз человека наиболее чувствителен к излучению длиной волны 0,555 мк – зелёная часть спектра. Если же предмет излучает или отражает красную часть спектра, то для получения того же зрительного ощущения, что для зелёной части спектра, энергия излучения красного предмета должна быть больше в несколько раз.

Основными законами оптики являются следующие.

Закон прямолинейного распространения света: свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно. Этот закон нарушается, если, например, свет проходит сквозь очень малые отверстия, диаметр которых соизмерим с длиной волны.

Закон независимости световых пучков: световой эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно

остальные пучки, или они отсутствуют. Из этого следует, например, что при пересечении двух световых пучков (рис. 70) их свойства до и после пересечения одинаковы, т.е. I и II части пучка 1 совершенно идентичны.

Закон отражения: отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол i_1' отражения равен углу i_1 падения (рис. 71):

$$i_1' = i_1.$$

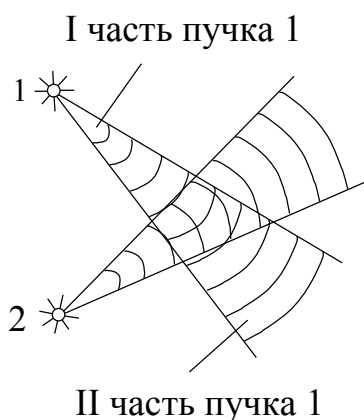


Рис. 70. Независимое распространение световых волн

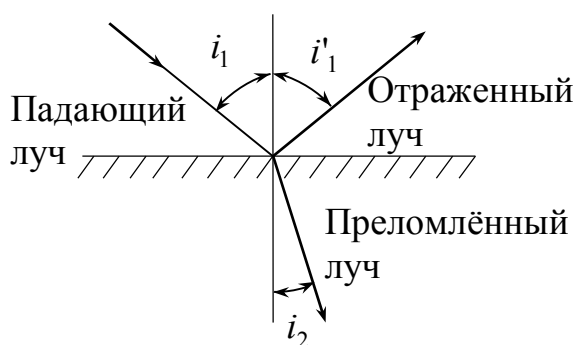


Рис. 71. Отражение и преломление света на границе двух сред

Закон преломления (закон Снеллиуса, голландский физик): лучи падающий, преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела двух сред в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой, например воды относительно стекла.

Очевидно, что если определять относительные показатели преломления для каждой произвольной пары сред, то их число будет очень велико, поэтому разумно определять показатели преломления различных сред относительно одной и той же среды, например, вакуума. Показатель преломления любой среды относительно вакуума называется абсолютным. В этом случае относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления (а.п.п.) (или просто показателей преломления). А.п.п. — показатель преломления данного вещества относительно вакуума, показатель преломления которого равен единице, так как внутри одной и той же среды границы раздела не существует и преломления луча не происходит. Таким образом,

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ или } n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

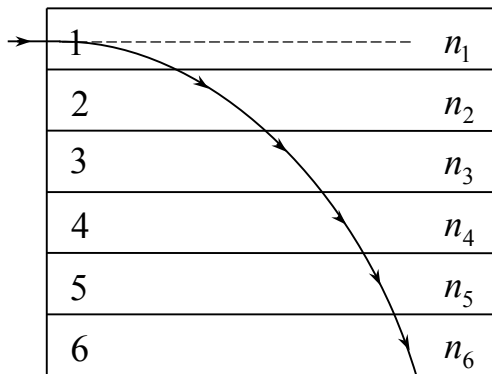
Здесь n_2 – показатель преломления воды относительно вакуума, n_1 – показатель преломления стекла относительно вакуума.

Значения n – приведены в таблицах. При условии, что $n = \text{const}$ в любой точке среды, среда называется оптически однородной.

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления, то может иметь место явление, называемое полным отражением. При этом падающий луч не преломляется во вторую среду, а полностью отражается в первую среду. Угол падения луча называется предельным углом полного отражения, если угол преломления $i_2 = \pi/2$.

Если оптическая среда неоднородна ($n \neq \text{const}$), то траектория светового луча определяется по принципу Ферма: в оптически неоднородной среде свет распространяется по такой траектории, для прохождения по которой ему необходимо минимальное время. Поскольку скорость распространения света определяется по формуле (электромагнитная теория Максвелла)

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$



$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > n_5 > n_6$$

Рис. 72. Траектория светового луча в оптически неоднородной среде

где c – скорость света в пустоте, то свет распространяется в той части среды, где скорость больше, т.е. там, где показатель преломления среды меньше (рис. 72).

В соответствии с теорией Максвелла свет представляет собой электромагнитные волны, например, монохроматические электромагнитные волны, т.е. волны одной частоты, которые описываются уравнениями (при распространении плоской волны вдоль оси Ox в вакууме):

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $(\omega t - kx + \varphi)$ – фаза волны, E_0 и H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – круговая частота волны; $k = \omega/v$ – волновое число; φ – начальные фазы колебаний в начале координат.

Поскольку физиологическое, фотохимическое и другие воздействия оказывает вектор $\vec{E}$, то уравнение для него называют уравнением световой волны:

$$A = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $\vec{A}$ – световой вектор. Как показал Максвелл, $\vec{A} \equiv \vec{E}$.

Многие световые эффекты имеют место при условии когерентности световых волн. Когерентность – это согласованное протекание во времени и в пространстве нескольких колебательных и волновых процессов. Этому условию удовлетворяют монохроматические волны. Таким образом, волны называют когерентными, если разность их фаз остается постоянной во времени.

Если в некоторой точке среды, в которой распространяются световые волны, разность фаз двух колебаний изменяется очень медленно, то в этом случае колебания остаются когерентными в течение некоторого времени, пока разность их фаз не успела измениться на величину, сравнимую с π . Если сравнивать фазы одного и того же колебания в различные моменты времени, разделенные интервалом τ , то при достаточно большом τ случайное изменение фазы колебаний может превысить π . Это означает, что через время τ колебание «забывает» свою первоначальную фазу и становится некогерентным самому себе. Временем когерентности τ_0 называют время, за которое случайное изменение фазы волны достигает примерно π .

При распространении плоской электромагнитной волны в однородной среде фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение τ_0 . За это время волна распространяется на расстояние $c\tau_0$. При этом колебания в точках, удаленных друг от друга на расстояние, большее $c\tau_0$ вдоль направления распространения волны, оказываются некогерентными. Расстояние $c\tau_0$ вдоль направления распространения волны называют длиной когерентности.

§ 41. Интерференция света. Условия интерференционных максимумов и минимумов

Пусть источники световых волн совершают гармонические колебания $A = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где под A понимают напряженность E электрического поля волны, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях. Пусть далее идущие от этих источников две когерентные монохроматические волны накладываются в точке с координатой x ; в результате колебания светового вектора каждой волны описываются уравнениями:

$$A_1 = A_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad A_2 = A_{02} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Напряженности электрического и магнитного полей подчиняются принципу суперпозиции, поэтому амплитуда результирующего колебания по теореме косинусов (см. § 24, часть I)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Так как волны когерентны, то $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, поэтому интенсивность результирующей волны ($J \sim A^2$)

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В точках пространства, где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, $J > J_1 + J_2$; где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, $J < J_1 + J_2$. Следовательно, при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение светового потока (взаимное усиление или ослабление световых волн), в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называют интерференцией света. При интерференции энергия из точки пространства, где наблюдается минимум интенсивности светового потока (а для человека это минимум освещенности), переходит в точку пространства, где наблюдается максимум интенсивности (освещенности). В результате закон сохранения энергии не нарушается.

Для некогерентных волн разность $\varphi_2 - \varphi_1$ непрерывно изменяется, поэтому среднее во времени значение $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ равно нулю и интенсивность результирующей волны всюду одинакова.

Перейдём от уравнений колебаний светового вектора к уравнениям световых волн. Для получения когерентных волн применяют метод разделения волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных путей в пространстве накладываются друг на друга и создают интерференционную картину.

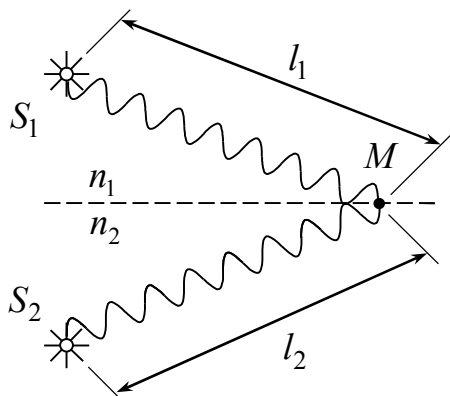


Рис. 73. Наложение двух когерентных волн

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в определенных точках S_1 и S_2 , которые становятся источниками световых волн (рис. 73). До точки M , в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна в среде с показателем преломления n_1 прошла путь l_1 , вторая – в среде с показателем преломления n_2 – путь l_2 . Если в источниках S_1 и S_2 фаза колебаний равна ωt , то в точке M первая волна возбуждает колебание

$$A_{1M} = A_1 \cos \omega(t - l_1 / v_1) = A_1 \cos \Phi_1,$$

вторая

$$A_{2M} = A_2 \cos \omega(t - l_2 / v_2) = A_2 \cos \Phi_2,$$

где $v_1 = c / n_1$, $v_2 = c / n_2$ – соответственно фазовые скорости первой и второй волны, c – скорость света в вакууме.

Разность фаз δ двух когерентных волн от источников S_1 и S_2 .

$$\begin{aligned}\delta = \Phi_1 - \Phi_2 &= \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{l_2 n_2}{c} - \frac{l_1 n_1}{c} \right) = \frac{2\pi}{cT} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (\underbrace{l_2 n_2}_{=r_2} - \underbrace{l_1 n_1}_{=r_1}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta.\end{aligned}$$

Здесь λ_0 – длина световой волны в вакууме, так как c – скорость света в вакууме.

Произведение геометрической длины l пути световой волны в данной среде и показателя n преломления этой среды называется оптической длиной пути $r = l \cdot n$, а $\Delta = r_2 - r_1$ – разность оптических длин проходимых волнами путей – называется оптической разностью хода.

В соответствии с вышеизложенным уравнение световой волны для любой среды примет вид

$$A = A_0 \cos(\omega t - \omega \frac{l}{v} + \varphi) = A_0 \cos(\omega t - kr + \varphi),$$

где r – оптическая длина пути (вместо x – для вакуума).

Из интерференции упругих волн следует, что, если геометрическая разность хода упругих волн равна четному числу полудлин волн

$$\Delta_{упр} = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \dots, \text{ то } \delta_{упр} = \frac{2\pi}{\lambda} (\pm 2m \frac{\lambda}{2}) = \pm 2m\pi,$$

т.е. колебания частиц, возбуждаемые в точке М обеими волнами, находятся в одинаковой фазе, амплитуды колебаний частиц складываются и в точке М имеет место максимум интерференции. В случае интерференции световых волн следует геометрическую разность хода заменить на оптическую. Подставив значение разности фаз $\delta_{упр}$, полученное для упругих волн, в выражение для вычисления разности фаз δ для световых волн, получим, что условие

$$\Delta = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2}$$

является условием интерференционного максимума и для световых волн. Если $J_1 = J_2$, то $J_{\Sigma} = J + J + 2J = 4J$.

Если оптическая разность хода равна нечётному числу полудлин волн λ_0

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, m = 0, 1, 2, \dots \text{ то } \delta = \pm (2m + 1)\pi,$$

и колебания светового вектора, возбуждаемые в точке М обеими волнами, находятся в противофазе, т.е. амплитуды колебаний вычитаются. Следовательно, условие

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, m = 0, 1, 2, \dots$$

является условием интерференционного минимума. В этом случае

$$J_{\Sigma} = J + J - 2J = 0.$$

Повторим, что участки поверхности, для которых имеет место максимум интенсивности, человек воспринимает как хорошо освещенные; минимуму интенсивности соответствует чёрный цвет участков поверхности.

§ 42. Интерференционная картина от двух источников

Для осуществления интерференции света необходимо получить когерентные световые пучки, для чего применяются различные приемы. До появления лазеров во всех приборах для наблюдения интерференции света когерентные пучки получали разделением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника. Практически это можно осуществить с помощью экранов и отверстий, зеркал и преломляющих тел (призм).

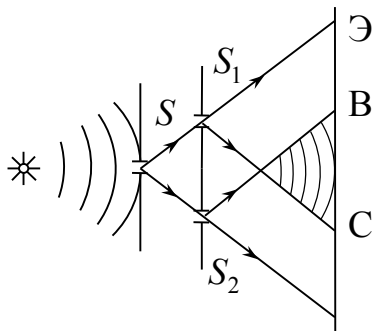


Рис. 74. Схема метода Юнга

Исторически первым был метод Юнга (английский физик). Источником света служила ярко освещенная щель S (рис. 74), от которой световая волна падает на две узкие равноудаленные щели S_1 и S_2 , параллельные щели S . Таким образом, щели S_1 и S_2 играют роль когерентных источников. Интерференционная картина (область BC) наблюдается на экране $\mathcal{E}$, расположенном на некотором расстоянии параллельно S_1 и S_2 .

Произведем расчет интерференционной картины. Щели S_1 и S_2 находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 90) и являются когерентными источниками света. Интерференция света наблюдается в произвольной точке A экрана, параллельного обоим щелям и расположенного от них на расстоянии L , причем $L \gg d$.

Начало отсчета выбрано в точке O , симметричной относительно щелей. Интенсивность в любой точке A экрана, лежащей на расстоянии y от точки O , определяется оптической разностью хода: $\Delta = r_2 - r_1$. Из рис. 75 имеем:

$$r_2^2 = L^2 + (y + d/2)^2;$$

$$r_1^2 = L^2 + (y - d/2)^2,$$

откуда $r_2^2 - r_1^2 = 2yd$, или

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2yd; \quad r_2 - r_1 = \frac{2yd}{r_2 + r_1}.$$

Из условия $L \gg d$ следует, что $r_2 + r_1 \approx 2L$, поэтому

$$r_2 - r_1 = \Delta = \frac{2yd}{2L} = \frac{yd}{L}.$$

Используя условия интерференционных максимумов и минимумов и последнюю формулу получим для максимумов:

$$\Delta = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2} = \frac{y_{\max} d}{L};$$

$$y_{\max} = \pm 2m \frac{\lambda_0 L}{2d} = \pm \frac{m \lambda_0 L}{d},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

для минимумов:

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} = \frac{y_{\min} d}{L}; \quad y_{\min} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0 L}{2d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Соответственно число m носит название порядка интерференционного максимума или минимума (см. рис. 75).

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами) называется шириной интерференционной полосы и вычисляется так:

$$\Delta y = y_{\max 2} - y_{\max 1} = \frac{2\lambda_0 L}{d} - \frac{1\lambda_0 L}{d} = \frac{\lambda_0 L}{d}.$$

Ширина Δy не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных L , d и λ_0 . Кроме того, Δy обратно пропорциональна d ; следовательно, при большом расстоянии между источниками, например при $d \approx L$, $\Delta y = \lambda_0$. Для видимого света $\lambda_0 \approx 10^{-7}$ м, поэтому отдельные полосы становятся неразличимыми. Четкая, доступная для визуального наблюдения интерференционная картина имеет место при $L \gg d$ (это условие и принималось в расчете). По измеренным значениям L , d и Δy можно экспериментально определить длину световой волны. Интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос, параллельных друг другу (см. рис. 75). Главный (нулевой) максимум проходит через точку О. Описанная картина справедлива для монохроматического света $\lambda_0 = \text{const}$. Если использовать белый свет, представляющий собой непрерывный набор длин волн от 0,4 мкм (фиолетовая граница спектра) до 0,76 мкм (красная граница спектра), то интерференционные максимумы для каждой длины волны будут смещены друг относительно друга; или, как говорят, разложены в спектр (от лат. spectrum – представление) и име-

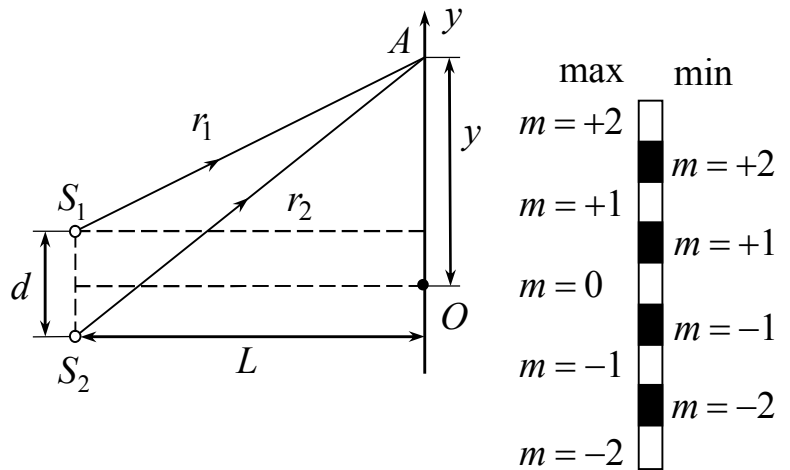


Рис. 75. К расчету интерференционной картины от двух когерентных источников

ют вид радужных полос. Только для $m = 0$ максимумы для всех длин волн совпадают, и в середине экрана будет наблюдаться белая полоса, по обе стороны которой симметрично расположатся спектрально окрашенные полосы максимумов первого, второго и т.д. порядков (ближе к белой полосе будут находиться зоны фиолетового цвета, дальше – зоны красного цвета).

§ 43. Интерференция света в тонких пленках.

Кольца Ньютона

В природе можно наблюдать радужное окрашивание тонких пленок (масляные пленки на воде, мыльные пузыри, оксидные пленки на металлах), возникающее в результате интерференции света, отраженного верхней и нижней поверхностями пленки. Пусть на плоскопараллельную прозрачную пленку с показателем преломления n и толщиной d под углом i падает плоская монохроматическая волна (для простоты рассмотрим один луч (рис. 76). На поверхности пленки в т. O луч разделится на два: частично отразится от верхней поверхности пленки, а частично преломится.

Преломленный луч, дойдя до точки C , частично преломится в воздух ($n_0 = 1$), а частично отразится и пойдет к точке B . Здесь он опять частично отразится и преломится, выходя в воздух под углом i_1 . Вышедшие из

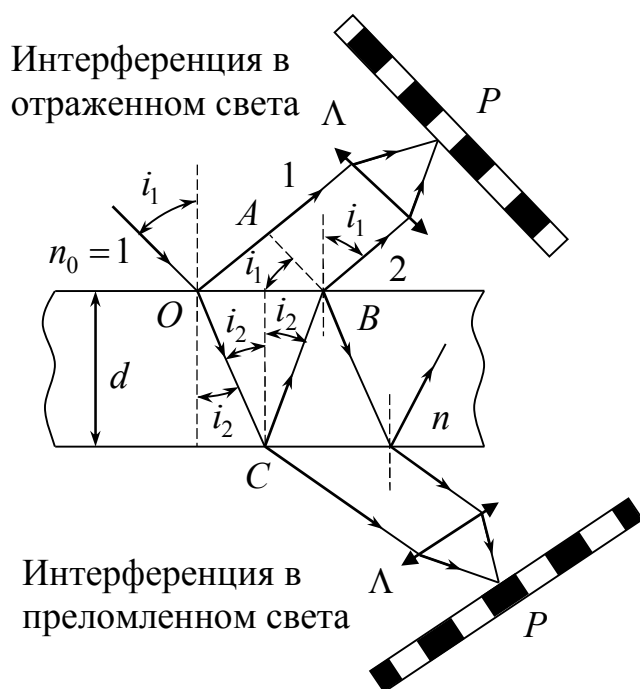


Рис. 76. Интерференция света в плоскопараллельной пленке

пленки лучи 1 и 2, образовавшиеся в результате отражения от верхней и нижней поверхностей пленки, когерентны между собой. Если на их пути поставить собирающую линзу Λ , то они сойдутся в одной из точек P фокальной плоскости линзы и дадут интерференционную картину, которая определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.

При отражении и преломлении светового луча следует учитывать изменение фазы световой волны. Это явление уже рассматривалось при изучении поведения упругих волн, падающих на границу раздела упругих сред различной плотности.

Так как $n > n_0$, то пленка является оптически более плотной средой по

Diagram illustrating the geometry of a beam splitter at an interface between two media. The incident beam from Medium 1 (Среда 1) has refractive index n_0 . The transmitted beam in Medium 2 (Среда 2) has refractive index $n > n_0$. The angle between the incident beam and the solid line path (labeled 2) is $\lambda_0/2$. The dashed line path (labeled 1) represents the other output of the beam splitter.

Оптическая разность хода, возникающая между двумя интерферирующими лучами от точки O до плоскости AB

где показатель преломления n_0 окружающей среды принят равным единице, а слагаемое $(-\lambda_0/2)$ обусловлено потерей полуволны при отражении света от границы оптически более плотной среды.

$$OC = CB = d / \cos i_2; \quad OA = OB \cdot \sin i_1;$$

Тогда разность хода

В итоге получим, что

В точке P будет максимум, если $\Delta = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2}$; $m = 0, 1, 2, \dots$,

или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m\lambda_0 / 2$$

и минимум, если

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}; m = 0, 1, 2, \dots$$

Интерференционная картина, возникающая в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пленку под одинаковыми углами, называют полосами равного наклона.

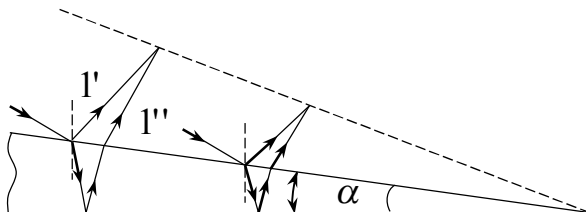


Рис. 78. Интерференция света на клине

Существует интерференционная картина, называемая полосами равной толщины, возникающая при интерференции лучей на пленке переменной толщины (на прозрачном клине). Если источник расположен довольно далеко от поверхности клина (рис. 78), и угол α достаточно мал, то оптическая разность хода между интерференционными лучами $1'$ и $1''$ может быть с достаточной степенью точности вычислена по формуле для полос равного наклона, где в качестве d берется толщина клина в месте падения на него луча. Каждая из полос возникает за счет отражения от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину, отсюда название – полосы равной толщины. Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона – интерференционная картина, образующаяся при падении света на воздушный клин осевой симметрии между плоской стеклянной пластиной и плосковыпуклой линзой. Интерференция используется при создании физических приборов, называемых интерферометрами.

Тема 19. Дифракция света

§ 44. Дифракция света. Принцип Гюйгенса–Френеля

Дифракцией (от лат. diffractus – разломанный) называется любое отклонение от законов геометрической оптики, возникающее при распространении волн. Благодаря дифракции волны могут попадать в область геометрической тени, огибать препятствия, проникать через небольшие отверстия в экранах. Явление дифракции объясняется с помощью принципа Гюйгенса (голландский физик), согласно которому каждая точка пространства, в которую приходит волна, служит источником вторичных по-

лусферических волн, а огибающая фронтов этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени. Рассмотрим падение плоской волны на преграду с отверстием (рис. 79).

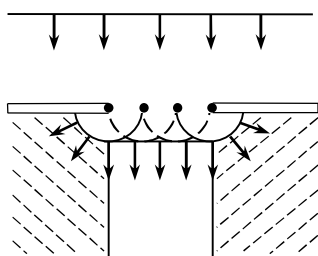


Рис. 79. Иллюстрация принципа Гюйгенса

Когда волновой фронт доходит до преграды, то каждая точка отверстия становится источником вторичных волн, а огибающая этих волн задает фронт волны, прошедший через отверстие. Из рисунка следует, что этот фронт плоский только в средней части, а у границ отверстия происходит изменение волнового фронта, т.е. волна проникает в область геометрической тени, огибая края препятствия.

Принцип Гюйгенса, являясь чисто геометрическим способом построения волновых поверхностей, решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает по существу вопроса об амплитуде, а, следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям. Французский физик Френель дополнил этот принцип идеей интерференции вторичных волн.

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником S , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, излучаемых физически бесконечно малыми элементами любой замкнутой поверхности T , охватывающей источник S (рис. 80).

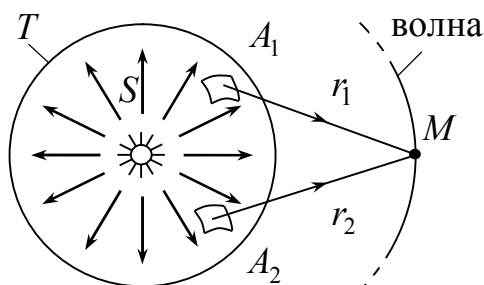


Рис. 80. Суперпозиция когерентных вторичных волн

Обычно в качестве этой поверхности выбирают одну из волновых поверхностей, поэтому элементы-источники действуют синфазно (от греч. $\sin$ – одинаковый, $phasis$ – проявление). Таким образом, волны, распространяющиеся от источника, являются результатом интерференции всех когерентных вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет в каждом конкретном

случае найти амплитуду (интенсивность) результирующей волны в любой точке пространства, т.е. определить закономерности распространения света.

В общем случае расчет интерференции вторичных волн довольно сложен, однако для волновых поверхностей простой симметрии нахождение амплитуды результирующего колебания осуществляется алгебраическим или геометрическим суммированием.

§ 45. Метод зон Френеля

Найдем в произвольной точке M амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника S (рис. 81). Согласно принципу Гюйгенса–Френеля заменим действие источника S действием воображаемых источников, расположенных на волновой сферической поверхности S' . В качестве элементов поверхности Френель предложил выбрать кольцевые зоны (кольцевые полосы) такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до точки M отличались на $\lambda/2$, т.е.

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \lambda/2.$$

Такое разбиение волновой поверхности на зоны можно выполнить, проведя на поверхности S' с центром в точке M окружности радиусами

$$b + \frac{\lambda}{2}, \quad b + 2\frac{\lambda}{2}, \quad b + 3\frac{\lambda}{2}, \quad \dots, \quad b + m\frac{\lambda}{2}.$$

Так как колебания от соседних зон проходят до точки M расстояния, отличающиеся на $\lambda/2$, то в точку M они приходят с противоположными фазами и при наложении (при интерференции) эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Поэтому амплитуда результирующего светового колебания в точке M

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_m$ – амплитуды колебаний, возбуждаемых 1-й, 2-й, ..., m -й зонами.

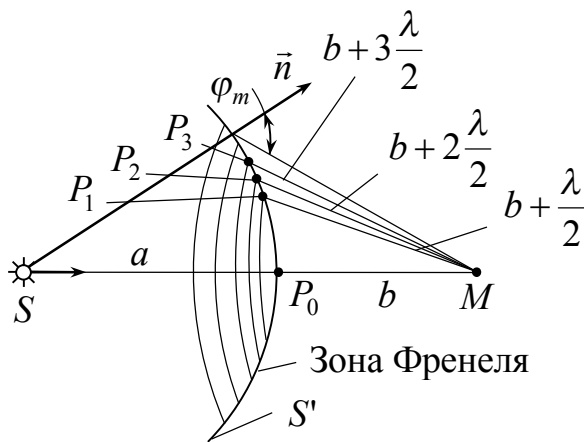


Рис. 81. Зоны Френеля на волновой поверхности сферической волны

При условии, что $\lambda \ll a$ и $\lambda \ll b$ оказывается, что площадь m -ной зоны Френеля не зависит от m : следовательно, при не слишком больших m площади зон Френеля одинаковы. Интенсивность излучения в направлении точки M уменьшается с ростом m вследствие увеличения расстояния от зоны до точки M и увеличения угла φ_m , поэтому

$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 \dots$, т.е. происходит монотонное убывание A_m .

Поэтому разумно предполо-

жить, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2} = \frac{A_{m-1}}{2} + \frac{A_{m+1}}{2};$$

а после переноса A_m в правую часть

$$0 = \frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2}.$$

Тогда амплитуда результирующего светового колебания в точке M

$$A = \frac{A_1}{2} + \underbrace{\left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right)}_{=0} + \dots \pm \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2}, \text{ так как } \pm \frac{A_m}{2} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$.

Таким образом, амплитуда, создаваемая в произвольной точке M сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной. Следовательно, действие всей волновой поверхности на точку M сводится к действию ее малого участка, меньшего чем центральная зона. Общее число зон Френеля, уместяющихся на полусфере, очень велико. Например, при $a = b = 10$ см и $\lambda = 0,5$ мкм число зон $N = 8 \cdot 10^5$.

Правомерность деления волновой поверхности на зоны Френеля подтверждена экспериментально. Для этого используются зонные пластинки – стеклянные пластинки, состоящие из системы чередующихся прозрачных и непрозрачных концентрических колец, построенных по принципу расположения зон Френеля. Если поместить зонную пластинку перед точечным источником S , то для света длиной волны λ она перекроет четные зоны и оставит свободными нечетные, начиная с центральной. В результате результирующая амплитуда $A_1 + A_3 + A_5 + \dots$, больше, чем при полностью открытой волновой поверхности.

§ 46. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

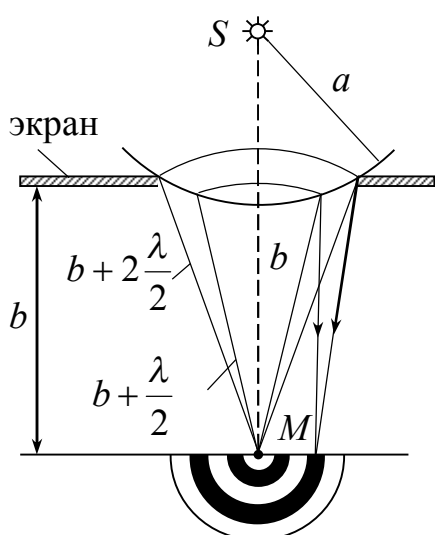


Рис. 82. Дифракция сферической волны на отверстии

Дифракция Френеля – это дифракция сферических волн, при которой дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию. Пусть сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника S , встречает на своем пути непрозрачный экран с круглым отверстием (рис. 82). Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстие. Для точки M , согласно методу зон Френеля, амплитуда результирующего колебания для конечного числа зон

$$A = \frac{1}{2} A_1 \pm \frac{1}{2} A_m,$$

где знак «+» соответствует нечетным « m » и

«—» – четным « m ». Когда отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда (интенсивность) в точке М будет больше, чем при свободном распространении волны, так как одна из зон Френеля окажется непогашенной; если число зон четное, то амплитуда (интенсивность) будет бесконечно мала. Если в отверстии укладывается одна зона Френеля, то при наличии экрана в точке М амплитуда $A = A_1$ т.е. вдвое больше, чем в отсутствие экрана (интенсивность света больше соответственно в четыре раза).

Если в отверстии укладывается две зоны Френеля, световые волны от них в точке М практически уничтожают друг друга из-за интерференции. Таким образом, при произвольном числе зон, дифракционная картина от круглого отверстия вблизи точки М будет иметь вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке М (если m четное, то в центре будет темное кольцо, если m нечетное – светлое кольцо), причем интенсивность максимумов убывает с расстоянием от центра картины.

Рассмотрим дифракцию Френеля на непрозрачном диске (рис 83). В данном случае закрытый диском участок фронта волны надо исключить из

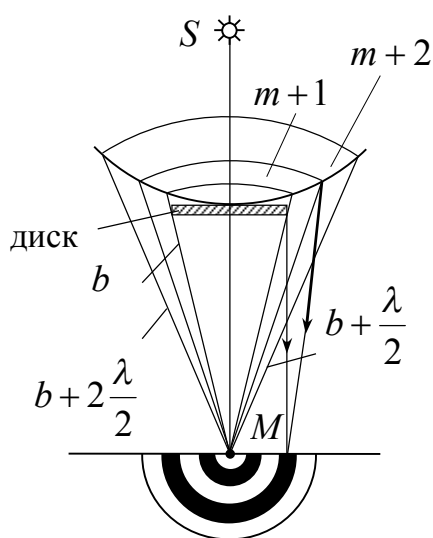


Рис. 83. Дифракция сферической волны на диске

рассмотрения и зоны Френеля строить, начиная с краев диска. Тогда амплитуда результирующего колебания в точке М равна (диск закрывает m первых зон)

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \underbrace{\left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right)}_{=0} + \dots \pm \frac{A_{m \rightarrow \infty}}{2}$$

или $A = \frac{1}{2} A_{m+1}$, так как $\frac{A_{m \rightarrow \infty}}{2} \rightarrow 0$.

Следовательно, в точке М всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующей половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами, а интенсивность максимумов убывает с расстоянием от центра картины.

§ 47. Дифракция Фраунгофера на одной щели

Дифракция Фраунгофера (немецкий физик) – это дифракция плоских световых волн, при которой дифракционная картина наблюдается в том случае, если источник света и точка наблюдения бесконечно удалены. Чтобы этот тип дифракции осуществить, достаточно источник света поме-

стить в фокусе собирающей линзы (тогда лучи света после линзы будут параллельными, как идущие от бесконечно удаленного источника света, и фронт световой волны будет плоским), а дифракционную картину исследовать в фокальной плоскости второй собирающей линзы Λ , установленной за препятствием.

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально плоскости щели шириной a (рис. 84). Оптическая разность хода между крайними лучами MC и ND , идущими от щели в произвольном направлении φ ,

$$\Delta = NF = a \sin \varphi.$$

Разобьем щель MN на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру M щели. Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон до точки экрана, где накладываются лучи, была равна $\lambda/2$, т.е. всего на ширине щели уместится $\Delta / \frac{\lambda}{2}$ зон, где $\Delta = a \sin \varphi$.

Так как свет на щель падает нормально, то плоскость щели совпадает с фронтом волны; следовательно все световые векторы в плоскости щели будут колебаться в одинаковой фазе. Амплитуды вторичных волн в плос-

кости щели будут равны, так как выбранные зоны Френеля имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения. Число зон Френеля, укладывающихся на ширине щели, зависит от угла φ .

От числа зон Френеля, в свою очередь, зависит результат наложения всех вторичных волн. Из приведенного построения следует, что при интерференции света от каждой пары соседних зон Френеля амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как колебания от каждой пары соседних зон взаимно погашают друг друга. Следовательно, если число зон Френеля четное, т.е.

$$a \sin \varphi / \frac{\lambda}{2} = \pm 2m, \text{ то}$$

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, m = 1, 2, 3, \dots,$$

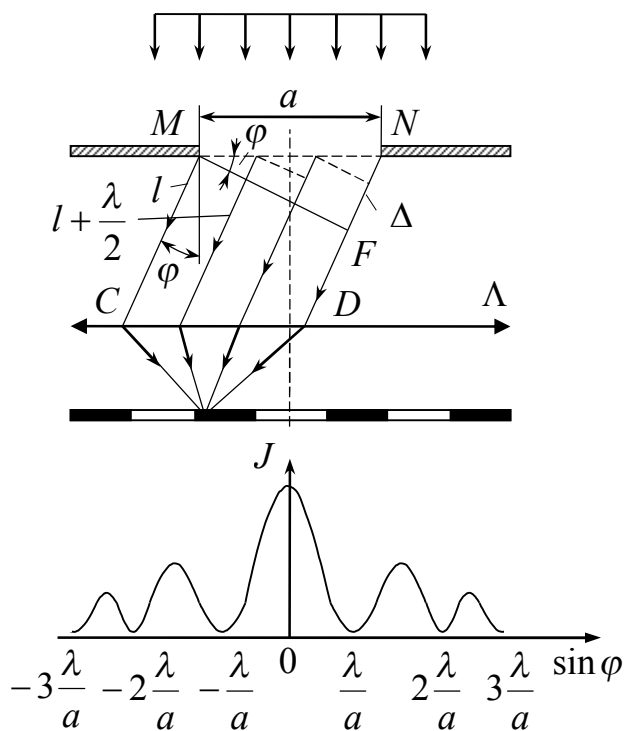


Рис. 84. Дифракция плоской волны на щели

и имеет место минимум освещенности экрана в соответствующих его точках.

Если число зон нечетное, то

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, m = 1, 2, 3, \dots,$$

что соответствует максимуму освещенности.

Последняя формула соответствует действию, в том числе, одной некомпенсированной зоны Френеля. В прямом направлении ($\varphi = 0$) щель действует как одна зона Френеля, все световые волны приходят в центр экрана в одинаковых фазах, и в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью (см. рис. 84). Сужение щели приводит к тому, что центральный максимум расплывается, а его яркость уменьшается. Наоборот, чем шире щель ($a > \lambda$), тем картина ярче, но дифракционные полосы уже, а число полос больше. При $a \gg \lambda$ в центре получается резкое изображение источника света, т.е. имеет место прямолинейное распространение света.

В случае белого света будет наблюдаться совокупность соответствующих картин для разных цветов (сдвинутых друг относительно друга в соответствии с длиной волны λ). Центральный максимум ($\varphi = 0$) будет общим для всех длин волн, поэтому центр дифракционной картины имеет вид белой полосы, переходящей по краям в цветную картину. Последующие максимумы для разных длин волн уже не совпадают между собой, ближе к центру располагаются максимумы, соответствующие более коротким волнам. Однако они настолько расплывчаты, что отчетливого разделения различных длин волн с помощью дифракции на одной щели получить невозможно.

§ 48. Дифракционная решетка

Большое практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через одномерную дифракционную решетку. Дифракционной решеткой называется устройство, представляющее собой систему параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости непрозрачной пластины и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. При дифракции Фраунгофера на одной щели распределение интенсивности на экране определяется направлением дифрагированных лучей. Это означает, что перемещение щели параллельно первоначальному положению не изменит дифракционной картины. Следовательно, если перейти от одной щели ко многим (к дифракционной решетке), то дифракционные картины, создаваемые каждой щелью в отдельности, будут одинаковыми. Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т.е. в ди-

фракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифракционных пучков света, идущих от всех щелей. Модель дифракционной решетки изображена на рис. 85.

Рассмотрим два луча, дифрагированных одинаковым образом от двух соседних щелей. Обозначим ширину каждой щели a , а ширину непрозрачных участков между щелями b . Сумма $a + b = d$ называется периодом дифракционной решетки. Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки. Так как щели находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, то разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного угла φ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = AB = d \sin \varphi.$$

Очевидно, что в тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при многих щелях, т.е. если минимум накладывается на минимум, то в итоге также будет минимум освещенности, поэтому условие минимума сохраняется:

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, m = 1, 2, 3, \dots - \text{главные минимумы}.$$

Кроме того, вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых несколькими щелями, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т.е. возникнут дополнительные минимумы (рис. 86).

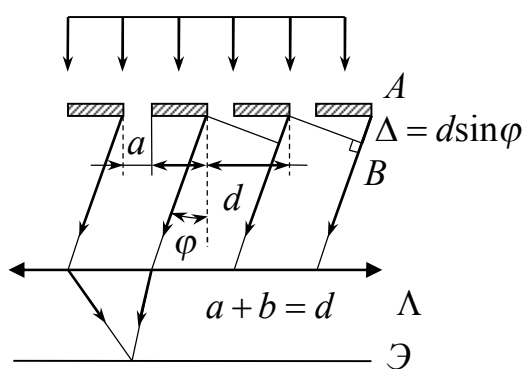


Рис. 85. Дифракция плоской волны на одномерной решетке

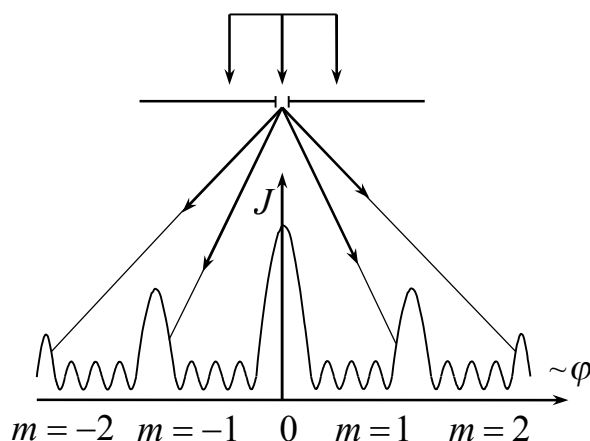


Рис. 86. Распределение интенсивности световых лучей при дифракции на решетке

Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если разность фаз δ световых волн, идущих от соседних щелей, будет составлять $\delta = \pm m \cdot 2\pi$, т.е. волны в точке наблюдения на экране будут синфазными. Разность фаз δ в направлении хода лучей можно вычислить следующим образом (ось O_x направим вдоль хода лучей):

$$\delta = (\omega t - kr_1) - (\omega t - kr_2) = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi.$$

В итоге

$$\pm m \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

или

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda, m = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. этим направлениям соответствуют так называемые главные максимумы. Таким образом, дифракционная картина состоит из системы узких ярких полос, разделенных сравнительно широкими темными промежутками. Помимо периода дифракционная решетка характеризуется параметром, называемым постоянной решетки. Это число щелей, приходящихся на единицу длины решетки. Разрешающей способностью решетки, т.е. способностью отделять на экране линию одного цвета от соседней линии другого цвета, называется величина

$$R = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = mN,$$

где N – общее число щелей решетки, m – порядок (номер) спектра, $\Delta \lambda$ – разность длин волн, еще разрешаемых (разделяемых) решеткой.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы для различных цветов спектра, кроме центрального ($m = 0$), не совпадают друг с другом. В центре картины для всех длин волн угол φ одинаков ($\varphi = 0$), поэтому произойдет наложение всех цветов спектра в одной точке и, в итоге, центральный максимум также будет иметь белый цвет. Остальные максимумы разложатся в спектр, то есть будут иметь вид радужных полосок, называемых дифракционными спектрами I, II и т.д. порядков. В пределах каждой полоски окраска изменяется от фиолетовой у внутреннего края (ближнего к центральному максимуму) до красной у наружного края. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава света (определение длин волн и интенсивности всех его монохроматических компонентов), т.е. дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор. Дифракционные решетки, используемые в различных областях спектра, различаются размерами, формой, материалом поверхности, профилем штрихов и постоянной решетки (до 6000 1/мм), что позволяет перекрывать область спектра от рентгеновской его части до инфракрасной. Например, ступенчатый профиль решетки позволяет концентрировать основную часть падающей энергии в направлении одного определенного ненулевого порядка. Применяемые приборы называют дифракционными спектрографами, если спектр реги-

стрируется с помощью фотопластин, дифракционными спектроскопами, если свет наблюдается визуально.

§ 49. Дифракция рентгеновских лучей

Дифракция света наблюдается не только на плоской одномерной решетке, но и на двумерной решетке (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости). Большой интерес представляет также дифракция на пространственных (трехмерных) решетках – пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также размеры, соизмеримые с длиной волны света. В качестве пространственных дифракционных решеток могут быть использованы кристаллические тела, так как в них неоднородности (атомы, молекулы, ионы) регулярно повторяются в трех направлениях. Кристаллы, являясь трехмерными пространственными решетками, имеют период решетки (расстояние между соседними атомами) величиной порядка 10^{-10} м и, следовательно, непригодны для наблюдения дифракции в видимом свете ($\lambda \cong 5 \cdot 10^{-7}$ м). Длина волны рентгеновских лучей (X -лучей) имеет величину $10^{-12} \dots 10^{-8}$ м, что совпадает с периодом решетки кристалла, поэтому дифракция рентгеновских лучей на кристалле возможна.

Метод расчета дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке предложен независимо друг от друга советским физиком Г.В. Вульфом и английскими физиками Брэггами (отец и сын). Они предложили модель, согласно которой дифракция рентгеновских лучей является результатом их отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей, в которых расположены узлы (атомы) кристаллической решетки (рис. 87). Это отражение, в отличие от обычного, осуществляется лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют интерференционному максимуму для лучей, отраженных от разных плоскостей. Абсолютный показатель преломления близок к единице, так как атомы находятся в вакууме.

Поэтому оптическая разность хода между лучами 1' и 2'

$$\Delta = BC + CD = 2d \sin \vartheta.$$

Пучок параллельных монохроматических лучей (1, 2) падает под углом скольжения ϑ на поверхность кристалла и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн, интерферирующих между собой подобно дифрагированным на решетке волнам.

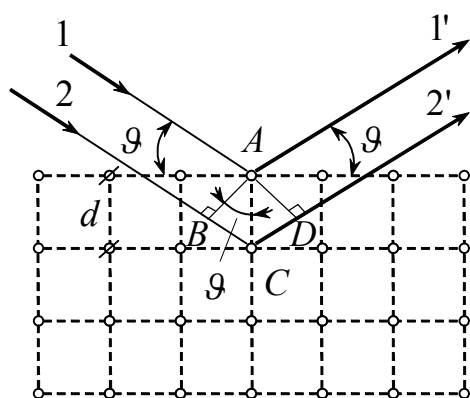


Рис. 87. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке

Дифракционные максимумы интенсивности наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе.

Если длина волны рентгеновских лучей равна λ , то интерференционные максимумы в отраженных лучах должны удовлетворять условию Вульфа–Брэггов

$$2d \sin \vartheta = m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots$$

Из формулы следует, что наблюдение дифракционных максимумов возможно лишь при определенных соотношениях между длиной волны λ и периодом решётки d :

$$\sin \vartheta = \frac{m\lambda}{2d} \leq 1, \text{ при } m = 1 \quad \lambda \leq 2d, \text{ т.е. } \lambda \sim d.$$

Формула Вульфа–Брэггов позволяет решить две важные научные задачи:

1. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя ϑ и m , можно найти d – период кристаллической решетки, т.е. определить структуру вещества. Этот метод лежит в основе рентгеноструктурного анализа.

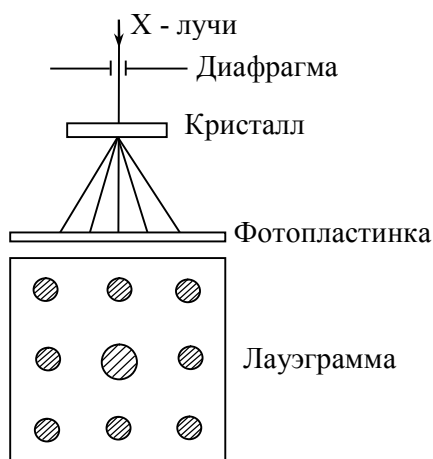


Рис. 88. Метод Лауэ

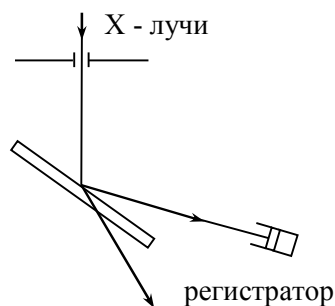


Рис. 89. Метод Вульфа–Брэггов

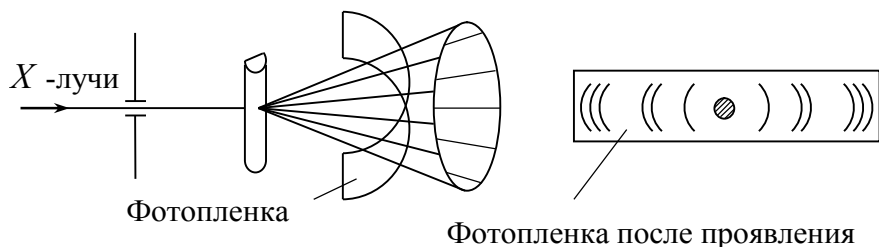


Рис. 90. Метод Дебая

2. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей неизвестной длины волны на кристаллической структуре при известном d и измеряя ϑ и m , можно найти длину волны падающего рентгеновского излучения. Этот метод лежит в основе рентгеновской спектроскопии.

Основные методы дифракции рентгеновских лучей показаны на рис. 88–90.

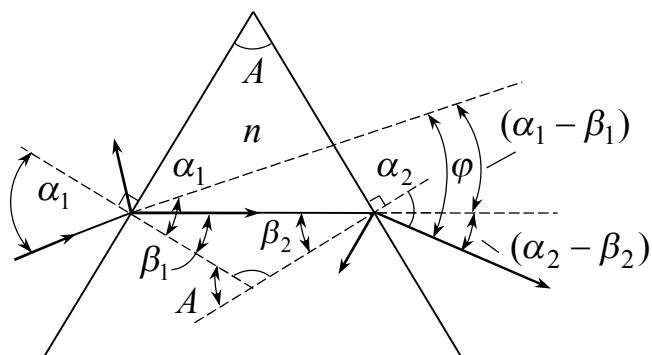
Тема 20. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

§ 50. Дисперсия света

Дисперсией света называется явление зависимости показателя преломления n вещества от частоты ν (или длины волны) света, проходящего сквозь вещество. Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при его прохождении сквозь призму. Зависимость $n = f(\nu)$ была экспериментально обнаружена Ньютоном.

Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает под углом α_1 на призму, показатель преломления которой n и преломляющий угол A (рис. 91). После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч оказывается отклоненным от первоначального направления на угол φ . Найдем зависимость $\varphi(n)$. Из рис. 91 следует, что угол отклонения

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A.$$



Если углы A и α_1 малы, тогда углы α_2 , β_1 и β_2 будут также малы ($< 5^\circ$) и вместо синусов этих углов можно воспользоваться их значениями ($\sin A = A$ в рад.).

Поэтому

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = n;$$

аналогично $\beta_2 / \alpha_2 = 1/n$, а так

как $\beta_1 + \beta_2 = A$, то

$$\alpha_2 = \beta_2 n = n(A - \beta_1) = n(A - \alpha_1 / n) = nA - \alpha_1.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = nA.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - A = A(n - 1),$$

т.е. угол отклонения лучей зависит от n , а n , как установил Ньютон, является функцией длины волны, поэтому лучи немонахроматического света разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т.е. лучи белого света за призмой разлагаются в спектр. Таким образом, с помощью призмы, так же как и с помощью дифракционной

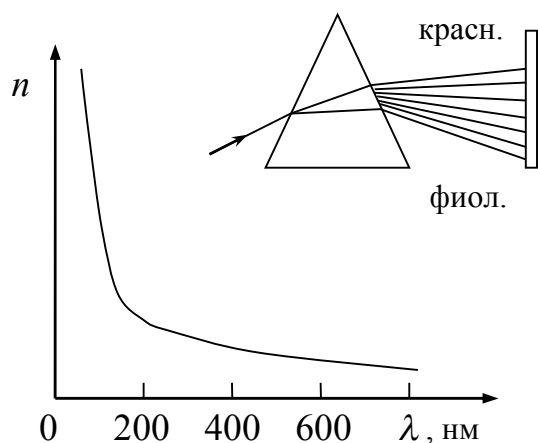


Рис. 92. Зависимость показателя преломления вещества от длины волны света

решетки, можно определить спектральный состав света.

Величина

$$D = \frac{dn}{d\lambda},$$

называемая дисперсией вещества, показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волны. Результаты экспериментального измерения зависимости $n(\lambda)$ показаны на рис. 92.

Видно, что показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны монотонно увеличивается; следовательно, величина $dn/d\lambda$ также увеличивается с уменьшением λ . Такая дисперсия называется нормальной. Таким образом, красные лучи, которым соответствует меньший показатель преломления, отклоняются призмой слабее, чем фиолетовые. На явлении нормальной дисперсии основано действие призмных спектроскопов. Они нашли широкое применение, например, для скоростного химического анализа веществ.

§ 51. Электронная теория дисперсии света

Из макроскопической электромагнитной теории Максвелла следует, что абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость. В оптической (видимой) области спектра для прозрачных веществ $\mu \cong 1$, поэтому по Максвеллу

$$n = \sqrt{\epsilon}.$$

Однако этот результат противоречит опыту, так как величина n не является постоянной. Кроме того, численные значения n , полученные из этого выражения, не согласуются с опытными значениями. Трудности объяснения дисперсии света с точки зрения электромагнитной теории Максвелла устраняются электронной теорией Лоренца. В теории Лоренца дисперсия света рассматривается как результат взаимодействия электромагнит-

ных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Рассмотрим электронную теорию дисперсии света для однородного прозрачного диэлектрика, предположив формально, что дисперсия света является следствием зависимости ε от частоты ω световых волн. Как известно из главы «Электростатика» диэлектрическая проницаемость вещества по определению

$$\varepsilon = 1 + \kappa = 1 + P/(\varepsilon_0 E),$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная, P – поляризованность среды, т.е. число электрических диполей в единице объема, E – напряженность внешнего электрического поля, κ – диэлектрическая восприимчивость.

Электрическим диполем называется система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q, -Q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. С этой точки зрения любой диэлектрик представляет собой совокупность большого числа ($\sim 10^{23}$ 1/моль) диполей. Таким образом,

$$\varepsilon = n^2 = 1 + P/\varepsilon_0 E,$$

т.е. показатель преломления n зависит от P . В случае дисперсии основное значение имеет электронная поляризация, обусловленная тем, что в электрическом поле ядро и электронная оболочка нейтрального атома смещаются в различные стороны. Если электромагнитное поле является переменным, то возникают вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей волны. В первом приближении можно считать, что вынужденные колебания совершают только внешние, наиболее слабо связанные с ядром электроны. Их в физике называют оптическими, в химии – валентными. Для простоты рассмотрим колебания только одного оптического электрона. Наведенный дипольный момент ядра и электрона, совершающего вынужденные колебания,

$$p = ex,$$

где e – заряд электрона, x – смещение электрона под действием электрического поля световой волны.

Если концентрация атомов в диэлектрике равна n_0 , то мгновенное значение поляризованности

$$P = n_0 p = n_0 ex.$$

В результате получим

$$n^2 = 1 + n_0 ex/\varepsilon_0 E.$$

Следовательно, задача сводится к определению смещения x электрона под действием внешнего поля E . Поле световой волны будем считать гармонической функцией частоты ω , т.е. $E = E_0 \cos \omega t$.

Уравнение вынужденных колебаний электрона для простейшего случая (без учета силы сопротивления, обуславливающей поглощение энергии падающей волны) запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 = eE_0$ – амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны, ω_0 – собственная частота колебаний электрона, m – масса электрона, ω – частота внешнего поля.

Решив это уравнение, найдем $\varepsilon = n^2$ в зависимости от параметров атома (e , m , ω_0) и частоты ω внешнего поля, т.е. решим задачу дисперсии.

Решением дифференциального уравнения является, как известно, функция; в данном случае получим

$$x = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$

или

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Если в веществе имеются различные заряды e_i , совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами ω_{0i} , то

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i^2 / m_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

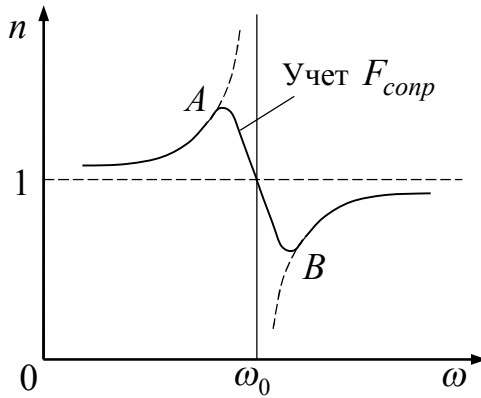


Рис. 93. График зависимости показателя преломления вещества от частоты внешнего электрического поля

где m_i – массы зарядов.

Из последних выражений следует, что показатель преломления n зависит от частоты ω внешнего поля, т.е. полученные зависимости передают явление дисперсии света. График зависимости $n(\omega)$ на рис. 93. Поведение показателя преломления n вблизи собственной частоты ω_0 получилось в результате допущения об отсутствии сил сопротивления при колебаниях электронов.

С учетом сил сопротивления возникает участок AB графика. Область AB – область аномальной дисперсии ($n \downarrow$ при $\omega \uparrow$). Экспериментальное подтверждение аномальной дисперсии осуществил российский физик Д.С. Рождественский.

§ 52. Поглощение света

Поглощением (или абсорбцией от лат. absorbeo – поглощаю) света называется явление уменьшения энергии световой волны, проходящей сквозь вещество, вследствие преобразования энергии волны в различные формы внутренней энергии вещества или в энергию вторичного излучения других направлений и другого спектрального состава. В результате поглощения энергии интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается.

Поглощение света в веществе описывается законом Бугера (французский физик):

$$J = J_0 e^{-\alpha x},$$

где J_0 и J – интенсивности плоской монохроматической волны на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x , α – коэффициент поглощения, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света. При $x = 1/\alpha$ интенсивность света J по сравнению с J_0 уменьшается в e раз.

Коэффициент поглощения для различных веществ различен. Например, одноатомные газы и пары металлов (т.е. вещества, в которых атомы расположены на значительных расстояниях друг от друга, и их можно считать изолированными) обладают близким к нулю коэффициентом поглощения и лишь для очень узких диапазонов длин волн падающего света ($10^{-12} \dots 10^{-11}$ м) наблюдаются резкие максимумы поглощения. Такой спектр поглощения называют линейчатым. Эти линии поглощения, каждая из которых, с одной стороны, соответствует длине волны света, полностью поглощаемого веществом, а с другой стороны, соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Что касается молекул, то их спектр поглощения, определяемый колебаниями атомов в молекулах, характеризуется полосами поглощения ($10^{-10} \dots 10^{-7}$ м).

Коэффициент поглощения для прозрачных диэлектриков невелик (примерно $10^{-3} \dots 10^{-5} \text{ см}^{-1}$), однако у них наблюдается селективное (выборочное) поглощение света в определенных интервалах длин волн, при котором α резко возрастает и наблюдаются сравнительно широкие полосы поглощения (примерно $10^{-7} \dots 10^{-6}$ м), т.е. диэлектрики имеют сплошной спектр поглощения. Это связано с тем, что в диэлектриках нет свободных электронов, и поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика.

Коэффициент поглощения для металлов имеет большие значения (примерно $10^3 \dots 10^4 \text{ см}^{-1}$), и поэтому металлы практически непрозрачны для света. В металлах из-за наличия свободных электронов, движущихся

под действием электрического поля световой волны, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Поэтому энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла. Чем выше проводимость металла, тем сильнее в нем поглощение света.

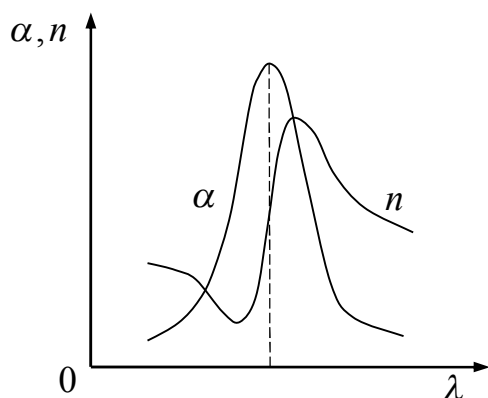


Рис. 94. Зависимости коэффициента поглощения и показателя преломления диэлектрика от длины волны

На рис. 94 представлены типичные зависимости коэффициента поглощения α от длины волны λ света и зависимость показателя преломления n от λ в области полосы поглощения. Из рис. 109 следует, что внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия ($n \downarrow$ с $\lambda \downarrow$). Однако поглощение вещества должно быть значительным, чтобы повлиять на ход показателя преломления.

Зависимостью коэффициента поглощения от длины волны объясняется окрашенность поглощающих тел. Например, стекло, слабо поглощающее красные и оранжевые лучи и сильно поглощающее зеленые и синие, при освещении белым светом будет казаться красным. Если на такое стекло направить зеленый и синий свет, то из-за сильного поглощения света этих длин волн стекло будет казаться черным. Это явление используется для изготовления светофильтров.

§ 53. Излучение Вавилова–Черенкова

Российский физик П.А. Черенков, работавший под руководством академика С.И. Вавилова, экспериментально обнаружил, что при движении заряженных частиц в среде с постоянной скоростью v , превышающей фазовую скорость света в этой же среде, т.е. при условии $v > c/n$, возникает электромагнитное излучение, названное излучением Вавилова–Черенкова. Этот эффект был теоретически объяснен российскими учеными И.Е. Таммом и И.М. Франком (за открытие эффекта и его объяснение Черенкову, Тамму и Франку в 1958 году была присуждена нобелевская премия). Возникновение излучения и его направленность объяснены Таммом и Франком на основе теории интерференции света и принципа Гюйгенса. На основе излучения Вавилова–Черенкова разработаны широко используемые экспериментальные методы для регистрации частиц высоких энергий и определения их свойств (импульс, величина и знак заряда, энергия). Счетчики для регистрации заряженных частиц, в которых используется излучение Вавилова–Черенкова, получили название черенковских счетчиков. В

этих счетчиках частица регистрируется практически мгновенно (при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, возникает световая вспышка, преобразуемая с помощью фотоэлектронного умножителя в импульс тока).

Тема 21. Поляризация света

§ 54. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса

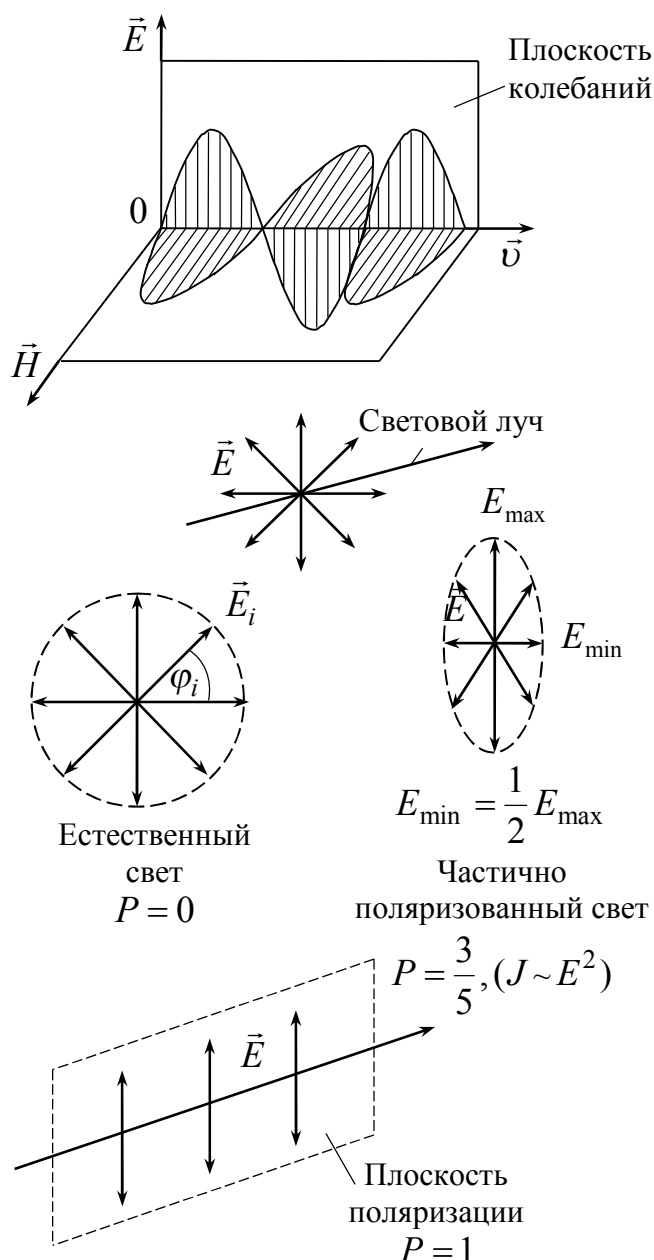


Рис. 95. Графическое представление естественного и плоско (линейно) поляризованного света

Из теории Максвелла для электромагнитных волн следует, что $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}]$. Линейно поляризованную плоскую монохроматическую волну можно изобразить графически (рис.95). Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая телом, характеризуется всевозможными равновероятными колебаниями светового вектора $\vec{E}$.

В данном случае равномерное распределение векторов $\vec{E}$ объясняется большим количеством атомарных излучателей, а равенство амплитудных значений векторов $\vec{E}$ – одинаковой (в среднем) интенсивностью излучения каждого из атомов. Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора $\vec{E}$ называется естественным. Свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, называется поляризованным. Поляризация света – это явление

упорядочения ориентации светового вектора в плоскости, перпендикулярной световому лучу. Свет, в котором вектор $\vec{E}$ колеблется в определенной плоскости, называется плоско (линейно) поляризованным.

Степенью поляризации называется физическая величина

$$P = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}},$$

где $J_{\max}$ и $J_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям измерения интенсивности. Для естественного света $J_{\max} = J_{\min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного $J_{\min} = 0$ и $P = 1$.

Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя так называемые поляризаторы – приборы, пропускающие световые колебания только одного направления. Эти приборы свободно пропускают составляющие вектора $\vec{E}$, параллельные плоскости поляризатора и полностью задерживают составляющие, перпендикулярные этой плоскости (рис. 96).

Из рис. 96 видно, что $E = E_0 \cos \alpha$, а так как $J \sim E^2$, то

$$J = J_0 \cos^2 \alpha,$$

интенсивность света, прошедшего поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла между плоскостями поляризатора и анализатора. Это закон Малюса (французский физик).

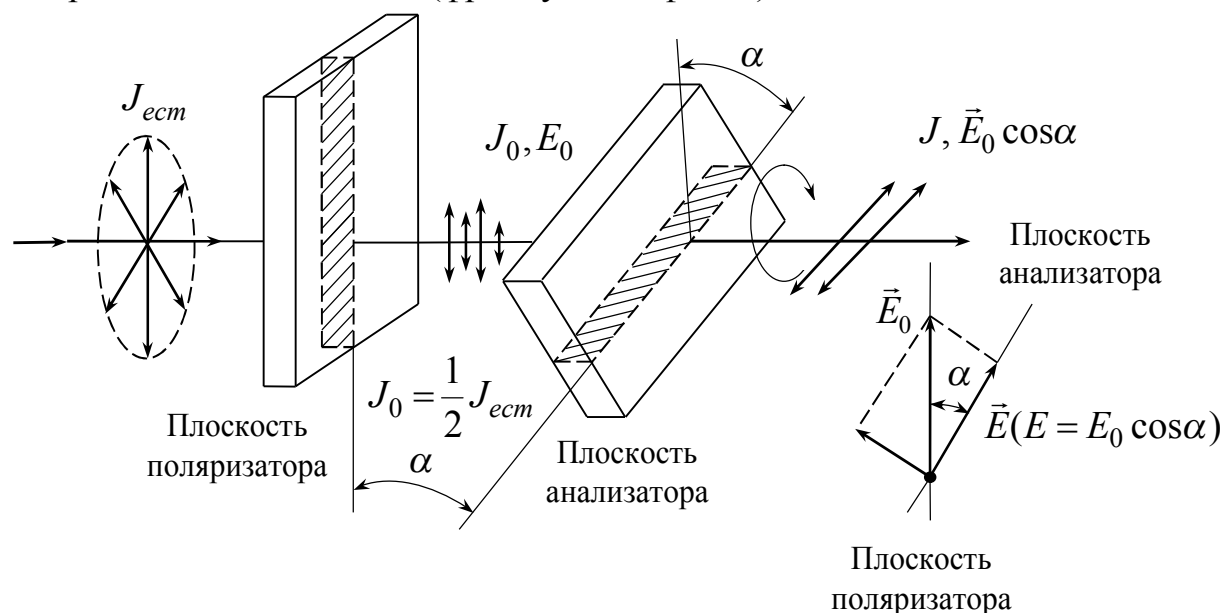


Рис. 96. Поляризация света при прохождении сквозь поляризаторы

В естественном свете все значения угла φ равновероятны, поэтому интенсивность света, прошедшего поляризатор

$$J_0 = J_{ecm} \cos^2 \varphi_1 + J_{ecm} \cos^2 \varphi_2 + J_{ecm} \cos^2 \varphi_3 + \dots = J_{ecm} \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2} J_{ecm}.$$

Поэтому $J = \frac{1}{2} J_{ecm} \cos^2 \alpha$. Здесь учтено, что $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$, так как

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} 2\pi + \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \sin 2 \cdot 2\pi = \frac{1}{2}.$$

§ 55. Поляризация света при отражении и преломлении

Если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков, например, воздух и стекло, то отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными (рис. 97).

В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения ($\bullet$), в преломленном — колебания, параллельные плоскости падения ($\updownarrow$). Степень поляризации зависит от угла падения лучей и показателя преломления.

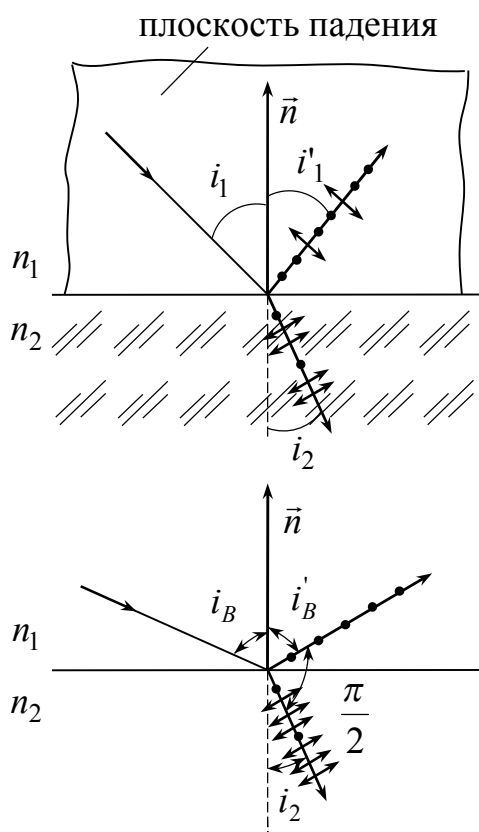


Рис. 97. Поляризация света при отражении и преломлении

Меняя угол падения i_1 можно добиться, чтобы отраженный луч был полностью поляризован в одной плоскости.

Шотландский физик Брюстер установил закон, согласно которому

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

т.е. тангенс угла падения естественного света, при котором отраженный луч полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения численно равен показателю преломления отражающей среды.

Если свет падает на границу раздела сред под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

В самом деле, в соответствии с законом Брюстера $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$. По определению показателя преломления $n_{21} = \sin i_B / \sin i_2$. Приравнявая правые части полученных выражений, получим

$$\frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{\sin i_2}{\sin i_2},$$

откуда $\cos i_B = \sin i_2 = \cos (\pi / 2 - i_2)$. Поэтому

$$i_B = \frac{\pi}{2} - i_2; i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}; i_B = i'_B; i'_B + i_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда видно, что отраженный луч перпендикулярен преломленному лучу.

Физическая суть явлений, приводящих к поляризации отраженного и преломленного лучей, заключается в следующем. В соответствии с электронной теорией Лоренца падающая световая волна, проникнув в диэлектрик, заставляет входящие в состав атомов электрические заряды совершать вынужденные колебания. Колеблющиеся атомы излучают вторичные световые волны. Вне диэлектрика вторичные волны, налагаясь друг на друга, дают отраженные волны. Внутри диэлектрика вторичные волны складываются с падающей волной и дают в результате преломленную волну. Вынужденные колебания зарядов совершаются в направлении вектора $\vec{E}$ этой результирующей волны.

Рассмотрим один из зарядов, излучающих вторичную волну (рис. 98). Разложим вектор смещения $\vec{x}$ этого заряда по двум взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых ($\vec{x}_{||}$), как следует из закона Брюстера, совершается в плоскости падения. Каждому колебанию соответствует плоскополяризованная вторичная волна. В соответствии с диаграммой направленности излучения электрического диполя максимальная

энергия излучается в направлениях, перпендикулярных к направлению колебаний. Сплошные и штриховые «восьмерки» изображают эти диаграммы.

Из рис. 98 видно, что в направлении отраженного луча преобладает интенсивность волны с плоскостью колебаний, перпендикулярной плоскости падения и параллельной отражающей поверхности, так как в этом случае колебания вектора $\vec{E}$ совпадают с направлением составляющей вектора смещения заряда, который (вектор)

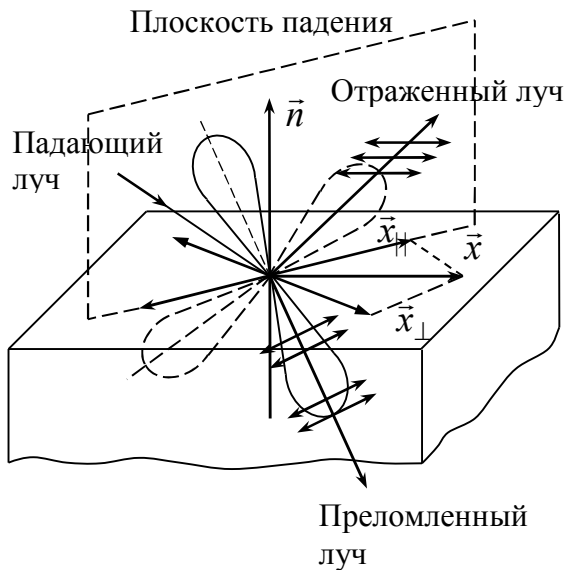


Рис. 98. Диаграммы направленности излучений диполя при отражении и преломлении в диэлектрике

перпендикулярен плоскости падения луча. Поэтому отраженный луч поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. В естественном падающем луче интенсивность колебаний различных направлений одинакова.

Энергия этих колебаний распределяется между отраженной и преломленной волнами. Поэтому, если в отраженном луче будет больше интенсивность колебаний одного направления, то в силу закона сохранения энергии в преломленном луче должна быть больше интенсивность колебаний другого направления. Отсюда следует, что и преломленный луч будет частично поляризован (см. рис. 97).

§ 56. Двойное лучепреломление

Все прозрачные кристаллы (кроме кристаллов кубической системы, которые оптически изотропны) обладают способностью двойного лучепреломления, т.е. раздваивания каждого падающего на них светового пучка.

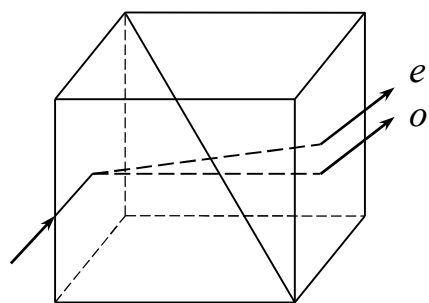


Рис. 99. Раздвоение луча естественного света в кристалле

Это явление наблюдал впервые датский ученый Бартоломин в 1670 г.

Если на толстый кристалл исландского шпата (CaCO_3) направить узкий пучок света, то из кристалла выйдет два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу (рис. 99). При двойном лучепреломлении один из лучей удовлетворяет обычному закону преломления и лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью. Этот луч называется обыкновенным и обозначается буквой «o». Для другого луча,

называемого необыкновенным «e», отношение $\sin i_1 / \sin i_2$ не остается постоянным при изменении угла падения.

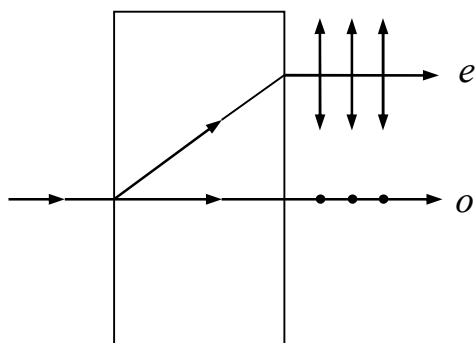


Рис. 100. Направление распространения обыкновенного o и необыкновенного e лучей в кристалле

Необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Даже при нормальном падении необыкновенный луч отклоняется от первоначального направления (рис. 100).

В кристалле исландского шпата имеется единственное направление, вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается. Направление в кристалле, по которому луч света распространяется, не испытывая двойно-

го лучепреломления, называется оптической осью кристалла.

Следует иметь в виду, что оптическая ось – не единственная прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, также является оптической осью кристалла. Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется главной плоскостью. Анализ поляризации света показывает, что вышедшие из кристалла лучи плоско поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях: колебания светового вектора в обыкновенном луче происходят перпендикулярно главной плоскости, в необыкновенном – в главной плоскости (см. рис. 100).

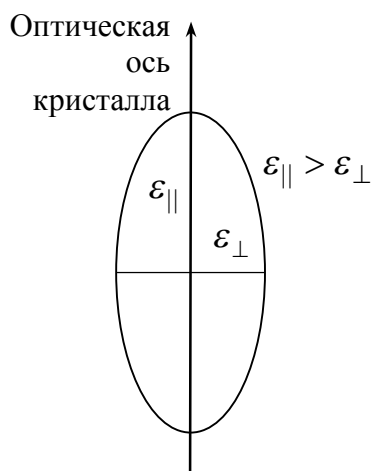


Рис. 101. Оптическая анизотропия кристалла

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией (от греч. anisos – неравный) кристаллов. В кристаллах некубической системы зависимость от направления измерения обнаруживает, в частности, диэлектрическая проницаемость ϵ . В кристаллах с одной оптической осью ϵ в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет различные значения $\epsilon_{||}$ и $\epsilon_{\perp}$ (рис. 101).

В связи с тем, что $n = \sqrt{\epsilon}$, электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора $\vec{E}$ соответствуют разные значения показателя преломления n , так как чем больше ϵ , тем меньше $\vec{E}$. Поэтому скорость световых волн будет зависеть от направления колебания светового вектора в этих волнах относительно оптической оси:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} .$$

При любом направлении обыкновенного луча колебания светового вектора всегда перпендикулярны оптической оси кристалла, поэтому обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью и, следовательно, показатель преломления n_0 одинаков независимо от направления. Для необыкновенного же луча угол между направлением колебаний и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому необыкновенные лучи распространяются по различным направлениям с разными скоростями. Следовательно, показатель преломления n_e является переменной величиной, зависящей от направления луча.

§ 57. Искусственная оптическая анизотропия. Вращение плоскости поляризации

Оптически изотропные среды становятся оптически анизотропными под действием:

- 1) однородного сжатия или растяжения (кристаллы);
- 2) электрического поля (жидкости, газы);
- 3) магнитного поля (жидкости, стекла).

Возникновение двойного лучепреломления в оптически изотропных средах, помещенных в электрическое поле, называется эффектом Керра (шотландский физик).

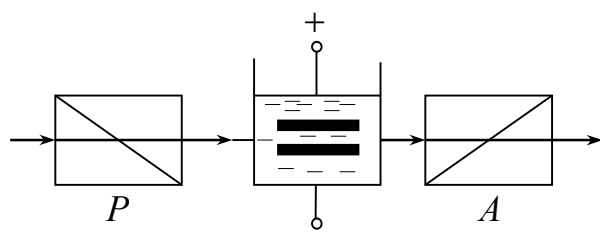


Рис. 102. Схема ячейки Керра

На рис. 102 приведена установка для наблюдения эффекта Керра в жидкости. Это устройство называется ячейкой Керра. Кювета с жидкостью (например, нитробензол), в которую введены пластины конденсатора, помещается между поляризатором и анализатором, плоскости которых перпендику-

лярны и, следовательно, свет не проходит.

При наложении электрического поля жидкость становится двоякопреломляющей; при изменении разности потенциалов между электродами меняется степень анизотропии вещества, а следовательно, и интенсивность света, прошедшего через анализатор. Эффект Керра объясняется различной поляризуемостью молекул жидкости по разным направлениям. Это явление практически безынерционно, т.е. переход вещества из изотропного состояния в анизотропное при включении поля (и обратно) составляет приблизительно 10^{-10} с. Поэтому ячейка Керра служит идеальным световым затвором и применяется в быстропротекающих процессах, например, в оптической связи посредством лазеров.

Некоторые вещества (например, из твердых тел кварц, сахар, из жидкостей – водный раствор сахара, скипидар), называемые оптически активными, обладают способностью вращать плоскость поляризации.

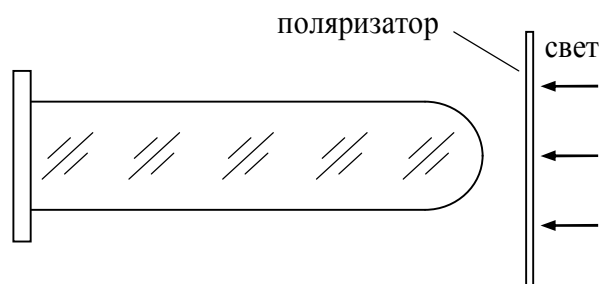


Рис. 118. Винт Умова

Вращение плоскости поляризации можно наблюдать с помощью так называемого винта Умова. Цилиндрический стеклянный сосуд длиной 1 м и диаметром 10

см заполняется концентрированным раствором сахара и герметически закупоривается (рис. 103).

Если сквозь сосуд вдоль его оси пропустить плоскополяризованный белый свет, то при наблюдении сбоку жидкость представляется заполненной навитыми вокруг оси сосуда радужно окрашенными лентами. При вращении поляризатора вся картина смещается вдоль оси сосуда.

Объясняется это явление следующим образом. При прохождении плоскополяризованного монохроматического света сквозь раствор сахара при наблюдении сбоку мы будем видеть рассеянный свет, который излучает электроны, колеблющиеся под действием вектора E световой волны, падающей на раствор (рис. 104). Если бы раствор сахара не вращал плоскость поляризации, вынужденные колебания электронов совершались бы в одной плоскости, совпадающей с плоскостью поляризации поляризатора. Колеблющийся электрон представляет собой диполь, диаграммы направ-

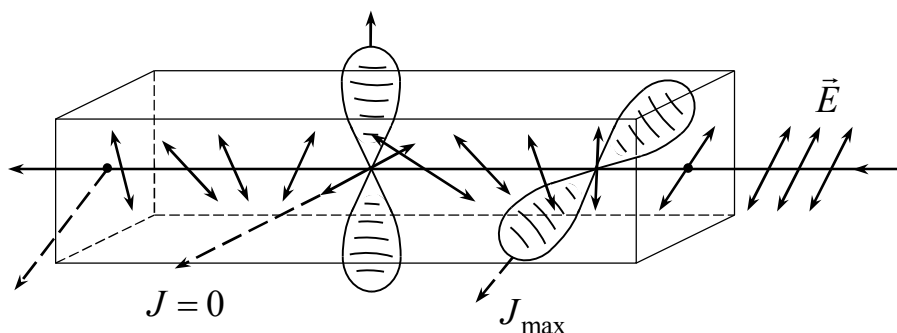


Рис. 104. Вращение вектора $\vec{E}$ в оптически активном веществе. Показаны также объемные лепестки диаграммы направленности излучения света для $J_{\max}$ и $J = 0$

ленности излучения которого ранее изучены. В соответствии с этими диаграммами интенсивность рассеянного света максимальна в направлении, перпендикулярном плоскости поляризатора и равна нулю в направлениях, лежащих в этой плоскости. Оптическая активность сахара приводит к тому, что направление колебаний поворачивается по мере прохождения плоскополяризованного света через сосуд. Поэтому в одних местах сосуда колебания электронов совершаются в вертикальном направлении (при наблюдении сбоку эти места будут светлыми), в других местах – в горизонтальном направлении (эти места видны темными). Таким образом, сбоку жидкость видна состоящей из чередующихся светлых и темных слоев, перпендикулярных лучу света.

Опыт показывает, что угол поворота плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d ,$$

а для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha]cd,$$

где d – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе, α и $[\alpha]$ – удельное вращение, численно углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества, толщиной 1 м, c – концентрация оптически активного вещества, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Из последней формулы видно, что при известных $[\alpha]$ и d и измеренном φ можно определить концентрацию c . На этом основана работа сахариметров.

Теория вращения плоскости поляризации развита Френелем и выходит за рамки нашего курса. Впоследствии Фарадей обнаружил вращение плоскости поляризации в оптически неактивных средах под действием магнитного поля (эффект Фарадея). Это явление имело большое значение для физической науки, так как было первым явлением, в котором обнаружилось связь между оптическими и электромагнитными процессами.

Тема 22. Квантовая природа излучения

§ 58. Тепловое излучение и его характеристики

В природе и технике самым распространенным является свечение тел, обусловленное их нагреванием, т.е. тепловое излучение. Это электромагнитное излучение вещества, возникающее за счет его внутренней энергии. Тепловое излучение свойственно всем телам при температуре выше 0 К и имеет сплошной спектр, положение максимума которого зависит от температуры вещества. Здесь спектр – это зависимость амплитуды гармонической составляющей электромагнитной волны от частоты. Если в электромагнитном излучении бесконечно большое количество составляющих (гармоник), то спектр называют сплошным, а график зависимости пред-

ставляет собой непрерывную линию. При высоких (> 800 К) излучаются короткие (видимые и ультрафиолетовые) электромагнитные волны, при низких – в основном длинные (инфракрасные) волны.

Опытным путем установлено, что единственным видом излучения, которое может находиться в равновесии с излучающими телами, является тепловое излучение. Остальные виды излучения (электро-, фото-, хемилюминесценция, от лат. *luminis* – свет) оказываются неравновесными. Окружим мысленно излучающее тело идеально отра-

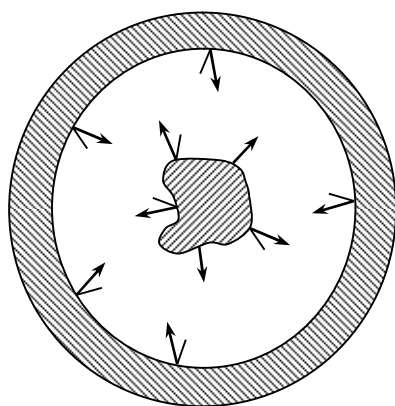


Рис. 105. Тепловое равновесие между телом и отражающей оболочкой

жающей оболочкой (рис. 105). В результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением наступит равновесие, которое характеризуется равенством энергии, поглощенной и излученной телом за один и тот же промежуток времени. Если допустить, что равновесие между телом и излучением нарушено по какой-либо причине, и тело стало больше излучать, чем поглощать, то температура тела станет понижаться до тех пор, пока количество излучаемой телом энергии не уменьшится до равенства количеству поглощаемой энергии.

В результате в системе тело-излучение вновь установится равновесие. Если равновесие нарушится таким образом, что количество излучаемой энергии окажется меньше, чем поглощаемой, то температура тела будет возрастать до тех пор, пока вновь не установится равновесие.

Вследствие равновесности тепловое излучение подчиняется некоторым закономерностям, вытекающим из законов термодинамики. Для характеристики теплового излучения используется физическая величина, называемая поток энергии Φ_E . Эта величина отличается от уже известных потоков векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ электрического и магнитного полей тем, что характеризует скалярную величину – энергию E теплового излучения. В тепловом излучении поток энергии – это физическая величина, численно равная энергии, излучаемой телом в единицу времени:

$$\Phi_E = \frac{dE}{dt}.$$

Очевидно, что названием единицы потока энергии является ватт (Вт). Так как различных размеров тела могут излучать различную энергию (большие тела – больше, малые – меньше), то для характеристики способности вещества (а не тела) излучать энергию поток энергии должен быть нормирован на единицу площади поверхности излучающего тела, т.е. вычислять его надо с единицы поверхности. Поток энергии, излучаемый

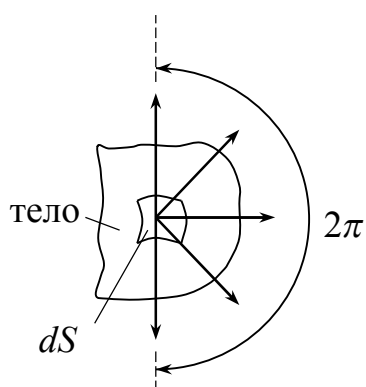


Рис. 106. К определению энергетической светимости тела

единицей поверхности тела по всем направлениям в пределах телесного угла величиной 2π (без учета энергии, излучаемой телом вовнутрь) (рис. 106) называется энергетической светимостью:

$$M_E = \frac{d\Phi_E}{dS} = \frac{dE}{dt \cdot dS}.$$

Название этой единицы – $\text{Вт}/\text{м}^2$. Опыт показывает, что энергетическая светимость в значительной степени повышается с температурой. Излучение содержит волны различных

частот ω или длин волн λ . Опытным путем установлено, что на каждые частоту, или длину волны, приходится различное количество излучаемой телом энергии. Следовательно, поток энергии должен быть также нормирован на единичный интервал частот ω или длин волн λ (рис. 107).

Энергетическая светимость тела, приходящаяся на единичный интервал частот (или длин волн), называется излучательной способностью или спектральной плотностью энергетической светимости:

$$M_{\omega}^0 = \frac{dM_E}{d\omega} = \frac{dE}{dt \cdot dS \cdot d\omega}; \quad M_{\lambda}^0 = \frac{dM_E}{d\lambda} = \frac{dE}{dt \cdot dS \cdot d\lambda}.$$

Излучательная способность также зависит от температуры, о чем свидетельствует, например, изменение цвета металлов при их нагревании. Излучательная способность M_{ω}^0 есть функция частоты и температуры (рис. 108), а M_E — функция только температуры. Зная излучательную способность, можно вычислить энергетическую светимость тела при данной температуре:

$$M_E = \int dM_E = \int_0^{\infty} M_{\omega}^0 d\omega.$$

Исторически сложилось так, что теория теплового излучения использует в расчетах частоту ω , а экспериментальные результаты представлены через длину волны λ (длина волны измеряется точнее). Связь между M_{ω}^0 и

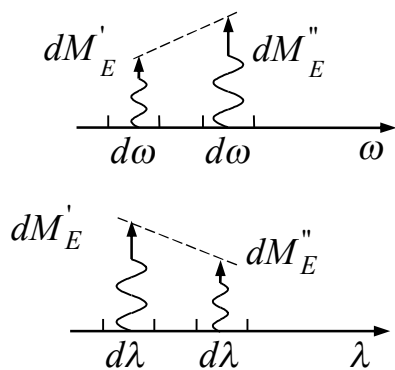


Рис. 107. К определению излучательной способности тела

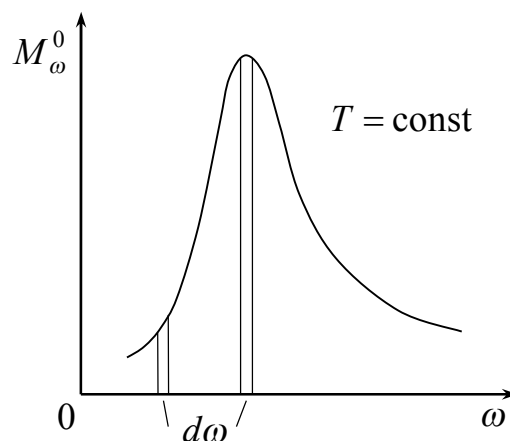


Рис. 108. Изотерма зависимости излучательной способности тела от частоты излучения

M_{λ}^0 устанавливается таким образом:

$$M_{\omega}^0 = M_{\lambda}^0 \frac{\lambda^2}{2\pi c}.$$

Пусть на элементарную площадку поверхности тела падает поток чистой энергии $d\Phi_E$, обусловленный электромагнитными волнами, частота

которых заключена в интервале $d\omega$ (рис. 109). Часть этого потока $d\Phi_E'$ поглотится телом, другая часть $d\Phi_E''$ – отразится. Безразмерная величина, равная отношению поглощенного телом потока к падающему на него называется поглощательной способностью тела:

$$\alpha(\omega, T) = \frac{d\Phi_E'}{d\Phi_E}.$$

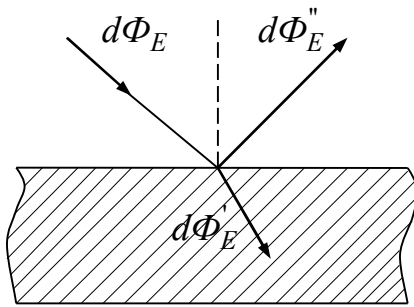


Рис. 109. К определению поглощательной способности тела

Эта величина является функцией температуры тела и частоты падающего на тело излучения. Как следует из определения, $\alpha(\omega, T) \leq 1$. Тело, полностью поглощающее упавшее на него излучение всех частот, называется абсолютно черным телом. Для него $\alpha \equiv 1$. Тело, для которого поглощательная способность зависит только от температуры $\alpha_T = f(T) < 1$, называется серым телом.

Тот факт, что абсолютно черное тело полностью поглощает весь падающий на него поток энергии, вовсе не означает, что абсолютно черное тело ничего не излучает, например, практически абсолютно черным телом является Солнце.

В земных условиях абсолютно черных тел не существует, однако сажа, платиновая чернь (окись платины) и некоторые другие вещества в определенном интервале частот по своим свойствам близки к ним.

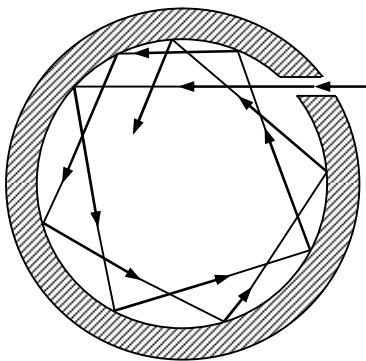


Рис. 110. Модель абсолютно черного тела

Моделью абсолютно черного тела является полость с небольшим отверстием, внутренняя поверхность которой зачернена (рис. 110). Луч света, попавший внутрь такой полости, испытывает многократные отражения от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего из полости излучения оказывается практически равной нулю. Опыт показывает, что при размере отверстия,

меньшего 0,1 диаметра полости, падающее в отверстие излучение любой частоты полностью поглощается полостью.

§ 59. Закон Кирхгофа

Между излучательной и поглощательной способностями любого тела имеется функциональная связь. В этом можно убедиться, проделав мысленный эксперимент. Пусть внутри замкнутой оболочки (рис. 111), поддерживаемой при постоянной температуре T , помещены несколько тел. Воздух из оболочки эвакуирован, так что тела могут обмениваться энергией между собой и с оболочкой только путем излучения и поглощения электромагнитных волн.

Опыт показывает, что такая система через некоторое время придет в состояние теплового равновесия: тела и оболочка примут одну и ту же

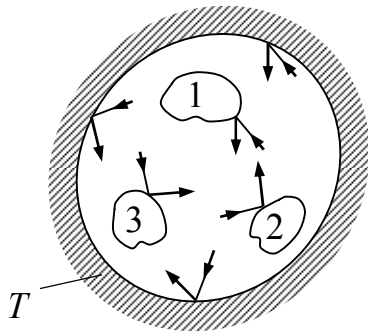


Рис. 111. Тепловое равновесие между системой тел и замкнутой оболочкой

температуру T . В таких условиях тело, обладающее большей излучательной способностью M_{ω}^0 , теряет в единицу времени с единицы поверхности больше энергии, чем тело, обладающее меньшей M_{ω}^0 . Поскольку температура и, следовательно, запас энергии тел не изменяется, то тело, излучающее больше энергии, должно и больше поглощать, т.е. обладать большей поглощательной способностью $\alpha(\omega, T)$. Таким образом, чем больше излучательная способность тела M_{ω}^0 , тем больше его поглощательная спо-

собность $\alpha(\omega, T)$. Отсюда вытекает соотношение:

$$\left(\frac{M_{\omega}^0}{\alpha(\omega, T)} \right)_1 = \left(\frac{M_{\omega}^0}{\alpha(\omega, T)} \right)_2 = \left(\frac{M_{\omega}^0}{\alpha(\omega, T)} \right)_3 = \dots ,$$

где индексы 1, 2, 3,...относятся к различным телам. Следовательно отношение излучательной и поглощательной способностей тела не зависит от его природы; оно является одинаковой (универсальной) для всех тел функцией частоты и температуры (закон Кирхгофа):

$$\frac{M_{\omega}^0}{\alpha(\omega, T)} = f(\omega, T), \quad f(\omega, T) - \text{функция Кирхгофа.}$$

Величины M_{ω}^0 и $\alpha(\omega, T)$, взятые отдельно, могут меняться чрезвычайно сильно при переходе от одного тела к другому, однако отношение же их оказывается одинаковой функцией для всех тел. Для абсолютно черного тела $\alpha(\omega, T) = 1$, следовательно, из формулы закона Кирхгофа вытекает, что M_{ω}^0 , которая для абсолютно черного тела обозначается как M_{ω}^* , равна функции Кирхгофа $f(\omega, T)$. Таким образом, функция Кирхгофа есть не что иное, как излучательная способность абсолютно черного тела. В свою оче-

редь, энергетическая светимость тела вычисляется через функцию Кирхгофа следующим образом:

$$M_E = \int_0^{\infty} M_{\omega}^0 d\omega = \int_0^{\infty} \alpha(\omega, T) \cdot f(\omega, T) d\omega.$$

Для абсолютно черного тела

$$M_E^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega, \text{ так как } \alpha(\omega, T) = 1.$$

Для серого тела поглощательная способность не зависит от частоты падающего на него излучения, поэтому ее можно вынести за знак интеграла:

$$M_E^C = \alpha(T) \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \alpha(T) M_E^* = \alpha_T M_E^*.$$

Здесь α_T – коэффициент черноты серого тела.

Закон Кирхгофа описывает только тепловое излучение, являясь настолько характерным для него, что может служить надежным критерием для определения природы излучения. Излучение, которое закону Кирхгофа не подчиняется, не является тепловым. Чтобы определить функцию Кирхгофа, необходимо исследовать излучение абсолютно черного тела.

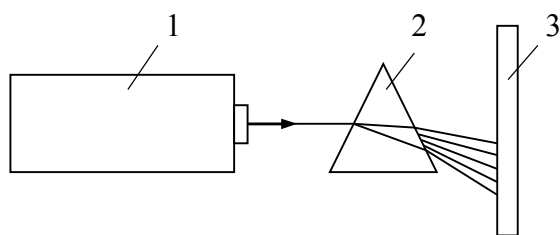


Рис. 112. Схема радиационного спектрометра

Таких тел в природе не существует, но их создают искусственно.

Такие устройства по своим свойствам очень близки к свойствам абсолютно черного тела. Если стенки 1 этого устройства поддерживать при некоторой температуре T (рис.

112), то из его отверстия выходит излучение, весьма близкое к излучению абсолютно черного тела при той же температуре.

Разлагая это излучение в спектр 2 и измеряя прибором 3 интенсивность различных участков спектра, можно экспериментально найти вид функции $\varphi(\lambda, T)$ и пересчитать ее на функцию Кирхгофа $f(\omega, T)$ (рис. 113). Площадь, охватываемая кривой и осью длин волн дает энергетическую светимость абсолютно черного тела:

$$M_E^* = \int_0^{\lambda} M_{\lambda}^* d\lambda,$$

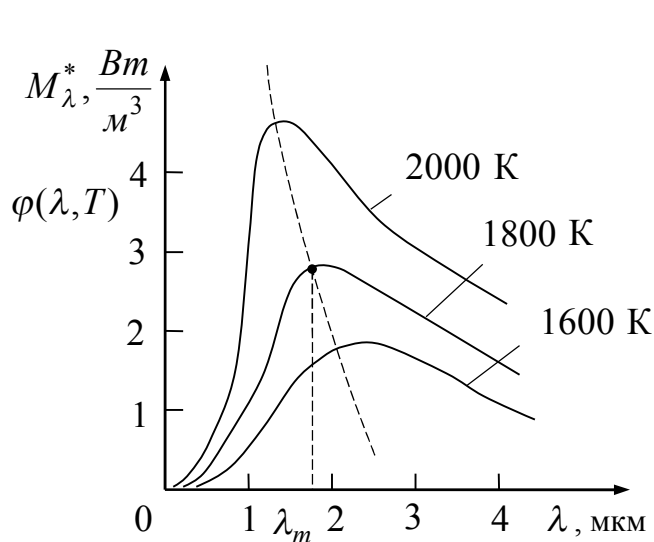


Рис. 113. Распределение излучательной способности абсолютно черного тела по длинам волн

Из рис. 113 следует, что M_λ^* резко возрастает с температурой. Кроме того, максимум излучательной способности абсолютно черного тела с увеличением температуры смещается в сторону более коротких длин волн. Величина λ_m соответствует максимуму функции M_λ^* , например при 1800 К.

§ 60. Закон Стефана–Больцмана. Законы Вина

В 1879 г. австрийский физик Стефан, анализируя экспериментальные данные, пришел к выводу, что энергетическая светимость M_E любого тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Однако последующие более точные измерения показали некоторую неверность его выводов. В 1894 г. Больцман, применяя термодинамический метод исследования, теоретически показал, что полученная Стефаном зависимость справедлива не для любого, а только для абсолютно черного тела (закон Стефана–Больцмана):

$$M_E^* = \sigma T^4,$$

где M_E^* – энергетическая светимость абсолютно черного тела; σ – постоянная Стефана–Больцмана ($\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²К⁴). Для серого тела $M_E^C = \alpha_T \cdot \sigma T^4$, где α_T – коэффициент черноты серого тела.

В 1893 г. немецкий физик Вин, воспользовавшись кроме термодинамики электромагнитной теорией, показал, что функция Кирхгофа для абсолютно черного тела должна иметь вид:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) = M_\omega^*,$$

где F – неизвестная функция отношения частоты к температуре.

Перепишем эту функцию через λ , T для сравнения с экспериментальными результатами:

$$M_{\lambda}^*(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T} \right) = \frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T),$$

где $\Psi(\lambda T)$ – неизвестная функция произведения λT .

Это соотношение позволяет установить зависимость между длиной волны λ_m , на которую приходится максимум функции $M_{\lambda}^*(\lambda T)$, и температурой. Продифференцируем по λ функцию M_{λ}^* :

$$\frac{dM_{\lambda}^*}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^5} \Psi'(\lambda T) T - \frac{5}{\lambda^6} \Psi(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^6} [\lambda T \Psi'(\lambda T) - 5 \Psi(\lambda T)].$$

При длине волны λ_m , соответствующей максимуму функции M_{λ}^* , последнее выражение должно обращаться в нуль:

$$\left(\frac{dM_{\lambda}^*}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_m^6} [\lambda_m T \Psi'(\lambda_m T) - 5 \Psi(\lambda_m T)] = 0.$$

Так как $\lambda_m \neq \infty$, то равно нулю выражение, заключенное в квадратные скобки. Решение этого алгебраического уравнения относительно неизвестного $(\lambda_m T)$ дает корень уравнения, т.е. конкретное число (первый закон Вина):

$$\lambda_m T = b,$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – первая постоянная Вина.

Последнее выражение называют также законом смещения Вина, потому что оно показывает смещение положения максимума функции M_{λ}^* в область коротких длин волн по мере возрастания температуры (см. рис. 128). Закон Вина даёт математическое описание того факта, что при понижении температуры нагретых тел в их спектре преобладает длинноволновое излучение (например, переход белого каления в красное при остывании металла).

Вин вывел также второй закон, согласно которому

$$M_{\lambda_m}^* = c T^5,$$

где $c = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/м³К⁵.

§ 61. Формула Рэлея–Джинса

Законы Стефана–Больцмана и Вина играют в теории теплового излучения важную роль, однако они являются частными законами, так как полностью не объясняют распределение энергии теплового излучения по частотам при различных температурах.

Следующая попытка получить теоретическую зависимость $M_{\omega}^* = f(\omega, T)$ принадлежит английским физикам Рэлею и Джинсу, которые исходили из представлений о равномерном распределении энергии по степеням свободы элек-

ромагнитной волны, т.е. попытались применить волновую теорию к тепловому излучению. Они предположили, что на каждое электромагнитное колебание приходится в среднем энергия, равная kT : $1/2 kT$ – электрическая энергия волны, $1/2 kT$ – магнитная энергия волны (в молекулярной физике на каждую колебательную степень свободы молекулы приходится в среднем энергия, равная kT).

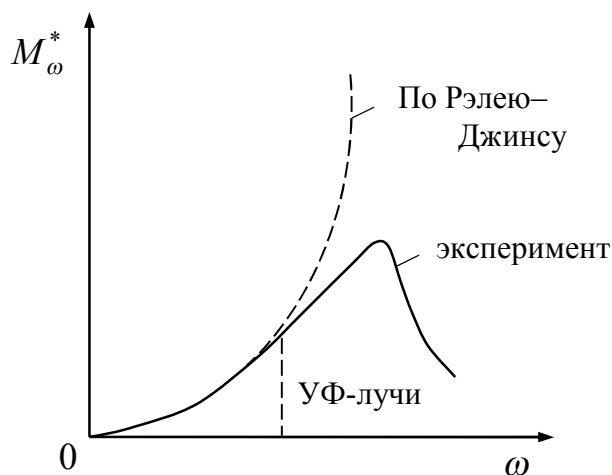


Рис. 114. Сопоставление экспериментальной и теоретической (Рэля–Джинса) зависимостей излучательной способности абсолютно черного тела от частоты излучения

Формула Рэля–Джинса для излучательной способности абсолютно черного тела имеет вид

$$M_{\omega}^* = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle \varepsilon \rangle.$$

Как показал опыт, это выражение согласуется с экспериментальными данными только в области малых частот и больших температур (рис. 114). В области больших частот формула Рэля–Джинса резко расходится с экспериментом. Кроме того, если попытаться с помощью этой формулы вычислить энергетическую светимость абсолютно черного тела, то получится про-

тиворечащий опыту результат:

$$M_E^* = \int_0^{\omega} M_{\omega}^* d\omega = \int_0^{\infty} \frac{kT}{4\pi^2 c^2} \omega^2 d\omega \rightarrow \infty.$$

Совокупность противоречащих опыту результатов, полученных с помощью основанной на волновой теории формулы Рэля–Джинса, получила в физике название «ультрафиолетовой катастрофы», так как противоречие с экспериментом начинается в диапазоне частот, соответствующих ультрафиолетовым лучам. Это – катастрофа классической физики, которая не смогла объяснить закономерности распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела.

§ 62. Квантовая гипотеза и формула Планка

В 1900 г. немецкий физик Планк нашел аналитический вид функции $f(\omega, T)$ Кирхгофа, в точности совпадающий с экспериментальными результатами. Для этого он выдвинул предположение, которое не укладывается в рамки классической физики, а именно – в некоторых физических явлениях электромагнитное излучение осуществляется не непрерывно, а в виде от-

дельных порций энергии – квантов (от лат. quantum – сколько), величина которых пропорциональна частоте излучения

$$\varepsilon = \hbar\omega = h\nu.$$

В этом предположении заключается квантовая гипотеза. Коэффициент пропорциональности $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ получил название постоянной Планка. Суммарная энергия излучения должна быть кратна величине одной порции энергии:

$$E = N\varepsilon = N\hbar\omega, N = 1, 2, 3, \dots,$$

где N – число квантов энергии.

Поскольку в излучение входят волны различных частот, то величина квантов энергии в этом излучении различна, и средняя величина одного кванта

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Этот результат получен методом математической статистики и существенно отличается от аналогичной величины, полученной Рэлеем и Джинсом. Вместо энергии kT одного электромагнитного колебания Планк принял в расчет среднюю энергию $\hbar\omega$ одного кванта. Если подставить этот результат в формулу Рэля–Джинса, то в результате получим:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Это выражение называется формулой Планка. Формула Планка очень хорошо описывает экспериментальные результаты по распределению энергии в спектре излучения абсолютно черного тела во всем интервале частот от 0 до ∞ и при различных температурах. С помощью этой формулы нетрудно получить все законы теплового излучения. В качестве примера выведем закон Стефана–Больцмана. Для энергетической светимости абсолютно черного тела имеем:

$$M_E^* = \int_0^\infty M_\omega^* d\omega = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Для вычисления произведем замену переменных $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$, тогда $\omega = \frac{kT}{\hbar}x$ и $d\omega = \frac{kT}{\hbar}dx$. В результате

$$M_E^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 x^3 \left(\frac{kT}{\hbar}\right) \frac{dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

В полученном выражении интеграл является табличным и равным $\frac{\pi^4}{15}$, поэтому

$$M_E^* = \frac{\pi^2 k^4}{4c^2 \hbar^3 15} T^4 = \sigma T^4.$$

С помощью формулы Планка, зная универсальные постоянные $\hbar$, k и c можно вычислить значения σ и b , и наоборот (именно так и было получено первое численное значение постоянной Планка). Таким образом, формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальными данными, но и содержит в себе частные законы теплового излучения, а также позволяет вычислить константы в законах теплового излучения. Это стало возможным лишь благодаря квантовой гипотезе Планка.

§ 63. Оптическая пирометрия

Пирометрия (от греч. *pyr* – огонь и *metreo* – измеряю) – это совокупность оптических (бесконтактных) методов измерения температуры. Поскольку интенсивность теплового излучения резко убывает с уменьшением температуры тел, методы пирометрии применяются для измерения относительно высоких температур. При $T \leq 800$ °С они являются второстепенными, при $T > 800$ °С становятся основными, а при $T > 3000$ °С – единственными методами измерения температуры. В основе пирометрии лежат законы теплового излучения, которые используются для бесконтактного измерения температуры светящихся тел (горячего металла, звезд и т.п.)

Приборы для измерения температуры нагретых тел в оптическом (видимом) диапазоне спектра электромагнитных волн называются пирометрами. В зависимости от того, какой закон теплового излучения используется при измерении температуры тел, различают радиационную, цветовую и яркостную температуры.

1. Радиационная (от лат. *radio* – излучаю) температура. В этом способе регистрируется энергетическая светимость исследуемого тела и по закону Стефана–Больцмана вычисляется его радиационная температура:

$$T_p = \sqrt[4]{M_E / \sigma}.$$

Поскольку закон Стефана–Больцмана годится только для абсолютно черного тела, то определенная таким образом величина равна температуре абсолютно черного тела, при которой его энергетическая светимость равна энергетической светимости исследуемого тела

$$M_E^* = M_E.$$

Радиационная температура T_p тела всегда меньше его истинной температуры. Для простоты предположим, что мы измеряем температуру серого тела. Для него энергетическая светимость

$$M_E^C = \alpha_T \cdot M_E^* = \alpha_T \cdot \sigma T^4.$$

С другой стороны, для того же тела

$$M_E^C = \sigma T_p^4.$$

Приравнивая правые части, получим

$$\alpha_T \cdot \sigma T^4 = \sigma T_p^4$$

или

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\alpha_T}}.$$

Так как $\alpha_T < 1$, то $T_p < T$, т.е. истинная температура тела всегда больше радиационной. Перед измерениями радиационный пирометр калибруют по излучению устройства, моделирующего излучение абсолютно черного тела.

2. Цветовая температура. Для измерения температуры тел, у которых коэффициент α_T постоянен в оптическом диапазоне спектра, применяют цветные пирометры. Для серых тел (или тел, близких к ним по свойствам) энергетическая светимость равна

$$M_E^C = \alpha_T \cdot M_E^*,$$

где $\alpha_T = \text{const} < 1$ при $T = \text{const}$. Следовательно в данном случае, распределение энергии в спектре излучения серого тела такое же, как и в спектре излучения абсолютно черного тела, имеющего ту же температуру, т.е. величина λ_m для обоих тел одинакова. Поэтому к серым телам применим первый закон Вина для абсолютно чёрного тела, из которого, зная длину волны λ_m , соответствующую максимуму M_λ^* исследуемого тела, можно определить его температуру:

$$T_u = \frac{b}{\lambda_m}.$$

Эта температура называется цветовой температурой. Для серых тел цветовая температура совпадает с истинной.

3. Яркостная температура. Её измерение основано на применении закона Кирхгофа. Наиболее распространенный способ определения температур использует сравнение излучения светящегося тела с излучением абсолютно черного тела на одном и том же фиксированном узком участке спектра $\Delta\lambda$. Обычно используется участок, лежащий в окрестности $\lambda = 0,66$ мкм (красный свет). Для этого изображение тела наблюдают через красный светофильтр. Яркостный пирометр часто называют пирометром с исчезающей нитью, так как в состав пирометра входит нить накаливания, накал которой подбирается таким, чтобы нить как бы исчезла на фоне раскаленного тела. В этом случае яркости тела и нити одинаковы. Отсюда и

терминология – яркостная температура. Поскольку яркости одинаковы, то и излучательные способности одинаковы. Предварительно пирометр градуируют по абсолютно черному телу, температура которого известна, причем модель абсолютно черного тела входит в комплект измерительного устройства. Яркостная температура T_y – температура абсолютно черного тела, при которой для определенной длины волны его излучательная способность равна излучательной способности исследуемого тела

$$M_{\lambda}^*(\lambda, T_y) = M_{\lambda}^0(\lambda, T),$$

где T – истинная температура тела. Установим соотношения между T_y и T .

По закону Кирхгофа, для исследуемого тела при длине волны λ

$$\frac{M_{\lambda}^0(\lambda, T)}{\alpha(\lambda, T)} = \varphi(\lambda, T),$$

или, учитывая связь между $M_{\lambda}^*(\lambda, T_y)$ и $M_{\lambda}^0(\lambda, T)$ получим

$$\alpha(\lambda, T) = \frac{M_{\lambda}^*(\lambda, T_y)}{\varphi(\lambda, T)}.$$

Так как для нечерных тел $\alpha < 1$, то $M_{\lambda}^*(\lambda, T_y) < \varphi(\lambda, T)$ и, следовательно, $T_y < T$. Истинная температура определяется по формуле

$$T = \frac{T_y}{1 + \frac{\lambda_0}{C'} T_y \ln \alpha(\lambda, T)},$$

где $\lambda_0 = 0,66$ мкм, что соответствует красному цвету светофильтра; $C' = 0,015$ мК.

§ 64. Внешний фотоэффект и его законы

Внешним фотоэлектрическим эффектом, или фотоэффектом, называется явление излучения электронов веществом под действием падающих на вещество электромагнитных волн. Фотоэффект имеет место в твердых телах (металлах, диэлектриках, полупроводниках), а также в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация). Это явление открыл в 1887 г. Герц, который обнаружил усиление электрического разряда при облучении ультрафиолетовыми лучами искрового промежутка между металлическими электродами.

В дальнейшем фотоэффект исследовал российский физик А.Г. Столетов, который экспериментально установил следующие закономерности: 1) излучаемые под действием света заряды имеют отрицательный знак; 2) наиболее интенсивно излучаются заряды под действием ультрафиолетовых лучей; 3) величина излучаемого веществом заряда пропорциональна поглощенной им световой энергии. В 1898 г. английский физик Дж. Томсон установил, что излучаемые при фотоэффекте заряженные ча-

стицы представляют собой электроны. Внешний фотоэффект изучается на установке, показанной на рис. 115.

Два электрода (катод К из исследуемого металла и анод А, представляющий собой металлическую сетку) размещены в вакуумированной трубке и подключены к источникам питания так, что с помощью потенциометра R можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода через кварцевое окошко, измеряют миллиампер-

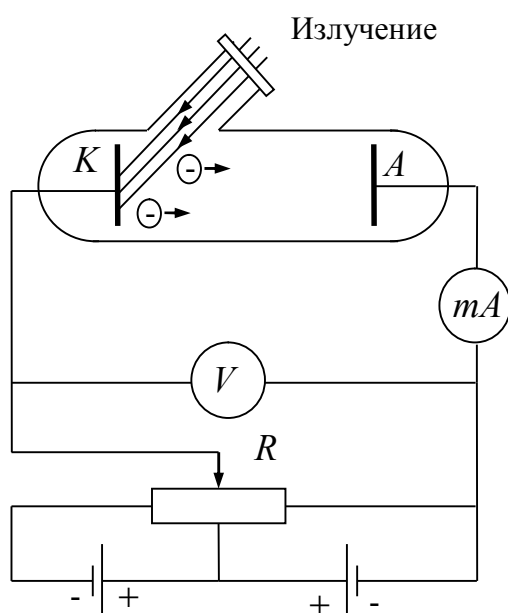


Рис. 115. Схема установки для изучения фотоэффекта

По мере увеличения напряжения фототок монотонно возрастает, т.е. все большее число фотоэлектронов достигает анода. При некотором напряжении фототок, как говорят, достигает насыщения, т.е. далее не увеличивается. Это означает, что все фотоэлектроны, вылетевшие с катода (но

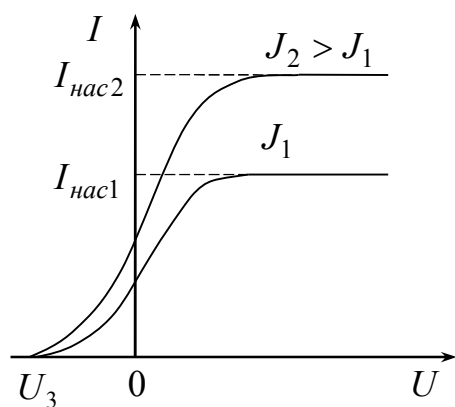


Рис. 116. Вольт-амперная характеристика фотоэффекта

не все, находящиеся на его поверхности), достигают анода, поэтому ток насыщения

$$I_{\text{нас}} = en,$$

где n – число электронов, излучаемых катодом в 1с.

При $U = 0$ фототок не исчезает, так как электроны покидают катод со скоростью, отличной от нуля. Следовательно, электроны обладают запасом кинетической энергии и могут достигать анода без внешнего поля. Чтобы фототок стал равным нулю, необходимо

приложить задерживающее напряжение U_3 противоположной полярности. При таком напряжении ни одному из электронов, даже обладающему при вылете из катода наибольшим значением скорости v_m , не удастся преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода. В результате электроны возвращаются на катод. Поэтому работа сил электрического поля по торможению электрона должна быть равна максимальному запасу кинетической энергии электрона

$$eU_3 = \frac{1}{2}mv_m^2.$$

Из формулы видно, что, измерив задерживающее напряжение U_3 , можно определить максимальные значения скорости и кинетической энергии фотоэлектронов.

В результате проведенных исследований был установлен I закон фотоэффекта, или закон Столетова: при неизменном спектральном составе падающего на катод излучения величина фототока насыщения пропорциональна интенсивности падающего излучения,

$$I_{\text{нас}} \sim J.$$

Интенсивность J численно равна средней по времени величине энергии, переносимой излучением в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярно направлению распространения излучения (см. § 33 гл. VIII)

$$J = \left\langle \frac{d^2 E}{dt dS} \right\rangle_t.$$

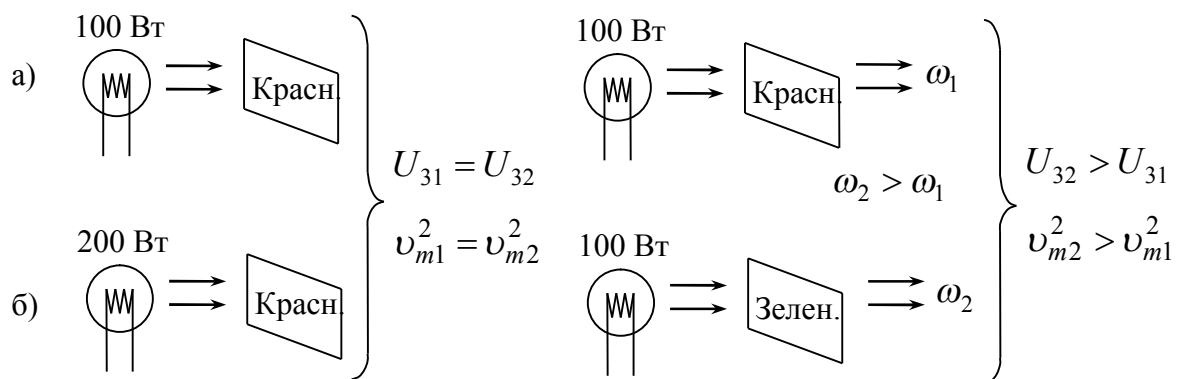


Рис. 117. Схема, поясняющая зависимость задерживающего напряжения от частоты излучения

Что касается задерживающего напряжения, то оно от интенсивности излучения не зависит, т.е. не зависит от мощности источника света. Последнее утверждение можно проиллюстрировать с помощью рис. 117, на котором излучение проходит через красные (а), либо красный и зеленый

(б) светофильтры. Видно, что U_3 зависит от частоты ω излучения, а именно: чем больше частота, тем больше задерживающее напряжение.

Количественные исследования зависимости U_3 от ω показали, что эта зависимость является линейной (рис. 118):

$$U_3 = a\omega - \varphi.$$

Умножим левую и правую часть зависимости на заряд электрона, получим:

$$eU_3 = ea\omega - e\varphi.$$

Поскольку

$$eU_3 = \frac{mv_m^2}{2},$$

то

$$\frac{mv_m^2}{2} = ea\omega - e\varphi,$$

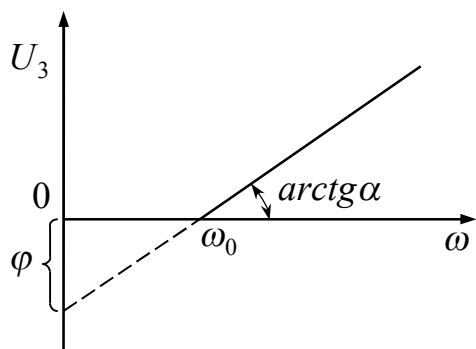


Рис. 118. График зависимости задерживающего напряжения от частоты излучения

т.е. максимальная кинетическая энергия электрона линейно возрастает с частотой падающего излучения (II закон фотоэффекта). Отсюда следует, что для того чтобы электроны могли покинуть катод под действием излучения (чтобы v_m не была мнимой величиной), необходимо, чтобы $(ea\omega - e\varphi) \geq 0$, т.е. чтобы $a\omega \geq \varphi$.

Следовательно, значение частоты ω_0 , которому соответствует начало увеличения U_3 , может быть определено так:

$$\omega_0 = \frac{\varphi}{a}.$$

Если частота падающего на вещество излучения $\omega \geq \omega_0$, то начинается явление внешнего фотоэффекта, поэтому ω_0 называется граничной частотой. Наличие граничной частоты для каждого вещества, составляет содержание III закона фотоэффекта: для каждого вещества существует минимальная (граничная) частота, при которой излучение любой интенсивности фотоэффекта не вызывает. Соответствующая граничной частоте длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi ca}{\varphi}$$

называется красной границей фотоэффекта, так как если длина волны падающего на вещество излучения $\lambda \leq \lambda_0$, то также начинается фотоэффект, а для большинства металлов λ_0 соответствует излучению красного цвета.

§ 65. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

Законы фотоэффекта невозможно объяснить с помощью волновой теории света. Согласно этой теории, под действием световой волны в металле возникают вынужденные колебания электронов, амплитуда которых пропорциональна амплитуде падающей волны, т.е. ее интенсивности. Кинетическая энергия, которой обладает электрон, вылетающий с поверхности вещества, пропорциональна амплитуде вынужденных колебаний и, следовательно, должна быть также пропорциональна интенсивности падающего излучения, а не его частоте, что следует из II закона фотоэффекта. Кроме того волновой теории противоречит наличие граничной частоты, так как по волновой теории, фотоэффект должен существовать при любой частоте излучения, была бы достаточной интенсивность волны.

В 1905 г. Эйнштейн показал, что явление фотоэффекта и его законы находят объяснение в рамках предложенной им квантовой теории фотоэффекта. Согласно этой теории, свет при фотоэффекте поглощается веществом такими же порциями энергии – квантами, какими он излучается в соответствии с квантовой гипотезой Планка. По Эйнштейну каждый квант $\varepsilon = \hbar\omega$ поглощается только одним электроном. Поэтому число фотоэлектронов, вылетевших с поверхности катода, должно быть пропорционально числу поглощенных фотонов. В квантовой теории интенсивность излучения представляется следующим образом. По определению интенсивность это величина, численно равная средней по времени энергии, переносимой излучением в единицу времени сквозь единичную площадку по нормали к ней. В свою очередь энергия излучения $E = N\hbar\omega$, где N – число квантов энергии. В результате оказывается, что интенсивность излучения пропорциональна частоте излучения и числу квантов энергии, пересекающих в единицу времени единичную площадку. Чем больше квантов энергии поглощается в единицу времени веществом, тем больше в единицу времени излучается фотоэлектронов, а число электронов, упорядоченно перемещенных в пространстве в единицу времени есть не что иное, как электрический ток, в данном случае фототок насыщения. Так объясняется квантовой теорией закон Столетова, или I закон фотоэффекта.

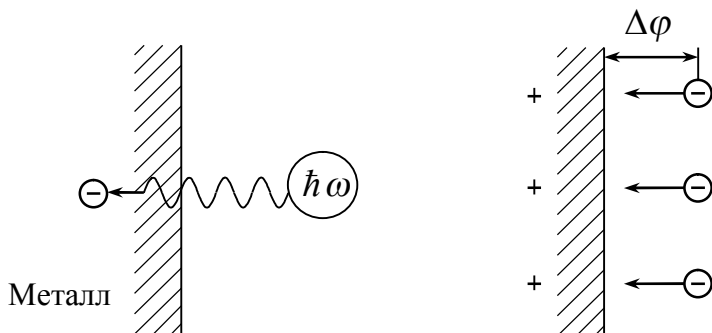


Рис. 119. Взаимодействие электронов с квантами энергии

Поглощенный электроном квант энергии (рис. 119) расходуется на совершение работы выхода A_g и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии.

Работой выхода называется работа, которую необходимо совершить для удаления электрона из вещества, и которая является характеристикой данного вещества. Причинами существования работы выхода является появление избыточного положительного заряда в том месте, которое электрон покинул, и возникновение двойного электрического слоя, образованного электронами, покинувшими вещество, и наружным слоем положительных ионов (см. рис. 119), т.е. электрону нужно преодолеть разность потенциалов $\Delta\varphi$.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$\hbar\omega = A_g + \frac{mv_m^2}{2}.$$

Это уравнение называется уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Из эксперимента следует, что

$$eU_z = ea\omega - e\varphi,$$

или

$$ea\omega = e\varphi + eU_z = e\varphi + \frac{mv_m^2}{2}.$$

Так как $eU_z = mv_m^2/2$, то, сравнивая с уравнением Эйнштейна, видим что $e\varphi = A_g$, а $ea\omega = \hbar\omega$ и

$$\frac{mv_m^2}{2} = ea\omega - e\varphi.$$

Отсюда следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты, что соответствует II закону фотоэффекта. Так как с уменьшением частоты излучения энергия фотоэлектронов уменьшается и может достигнуть нулевого значения ($\frac{mv_m^2}{2} = 0$), то из уравнения Эйнштейна получается, что

$$\hbar\omega_0 = A_g,$$

откуда граничная частота

$$\omega_0 = \frac{A_g}{\hbar}.$$

Таким образом объясняется III закон фотоэффекта, а поскольку A_g является характеристикой данного вещества, то и ω_0 является аналогичной характеристикой.

§ 66. Внутренний и вентильный фотоэффекты

Помимо внешнего фотоэффекта существуют также внутренний и вентильный фотоэффекты. Внутренним фотоэффектом называется явление переходов электронов с одного энергетического уровня на другой внутри полупроводников или диэлектриков, возникающее при поглощении электромагнитного излучения. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению фотопроводимости. Это – явление увеличения электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении.

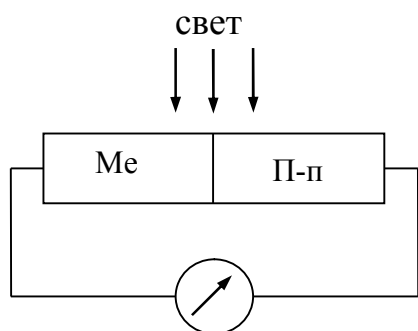


Рис. 120. Схема возникновения вентильного фотоэффекта

Вентильный фотоэффект заключается в возникновении электродвижущей силы (фото-э.д.с.) при освещении контакта двух различных полупроводников, или полупроводника и металла (рис. 120). Вентильный фотоэффект лежит в основе работы прямого преобразователя солнечной энергии в электрическую.

На явлении фотоэффекта основана работа таких приборов как фотоэлементы (вакуумные и газонаполненные), фотоэлектронные умножители, фоторезисторы, вентильные фотоэлементы, солнечные батареи.

§ 67. Масса и импульс фотона. Давление света

Для объяснения распределения энергии в спектре равновесного теплового излучения, которое выражается функцией Кирхгофа, необходимо, по

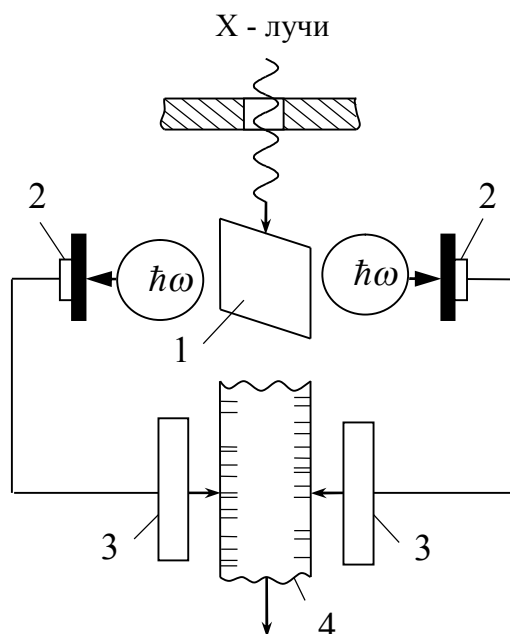


Рис. 121. Схема опыта Бете

квантовой гипотезе Планка, считать, что свет излучается отдельными порциями энергии – квантами, величина которых равна $h\omega$.

Для объяснения фотоэффекта, в соответствии с квантовой теорией Эйнштейна, необходимо считать, что световое излучение поглощается также квантами. Поэтому естественно предположить, что электромагнитное излучение, в том числе и свет, может распространяться в пространстве также дискретными (отдельными) порциями – квантами. Это предположение сделал

Эйнштейн, а световые кванты получили название – фотонов (от греч. pho-tos – свет). Гипотеза Эйнштейна была подтверждена экспериментально, в том числе опытом немецкого физика Бёте. Тонкая металлическая фольга 1 (рис. 121) помещалась между счетчиками излучения 2.

Фольга освещалась слабым пучком рентгеновских лучей, под действием которых она сама становилась источником вторичного рентгеновского излучения (это явление называется рентгеновской флуоресценцией). Вследствие малой интенсивности первичного излучения количество квантов, излучаемых фольгой, очень мало, поэтому счетчики способны регистрировать начало и конец каждого процесса излучения. При регистрации излучения счетчики приводили в действие отметчики 3, ставившие отметки на движущейся бумажной ленте 4. Если излучаемая фольгой энергия распространялась бы равномерно во все стороны, как это следует из волновой теории, то оба счетчика должны срабатывать одновременно, и отметки на ленте располагались бы одна против другой. В действительности же имело место беспорядочное расположение отметок. От источника колебаний электромагнитные волны распространяются во все стороны одновременно, фотон же не может разделиться на две стороны. Такой результат можно объяснить лишь тем, что порции энергии, излучаемые фольгой, распространяются то в одном, то в другом направлении, т.е. излучение распространяется в пространстве отдельными порциями в виде частиц, в данном случае рентгеновских фотонов.

Фотон обладает энергией

$$\varepsilon_{\phi} = \hbar\omega = \hbar 2\pi\nu = \hbar \frac{2\pi}{T} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda/c} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Длине волны зеленого света $\lambda = 0,55$ мкм соответствует энергия $\varepsilon = 2,23$ эВ ($1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж). Для рентгеновских лучей $\lambda = 10^{-4} \dots 10^{-2} \text{\AA}$ ($1\text{\AA} = 10^{-10}$ м). Энергия рентгеновского фотона находится в пределах 15 кэВ...100 МэВ. Такое излучение разрушает биологические объекты.

Согласно теории относительности частица энергией ε обладает массой $m = \varepsilon/c^2$. В соответствии с этим получается, что масса фотона

$$m_{\phi} = \hbar\omega / c^2.$$

Подстановка в формулу

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

значения $v = c$ обращает знаменатель формулы в нуль, однако масса фотона не бесконечна. Это противоречие разрешимо в том случае, если масса покоя m_0 фотона равна нулю. Таким образом, фотон – особенная частица, отличающаяся от таких частиц как электрон, протон, нейтрон, которые обладают отличной от нуля массой покоя и могут находиться в состоянии

покоя. Фотон – элементарная частица, которая существует только двигаясь со скоростью света « c » в любой среде и имеет массу покоя, равную нулю.

Воспользовавшись формулой теории относительности

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

и считая, что $m_0 = 0$ для фотона, получим, что $E = cp$. Отсюда следует, что фотон обладает импульсом

$$p_\phi = \frac{E}{c} = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

С учетом того обстоятельства, что $(2\pi/\lambda) = k$ – волновому числу, а волновое число есть модуль волнового вектора $k = |\vec{k}|$, импульс фотона можно записать в векторной форме:

$$\vec{p}_\phi = \hbar\vec{k}.$$

Из вышеизложенного следует, что фотон, как и любая другая частица, характеризуется энергией, массой и импульсом, а последние выражения связывают корпускулярные (от лат. corpusculum – частица) характеристики фотона – массу, импульс и энергию с волновой характеристикой света – его частотой ω (или длиной волны).

Наличие импульса у фотона приводит к тому, что свет, падающий на тело, оказывает на него давление. С точки зрения квантовой теории, давление света на поверхность тела обусловлено тем, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс.

Вычислим световое давление, оказываемое на поверхность тела потоком монохроматического излучения, падающего по нормали к поверхности. Как известно, давление есть физическая величина, равная отношению силы, приложенной по нормали к поверхности, и величины этой поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Если на поверхность тела падает N фотонов, то результирующая сила $F = NF'$. Сила F есть результирующая сила, действующая на поверхность тела со стороны всех фотонов, падающих на эту поверхность. Каждый фотон действует на поверхность силой F' в течение времени Δt , поэтому изменение импульса поверхности при ударе равно

$$\Delta p = F'\Delta t.$$

По закону сохранения импульса, считая систему тел фотон – поверхность замкнутой, получим

$$p_\phi + 0 = p'_\phi + p'', \text{ или } \underbrace{p_\phi - p'_\phi}_{=\Delta p_\phi} = \underbrace{p'' - 0}_{=\Delta p}$$

где p'' – импульс поверхности.

Отсюда

$$\Delta p_\phi = \Delta p,$$

где Δp_ϕ – изменение импульса фотона при ударе. Далее сила F' , действующая на поверхность со стороны одного фотона вычисляется так:

$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta p_\phi}{\Delta t}.$$

Окончательно результирующая сила

$$F = NF' = \frac{N\Delta p_\phi}{\Delta t}.$$

В итоге давление

$$p = \frac{F}{S} = \frac{N\Delta p_\phi}{\Delta t \cdot S}.$$

При коэффициенте отражения ρ света от поверхности тела ρN фотонов отразится, а $(1 - \rho)N$ фотонов поглотится.

При отражении фотона (абсолютно упругий удар) его вектор скорости меняется на противоположный, поэтому

$$\Delta p_\phi = p_\phi - (-p_\phi) = 2p_\phi = 2 \frac{\hbar\omega}{c}.$$

При поглощении фотона (абсолютно неупругий удар) его скорость становится равной нулю, поэтому

$$\Delta p_\phi = p_\phi - 0 = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

В результате давление света на поверхность тела

$$p = \frac{N}{\Delta t \cdot S} \left[2 \frac{\hbar\omega}{c} \rho + \frac{\hbar\omega}{c} (1 - \rho) \right] = n \frac{\hbar\omega}{c} (1 + \rho),$$

где $n = N / \Delta t \cdot S$ – поверхностная плотность потока фотонов. Произведение $\hbar\omega \cdot n = E_\phi$ есть суммарная энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности тела в единицу времени, тогда

$$p = (1 + \rho) \frac{E_\phi}{c}.$$

За 1с путь l , пройденный фотоном перед его ударом о поверхность тела, численно равен его скорости c , а так как площадь поверхности $S = 1 \text{ м}^2$, то произведение

$$l \cdot S = V = c \cdot S = c \cdot 1 = c,$$

где V – объем пространства у поверхности тела, содержащий n фотонов. Как видно, в этой формуле объем V численно равен скорости света c . В результате давление света

$$p = (1 + \rho) \frac{E_{\phi}}{V} = (1 + \rho) w_{\phi},$$

где w_{ϕ} – объемная плотность энергии излучения.

Экспериментальным доказательством существования светового давления на твердые тела и газы явились опыты российского физика П.Н. Лебедева.

§ 68. Эффект Комптона

Наиболее отчетливо проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения в явлении, которое получило название эффект Комптона. Американский физик Комpton, исследуя в 1923 году рассеяние монохроматических рентгеновских лучей веществами с легкими атомами (бор, литий), обнаружил, что в составе рассеянного излучения наряду с излучением первоначальной длины волны наблюдается также излучение более длинных волн λ' . Опыты показывают, что разность

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

не зависит от длины волны λ падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только величиной угла рассеяния ϑ . Длина волны λ' в составе рассеянного излучения получила название сместённой составляющей.

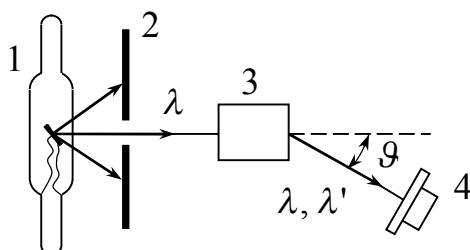


Рис. 122. Схема опыта Комптона

исследования рассеяния монохроматических рентгеновских лучей на графите $^{12}_6\text{C}$.

На рис. 122 показана схема опытов Комптона, где идущий от катодной трубки 1 пучок рентгеновских лучей проходит диафрагму 2 и рассеивающее вещество 3. Спектральный состав рассеянного излучения исследовался с помощью рентгеновского спектрографа 4. На рис. 123 показаны результаты

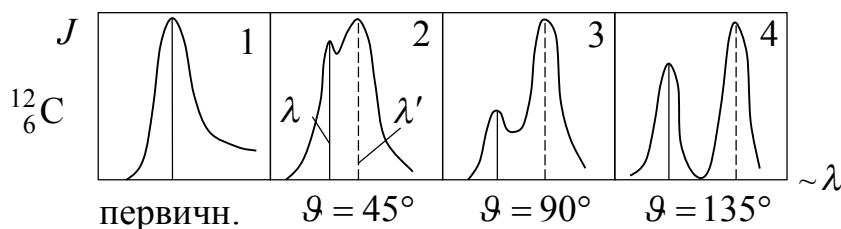


Рис. 123. Интенсивность рассеянных на графите рентгеновских лучей

Здесь график 1 соответствует первичному излучению, $2 - \vartheta = 45^\circ$; $3 - \vartheta = 90^\circ$; $4 - \vartheta = 135^\circ$. На основании результатов эксперимента Комптон эмпирически (от греч. *empeiria* – опыт) получил

$$\Delta\lambda = \lambda_0(1 - \cos\vartheta) = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

На рис. 124 показана зависимость соотношения интенсивностей сме-

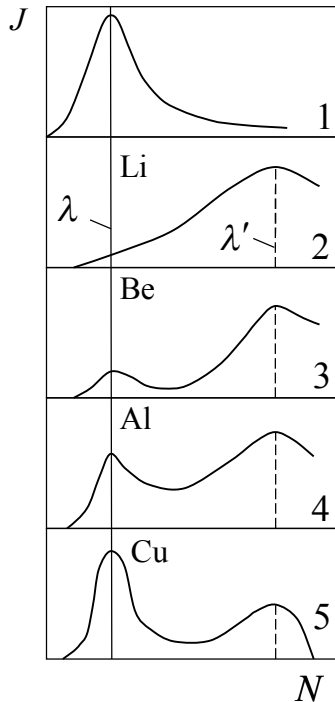


Рис. 124. Интенсивность рассеянных лучей разными элементами

щённой и несмещённой составляющих излучения от атомного номера N рассеивающего вещества, где график 1 соответствует первичному излучению. При рассеянии веществом с малым атомным номером (график 2) практически всё рассеянное излучение имеет смещённую длину волны λ' . По мере увеличения атомного номера всё большая часть излучения рассеивается без изменения длины волны. Эффект Комптона не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны при рассеянии изменяться не должна: под действием периодического поля световой волны электрон колеблется с частотой поля и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты и той же длины волны.

Эффект Комптона объясняется с позиции квантовой теории, рассматривающей рассеяние как процесс упругого соударения рентгеновских фотонов со свободными (оптическими, или валентными) электронами веще-

ства легких атомов, в которых электроны слабо связаны с ядрами атомов. В процессе этого соударения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.

Пусть на первоначально покоящийся электрон падает рентгеновский фотон, импульсы и энергии которых представлены так

	До столкновения	После столкновения
фотон	$\varepsilon = \hbar\omega$; $\vec{p} = \hbar\vec{k}$	$\varepsilon' = \hbar\omega'$; $\vec{p}' = \hbar\vec{k}'$
электрон	$\varepsilon = m_0c^2$; $\vec{p} = 0$	$\varepsilon' = mc^2$; $\vec{p}' = m\vec{v}$.

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + mc^2, \quad (1)$$

$$\hbar\vec{k} = m\vec{v} + \hbar\vec{k}'. \quad (2)$$

Изобразим векторные диаграммы для соударения электрона и фотона (рис. 125). Как видно, импульс фотона меняется по направлению, при этом модуль его скорости не изменяется, так как удар абсолютно упругий. Нашей задачей является нахождение разности волновых чисел $(k'-k)$, от которой можно перейти к разности $(\lambda'-\lambda)$, обнаруженной Комптоном.

Из рис. 125в следует, что, в соответствии с теоремой косинусов,

$$(m\vec{v})^2 = (\hbar\vec{k})^2 + (\hbar\vec{k}')^2 - 2\hbar k\hbar k' \cos \vartheta. \quad (3)$$

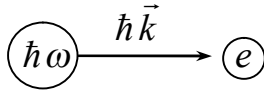
Уравнение (3) имеет квадратичную форму, поэтому придадим квадратичную форму уравнению (1), предварительно разделив его части на c :

$$\hbar \frac{\omega}{c} + m_0 c = \hbar \frac{\omega'}{c} + mc,$$

чтобы в обоих уравнениях были одни и те же переменные k и k' , где

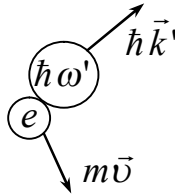
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi \cdot \nu}{c \cdot 1} = \frac{\omega}{c}.$$

До столкновения

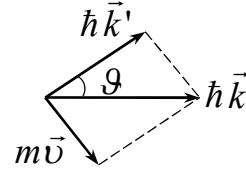


а)

После столкновения



б)



в)

Рис. 125. Схема взаимодействия фотона с электроном

Так как $\frac{\omega}{c} = k$, то, выделив произведение mc в левую часть, получим:

$$mc = m_0 c + \hbar(k - k'). \quad (4)$$

После возведения (4) в квадрат

$$(mc)^2 = (m_0 c)^2 + 2m_0 c \hbar(k - k') + (\hbar k)^2 - 2\hbar k \hbar k' + (\hbar k')^2. \quad (5)$$

Теперь решим систему уравнений (3) и (5); для этого произведем вычитание уравнения (3) из уравнения (5):

$$m^2(c^2 - v^2) = (m_0 c)^2 - 2\hbar^2 k' k (1 - \cos \vartheta) + 2m_0 c \hbar(k - k'). \quad (6)$$

Масса электрона связана с его скоростью v соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Возведя это выражение в квадрат, получим

$$m^2 - m^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2$$

или

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2.$$

В итоге от выражения (6) останется

$$\hbar k' k (1 - \cos \vartheta) = m_0 c (k - k'). \quad (7)$$

Чтобы сравнить с эмпирической формулой Комптона, перейдем к длине волны по формуле $k = 2\pi/\lambda$, т.е. $\lambda = 2\pi/k$:

$$\frac{2\pi\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta) = 2\pi \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} \right) = \lambda' - \lambda = \Delta\lambda.$$

В итоге

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta),$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}$. Это выражение в точности совпадает с эмпирической формулой Комптона, объясняющей наличие смещённой длины волны.

Наличие в составе рассеянного излучения несмещённой длины волны λ объясняется тем, что фотоны сталкиваются не только со свободными, но и с внутренними электронами, сильно связанными с ядром. В этом случае фотон сталкивается с атомом в целом. Так как масса атома по сравнению с массой электрона очень велика, то атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона. Например, атом лития содержит три электрона, в том числе один свободный, поэтому доля электронов с сильной связью составляет 66%. Медь трехвалентна, число электронов в атоме равно 29, и доля электронов с сильной связью составляет 90%. Поэтому при рассеянии на меди эффект Комптона наблюдается в очень слабой степени.

§ 69. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения

Такие явления, как тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона свидетельствуют о том, что свет ведет себя как поток частиц (корпускул). Однако такие явления, как интерференция, дифракция и поляризация могут быть объяснены только на основе представления, что свет представляет собой волновой процесс. Наконец, такие явления, как преломление и давление света объясняются как волновой, так и квантовой теориями. Таким образом, электромагнитное излучение обнаруживает корпускулярно-волновой дуализм (от лат. dualis – двойственный): в одних явлениях оно ведет себя как электромагнитная волна, в других – как поток фотонов.

Соотношение между корпускулярными и волновыми свойствами задается уравнениями

$$\varepsilon_{\phi} = \hbar\omega, \quad p_{\phi} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что свойства непрерывности, характерные для электромагнитной волны, не следует противопоставлять свойствам дискретности (от лат. *discretus* – прерывистый), характерным для фотонов. Волновые свойства света проявляются в закономерностях его распространения, а корпускулярные – в процессах взаимодействия с веществом. Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (с этим связано, например, существование «красной границы» фотоэффекта). Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона, и тем труднее обнаруживаются волновые свойства (например, дифракция рентгеновских лучей обнаружена лишь после применения кристаллов в качестве дифракционной решетки).

Согласно волновой теории, освещенность E_e некоторой точки поверхности пропорциональна интенсивности света и, далее, квадрату амплитуды световой волны, т.е. квадрату амплитудного значения вектора $\vec{E}_0$ напряженности электрического поля в электромагнитной волне:

$$E_e \sim J \sim A^2 = E_0^2.$$

С позиции квантовой теории освещенность пропорциональна поверхностной плотности потока фотонов. Распределение фотонов по поверхности носит статистический (вероятностный) характер. Поэтому плотность потока фотонов пропорциональна вероятности dP того, что фотон попадает на поверхность единичной величины

$$E_e \sim n \sim dP.$$

Следовательно, квадрат амплитуды световой волны в какой-либо точке пространства определяет вероятность того, что фотон попадает в данную точку пространства.

ГЛАВА XI. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ ВЕЩЕСТВА

Тема 23. Элементы атомной физики

§ 70. Закономерности в спектре атома водорода

В результате исследования спектров излучения различных тел установлено, что спектры, т.е. наборы линий и полос, образующиеся при взаимодействии света с дифракционной решеткой, призмой, и т.п., бывают сплошные, полосатые и линейчатые. Сплошные спектры излучают нагретые тела, полосатые излучают молекулы, линейчатые – изолированные атомы в виде разреженного газа или паров металла. Вид спектров показывает, что линии в спектрах атомов располагаются не беспорядочно, а образуют группы или серии линий. Это обстоятельство отчетливо проявляется в спектре атома водорода (рис. 126) для видимых линий.

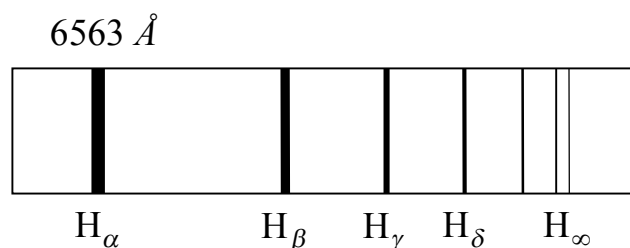


Рис. 126. Спектр излучения атома водорода

Видно, что расстояние между линиями закономерно убывает по мере перехода от более длинных волн к менее длинным. В 1885 году швейцарский физик Бальмер установил, что длины волн этой серии линий водорода могут быть точно представлены формулой

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

где $\lambda_0 = \text{const.}$

В дальнейшем эта формула записывалась в преобразованном виде:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{n^2 - 4}{n^2} = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 - \frac{4}{n^2} \right) = \frac{4}{\lambda_0} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Поскольку в теоретической физике используется круговая частота $\omega = 2\pi c / \lambda$, то последняя формула примет вид

$$\omega = 2\pi c R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где $R' = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга (шведский физик).

Эта формула называется формулой Бальмера, а соответствующая серия спектральных линий атома водорода – серией Бальмера. Дальнейшие исследования показали, что в спектре водорода имеется еще несколько серий:

серия Лаймана (американский физик) $\omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots,$

соответствующая ультрафиолетовой области спектра, а также в инфракрасной области спектра:

серия Пашена (немецкий физик) $\omega = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), n = 4, 5, 6, \dots,$

серия Брэкета (американский физик) $\omega = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right), n = 5, 6, 7, \dots,$

серия Пфунда (американский физик) $\omega = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right), n = 6, 7, 8, \dots,$

где $R = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Все приведенные выше серии в спектре водорода могут быть описаны одной формулой, называемой обобщенной формулой Бальмера:

$$\omega = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где m имеет в каждой данной серии постоянное значение, $m = 1, 2, 3, 4, 5$, (определяет серию), $n = m + 1$ (определяет отдельные линии этой серии). При $n \rightarrow \infty, 1/n \rightarrow 0$ и

$$\omega_{\infty} = \frac{R}{m^2}.$$

Эта частота называется границей серии.

Приведенные выше формулы подобраны эмпирически и долгое время не имели теоретического обоснования, хотя и были подтверждены экспериментально с очень большой точностью. Например, исследование более сложных спектров – спектров паров щелочных металлов (Li, Na, K) – показало, что они представляются набором незакономерно расположенных линий. Ридбергу удалось разделить их на три серии, в каждой из которых расположение линий похоже на закономерное их расположение в серии Бальмера.

Несмотря на то, что формулы различных серий обладают повторяемостью в них целых чисел и универсальной для всех серий является постоянная Ридберга, классической физике не удалось объяснить физический смысл найденных закономерностей.

§ 71. Опыты Резерфорда. Модели атома

Исторически первую модель атома предложил в 1903 году английский физик Дж. Томсон, который перед этим открыл электрон. Согласно этой модели атом представляет собой равномерно и положительно заряженный шар радиуса порядка $1 \text{ \AA}$ (10^{-10} м), внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны; суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара. Модель Томсона оказа-

лась несостоятельной, так как статическое расположение электрических зарядов невозможно.

Следующим этапом в развитии представлений о строении атома явились опыты английского физика Резерфорда по рассеянию α – частиц веществом. α – частицы – это ядра атомов гелия ${}^4_2\text{He}$, которые возникают при радиоактивных превращениях. Они представляют собой положительно заряженные частицы зарядом $2e$ и массой, примерно в 7300 раз большей массы электрона. Пучки α – частиц обладают высокой монохроматичностью (для данного превращения имеют практически одну и ту же скорость $\sim 10^7$ м/с).

Исследуя прохождение α – частиц сквозь золотую фольгу, Резерфорд установил, что основная их часть испытывает незначительные отклонения, но некоторые α – частицы (примерно 1 из 20000) резко отклоняются от первоначального направления (угол отклонения достигает 180°). Так как электроны не могут существенно изменить движение таких тяжелых и быстрых частиц, как α – частицы, то Резерфорд заключил, что значительное отклонение α – частиц обусловлено их взаимодействием с положительным зарядом большой массы; а поскольку число значительных отклонений невелико, то положительный заряд атома сосредоточен в объеме, очень малом по сравнению с объемом атома.

На основании своих исследований, Резерфорд предложил ядерную (планетарную) модель атома. Согласно этой модели, атом представляет собой систему зарядов, в центре которой расположено положительно заряженное ядро, вокруг которого по замкнутым орбитам движутся электроны, образуя электронную оболочку атома. Заряд ядра равен Ze (Z – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева), его размер равен $10^{-15} \dots 10^{-14}$ м, а масса практически равна массе атома в целом. Так как атомы нейтральны, то заряд ядра равен суммарному заряду всех его электронов.

Ядерная модель Резерфорда оказалась в противоречии с классической электродинамикой, согласно которой ускоренно движущиеся электроны должны излучать электромагнитные волны и вследствие этого непрерывно терять энергию. В итоге электроны будут приближаться к ядру и, в конце концов, упадут на него. Таким образом, атом в модели Резерфорда оказывается неустойчивой системой, что противоречит действительности. Кроме того, в модели Резерфорда с приближением к ядру должна непрерывно излучаться электромагнитная энергия, т.е. спектры излучения атомов должны быть сплошными. В действительности же опыт показывает, что атомы имеют линейчатый спектр.

§ 72. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца

В 1913 году датский физик Бор для создания новой модели атома попытался связать опытные закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения и поглощения света. В основу теории Бор положил два постулата.

1. Постулат стационарных (от лат. stationarius – неподвижный) состояний: в атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает и не поглощает энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные квантованные значения момента импульса,

удовлетворяющие условию

$$m_e v r_n = n \hbar, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где m_e – масса электрона, v – скорость движения по n -ой орбите радиуса r_n .

2. Правило частот: при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (или поглощается) один квант излучения с энергией

$$\hbar \omega = E_n - E_m,$$

равной разности энергий E_n и E_m соответствующих стационарных состояний атома до и после излучения (или поглощения). При

$E_m < E_n$, происходит излучение кванта энергии (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т.е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на менее удаленную). При $E_m > E_n$, происходит поглощение кванта энергии (переход атома в состояние с большей энергией, т.е. переход электрона на более удаленную от ядра орбиту). Набор возможных дискретных частот

$$\omega = \frac{E_n}{\hbar} - \frac{E_m}{\hbar},$$

соответствующих квантовым переходам, определяет линейчатый спектр атома.

Существование дискретных энергетических уровней атома подтверждается опытами, осуществленными немецкими физиками Франком и

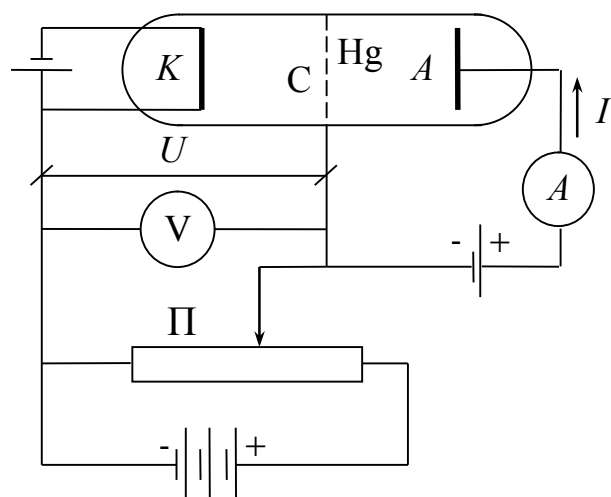


Рис. 127. Схема опыта Франка и Герца

Герцем. Структурная схема их установки приведена на рис. 127. Вакуумная трубка, заполненная парами ртути под небольшим давлением (~ 13 Па), содержала три электрода: катод, анод и сетку.

Электроны, вылетающие с подогреваемого катода, ускорялись разностью потенциалов U , приложенной между катодом и сеткой. Эту разность потенциалов можно было плавно менять с помощью потенциометра П. Между анодом и сеткой создавалось слабое электрическое поле (0,5 В), тормозившее движение электронов. Эмитировавшие с катода электроны движутся в направлении сетки, испытывая соударения с атомами ртути. Те электроны, которые после соударений имеют достаточную энергию, чтобы преодолеть задерживающий потенциал в области сетки – анод, достигают анода и создают электрический ток во внешней электрической цепи. В опытах определялась зависимость величины тока I в цепи анода от напряжения U . Результаты измерений показаны на рис. 128.

При увеличении разности потенциалов U ток вначале монотонно возрастает, достигает максимума при $U = 4,86$ В, после чего резко падает, проходит минимум и снова начинает расти. Максимумы величины тока наблюдаются также при значениях $2 \cdot 4,86$ и $3 \cdot 4,86$ В.

Указанная зависимость объясняется тем, что вследствие дискретности энергетических уровней атомы могут воспринимать энергию только определенными порциями

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1; \Delta E_2 = E_3 - E_1 \text{ и т.д.,}$$

где E_1, E_2, E_3 – энергии первого, второго, третьего и других стационарных состояний.

До тех пор, пока энергия электрона меньше ΔE_1 , соударения между электроном и атомом ртути носят упругий характер, при этом, поскольку масса электрона во много раз меньше массы атома ртути, энергия электрона при столкновениях практически не изменяется. Часть электронов останавливает сетка, остальные же проскочив сквозь сетку, достигают анода, создавая ток в цепи амперметра. Чем больше разность потенциалов U , тем больше скорость, с которой электроны достигают сетки, и тем большая до-

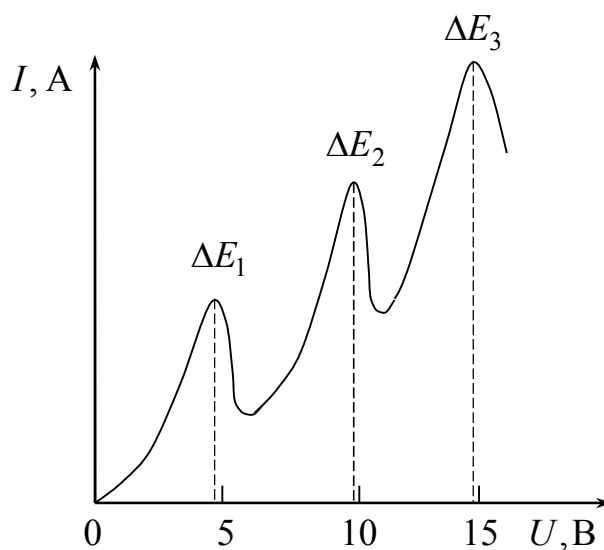


Рис. 128. Зависимость анодного тока от разности потенциалов между сеткой и катодом

ля электронов пролетит сквозь сетку, что приводит к возрастанию величины электрического тока. Если энергия электронов в пространстве катод – сетка достигает или превосходит ΔE_1 , соударения становятся неупругими – электроны при ударе передают атомам энергию ΔE_1 и продолжают двигаться с меньшей скоростью. Поэтому число электронов, достигающих в единицу времени анода, уменьшается. Следовательно, уменьшается электрический ток.

Ближайшим к основному (невозбужденному) состоянию атома ртути является состояние, отстоящее от основного по шкале энергий на 4,86 эВ. Пока $U < 4,86$ В, электроны испытывают упругие соударения с атомами ртути; при $U = 4,86$ В соударения становятся неупругими. Этим объясняется первое резкое уменьшение тока при $U = 4,86$ В. При значениях энергии, кратных 4,86 эВ, электроны могут испытывать с атомами ртути два, три и более неупругих соударения, которые сопровождаются резкими уменьшениями тока. Это действительно наблюдается на опыте. Поскольку вероятность двух- (трех)кратного соударения меньше, чем однократного, то падения тока в цепи происходят при больших значениях I .

§ 73. Теория Бора строения атома водорода

Постулаты Бора позволили рассчитать спектр атома водорода и так называемых водородоподобных атомов, состоящих из ядра зарядом Ze и одного электрона.

Рассмотрим движение электрона в поле атомного ядра. Согласно второму закону Ньютона произведение массы электрона и модуля центростремительного ускорения должно равняться модулю кулоновской силы:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \epsilon = 1.$$

Воспользовавшись первым постулатом Бора, найдем значение скорости и подставим его в последнюю формулу. В итоге получим выражение для вычисления радиуса n -ой стационарной орбиты:

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e Ze^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для атома водорода ($Z = 1$) радиус первой орбиты электрона при $n = 1$, называемый первым боровским радиусом,

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,528 \text{ \AA} = 52,8 \text{ пм},$$

что соответствует расчетам на основании кинетической теории газов. Так как радиусы стационарных орбит измерить невозможно, то для проверки

теории необходимо измерять другие величины, например, энергию излучения и поглощения атома водорода.

Полная энергия водородоподобного атома складывается из кинетической энергии электрона ($m_e v^2 / 2$) и потенциальной энергии электрона и ядра

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Здесь учтено, что значение $m_e v^2$ можно взять из равенства центростремительной и кулоновской сил.

Учитывая, что значения радиуса n -ой стационарной орбиты могут принимать только дискретные (квантованные) значения, получим выражение для энергии n -го состояния. Для этого подставим в последнюю формулу выражение для вычисления r_n :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где знак минус означает, что электрон находится в связанном с ядром состоянии.

Из последней формулы следует, что энергетические состояния атома образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от значения n . Целое число n , определяющее энергетические уровни атома, называется главным квантовым числом. Энергетическое состояние с $n = 1$ является основным состоянием; состояния с $n > 1$ являются

$E, \text{эВ}$		
E_∞	0,00	$n \rightarrow \infty$
E_4	-0,84	$n = 4$
E_3	-1,50	$n = 3$
E_2	-3,38	$n = 2$
E_1	-13,55	$n = 1$

Рис. 129. Энергетические уровни атома водорода

возбужденными. Энергетический уровень, соответствующий основному состоянию атома, называется основным уровнем; все остальные уровни являются возбужденными.

Придавая числу n различные целые значения, получим для атома водорода возможные уровни энергии (рис. 129).

Энергия атома водорода с увеличением n возрастает и энергетические уровни сближаются к границе, соответствующей значению $n \rightarrow \infty$. Атом водорода обладает, таким образом, минимальной энергией E_1 при $n = 1$ и максимальной $E_\infty = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Согласно второму постулату Бора (правило частот), при переходе атома водорода из стационарного состояния n с большей энер-

гией в стационарное состояние m с меньшей энергией излучается квант энергии ($Z = 1$):

$$\hbar\omega = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

откуда круговая частота излучения

$$\omega = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где

$$R = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^3 \varepsilon_0^2} = 3,3 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, получается обобщенная формула Бальмера, а вычисленное по последней формуле значение постоянной R совпадает с экспериментальными результатами.

Теория Бора явилась крупным достижением в развитии атомной физики и стала важным этапом в создании квантовой механики. Однако эта теория обладает внутренними противоречиями – с одной стороны применяет законы классической физики (например, законы Ньютона), с другой – основывается на квантовых постулатах. Она смогла описать спектры водорода и вычислить частоты спектральных линий, однако не смогла объяснить их интенсивности и объяснить, почему одни переходы атома с уровня на уровень совершаются, а другие – нет. Серьезным недостатком теории Бора была невозможность описать с ее помощью атом гелия – один из простейших атомов, следующих за водородом в системе Менделеева.

Тема 24. Основы квантовой механики

§ 74. Гипотеза де Бройля. Волновые свойства вещества

Недостаточность теории Бора сделала необходимым пересмотр представлений о структуре атома и поведении электронов в нем. Как известно, свету присущ корпускулярно-волновой дуализм: в одних явлениях свет ведет себя как волна (интерференция, дифракция, поляризация), в других – как поток частиц (фотоэффект, эффект Комптона, тепловое излучение).

В 1924 г. французский физик де Бройль выдвинул гипотезу об универсальности корпускулярно-волнового дуализма. Это означает, что не только фотоны, но и электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами. С каждой микрочастицей гипотеза связывает, с одной стороны, корпускулярные характеристики – импульс p и энергию E , а с другой стороны – волновые характеристики – частоту ω и длину волны λ . Эта связь выражается с помощью соотношений де Бройля:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \\ \omega &= \frac{E}{\hbar} \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом, любой частице, обладающей импульсом и энергией, сопоставляется плоская волна, длина и частота которой определяются из соотношений де Бройля.

Гипотеза де Бройля была подтверждена рядом опытов, в том числе опытом П.С. Тартаковского–Дж. Томсона (русский и английский физики), наблюдавшим дифракционную картину *1* на фотопластинке *4* при прохождении пучка быстрых электронов *2* (энергия ≥ 50 кэВ) сквозь металлическую фольгу *3* толщиной 1 мкм (рис. 130).

Как видно, результат дифракции электронов напоминает картину при дифракции рентгеновских лучей на монокристалле.

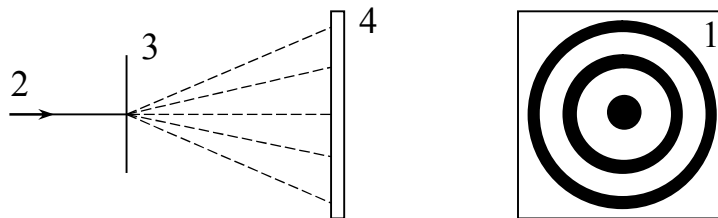


Рис. 130. Схема опытов Тартаковского–Томсона

Дальнейшие исследования показали, что волновые свойства присущи не только большому количеству частиц, но и отдельным электронам. Кроме того, дифракционные явления обнаружены также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Эти экспериментальные доказательства наличия волновых свойств микрочастиц свидетельствуют о том, что корпускулярно-волновой дуализм представляет собой всеобщее свойство материи. Отсюда следует, что волновые свойства должны проявляться и у макроскопических тел, но их экспериментальное обнаружение в настоящее время невозможно из-за отсутствия соответствующих средств измерения. Например, частице массой 1 г, движущейся со скоростью 1 м/с, соответствует волна де Бройля длиной $\lambda \cong 10^{-26}$ м. В то же время размеры ядра атома составляют $\sim 10^{-15}$ м. Таким образом, макроскопические тела проявляют только одну сторону своих свойств – корпускулярную – и не проявляют волновую.

§ 75. Соотношение неопределенностей

Корпускулярно-волновой дуализм частиц связан с проблемой установления границ применимости законов и понятий классической физики для

объектов микромира (микрочастиц), под которыми понимаются элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны и т.п.), а также ядра атомов, атомы и молекулы (исключая полимерные).

В классической механике считается, что всякая макрочастица движется по определенной траектории, так что в любой момент времени точно фиксированы ее координаты и импульс. Микрочастицы же существенно отличаются от макрочастиц тем, что из-за наличия у них волновых свойств, они не имеют траектории. Поэтому нельзя считать, что микрочастица одновременно имеет точные значения координаты и, следовательно, скорости и импульса. Например, понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла, а поскольку импульс выражается через длину волны, то отсюда следует, что микрочастица с определенным импульсом имеет полностью неопределенную координату, так как непонятно, в какой точке волны приложен вектор импульса. Наоборот, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты, то опять-таки, поскольку волны в данной точке не существует, то импульс микрочастицы полностью неопределен. Отсюда вытекает фактическая невозможность одновременно с одинаковой погрешностью измерить координату и импульс микрочастицы.

Математически эти суждения выразил в 1927 году немецкий физик Гейзенберг в виде так называемого соотношения неопределенностей, которое носит его имя. Согласно этому соотношению микрочастица не может иметь одновременно и определенную координату (x, y, z), и определенную соответствующую проекцию импульса, причем неопределенности в значениях этих величин удовлетворяют условиям

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

т.е. произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка $\hbar$.

Из соотношения неопределенностей следует, что, например, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты ($\Delta x = 0$), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ($\Delta p_x \rightarrow \infty$) и наоборот. Таким образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения.

Чтобы подтвердить, что соотношение неопределенностей действительно вытекает из волновых свойств микрочастиц, рассмотрим прохождение электронов сквозь узкую щель шириной Δx , расположенную перпендикулярно направлению их движения (рис. 131). Так как электроны обладают волновыми свойствами, то при размерах щели, сравнимых с длиной волны

λ де Бройля, приписываемой электрону, при прохождении электронов сквозь щель наблюдается дифракция, положение главного максимума которой показано штриховой линией.

До прохождения сквозь щель электроны двигались перпендикулярно оси Ox , отсюда проекция $p_x = 0$, т.е. известна точно, поэтому неопределенность $\Delta p_x = 0$ и $\Delta x \rightarrow \infty$. В момент прохождения некоторых электронов сквозь щель их неопределенность по координате равна Δx , соответственно появляется неопределенность Δp_x проекции импульса, так как вследствие дифракции микрочастица может лететь в пределах угла 2φ :

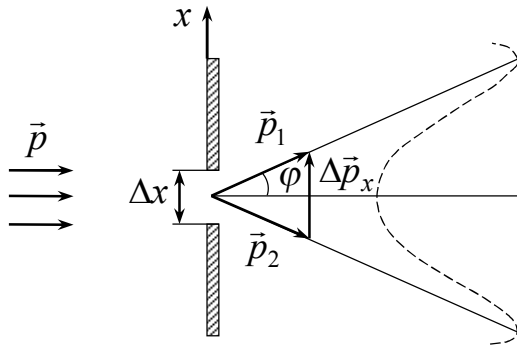


Рис. 131. Дифракция электронов на щели

оси Ox , отсюда проекция $p_x = 0$, т.е. известна точно, поэтому неопределенность $\Delta p_x = 0$ и $\Delta x \rightarrow \infty$. В момент прохождения некоторых электронов сквозь щель их неопределенность по координате равна Δx , соответственно появляется неопределенность Δp_x проекции импульса, так как вследствие дифракции микрочастица может лететь в пределах угла 2φ :

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \Delta \vec{p}_x,$$

$$\Delta p_x = \sqrt{p^2 + p^2 - 2p^2 \cos 2\varphi} = p\sqrt{2(1 - \cos 2\varphi)} = 2p \sin \varphi.$$

При дифракции плоской световой волны на щели первый минимум соответствует углу φ , удовлетворяющему условию

$$\Delta x \sin \varphi = 2 \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

В результате

$$\Delta p_x = 2p \frac{\lambda}{\Delta x},$$

и

$$\Delta x \Delta p_x = 2p\lambda.$$

Так как импульс микрочастицы связан с длиной волны де Бройля соотношением

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda},$$

то

$$\Delta x \Delta p_x = 2 \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \lambda = 4\pi\hbar > \hbar.$$

траектории, т.е. для описания движения электрона нельзя пользоваться законами классической физики.

Оценим в качестве примера неопределенность координаты электрона, движущегося в электронном осциллографе. Пусть длина кинескопа составляет 0,1 м, а радиус пятна на экране 10^{-5} м (рис. 132). Тогда

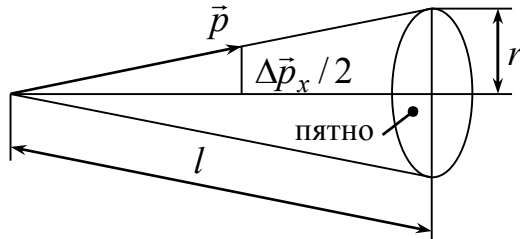


Рис. 132. Неопределенность импульса движущегося электрона

$$\frac{r}{l} = \frac{\Delta p_x}{2p}, \quad \Delta p_x = 2 \frac{pr}{l}.$$

Импульс электрона связан с его энергией соотношением

$$p = \sqrt{2m_e E_k}.$$

Кинетическая энергия, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов U

$$E_k = eU.$$

Тогда неопределенность проекции импульса электрона:

$$\Delta p_x = 2 \frac{pr}{l} = \frac{2\sqrt{2m_e eUr}}{l}.$$

При $U = 10^4$ В, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, получается, что

$$\Delta p_x \approx 10^{-25} \text{ Нс}.$$

Соответственно

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x} \approx 10^{-7} \text{ м},$$

т.е. неопределенность Δx крайне мала по сравнению с размерами пятна на экране осциллографа. Поэтому в данном случае можно говорить о движении электронов по определенной траектории, т.е. пользоваться законами классической механики.

Применим соотношение неопределенностей к электрону, движущемуся в атоме водорода. Если электрон принадлежит атому, то неопределенность координаты равна размерам атома, т.е. $\Delta x \approx 10^{-10}$ м. Если же считать, что неопределенность координаты электрона больше размеров атома, то тогда электрон атому уже не принадлежит. Тогда, разделив на массу электрона обе части соотношения неопределенностей, с учетом того, что $\Delta p_x = m\Delta v_x$ получим:

$$\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}.$$

Отсюда неопределенность проекции скорости $\Delta v_x \approx 10^6$ м/с. Если вычислить скорость электрона с помощью законов классической физики, то

она оказывается равной $v \approx 10^6$ м/с, т.е. сравнимой с Δv_x . Очевидно, что в данном случае нельзя говорить о движении электрона в атоме по опреде-

Соотношение неопределенностей отражает двойственную корпускулярно-волновую природу микрочастиц и позволяет объяснить ряд важных факторов, например, почему электрон не падает на ядро. В самом деле, если бы электрон упал на ядро, его координата и импульс приняли одновременно точно определенные (нулевые) значения, что противоречит соотношению неопределенностей.

Полная энергия электрона в атоме водорода

$$E = E_k + E_n = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – радиус атома. Используя здравый смысл, можно заключить, что погрешность в определении радиуса не может превышать величины радиуса ($\Delta r = r$), поэтому и погрешность в определении импульса не может превышать величины импульса

$$\Delta p = p,$$

Следовательно, из уравнения Шредингера в сферической системе координат получим

$$\Delta r \cdot \Delta p = rp = \hbar, \quad p = \frac{\hbar}{r}.$$

Подставляя значение импульса из последнего выражения в формулу для полной энергии видим, что

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Найдем значение $r = r_0$, при котором $E = E_{\min}$ из условия:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0.$$

Вычислим первую производную от $E(r)$:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

откуда, приравняв нулю, получим

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0,53 \text{ \AA} = r_{\min},$$

т.е. получился первый боровский радиус. Далее, при $r = r_{\min}$

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2 \cdot (me^2)^2}{2m(4\pi\epsilon_0 \hbar^2)^2} - \frac{e^2 me^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Это совпадает с энергией первого боровского уровня при $z = 1$. Таким образом, без постулатов Бора получаются верные значения параметров атома на основании соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Другой формой соотношения неопределенностей является выражение

$$\Delta E \Delta t \geq t,$$

где E – энергия микрочастицы, t – среднее время ее существования. Поэтому в пределах времени Δt энергия может изменяться в пределах ΔE , что не противоречит закону сохранения энергии.

§ 76. Уравнение Шредингера

В связи с обнаружением волновых свойств у микрочастиц и неспособностью классической механики описывать их движение возникла необходимость создания механики нового типа. Такая механика была создана в двадцатых годах прошлого века и получила название квантовой механики.

Основным уравнением квантовой механики является уравнение Шредингера (австрийский физик), которое, подобно уравнениям законов Ньютона и уравнениям Максвелла, не выводится, а постулируется. Правильность этого уравнения подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов, что, в свою очередь, придает ему характер закона природы.

Наличие у микрочастиц волновых свойств математически учитывается тем, что их движение описывается так называемой волновой функцией Ψ , которая входит в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где m – масса микрочастицы, Δ – оператор Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$),

$i = \sqrt{-1}$, $U(x, y, z)$ – потенциальная энергия микрочастицы в силовом поле, в котором частица движется. Это так называемое уравнение Шредингера со временем.

Вид волновой функции Ψ определяется потенциальной энергией U , т.е. характером взаимодействия микрочастицы с другими частицами, создающими поле каких-либо сил, например, с заряженными частицами. Если силовое поле стационарно (не изменяется со временем), то энергия U зависит только от координат. В этом случае Ψ можно представить как произведение двух функций – временной и координатной

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i \omega t} \cdot \psi(x, y, z) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \cdot \psi(x, y, z).$$

Подставим это решение волнового уравнения в уравнение Шредингера со временем; тогда должна получиться его модификация для стационарного силового поля:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \Delta \psi + U e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \psi = i\hbar \psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \left(-i\frac{E}{\hbar} \right).$$

Сгруппировав члены уравнения, содержащие ψ , окончательно получим

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \cdot \psi = 0.$$

Это так называемое уравнение Шредингера без времени.

Чтобы пояснить уравнение Шредингера, рассмотрим свободно движущуюся частицу ($U = 0$), которой, согласно гипотезе де Бройля, сопоставляется плоская волна. Для простоты рассмотрим одномерный случай:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

или в комплексной форме

$$\xi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Следовательно, уравнение плоской волны де Бройля имеет вид

$$\psi = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)},$$

так как $\omega = E / \hbar$, а $k = p / \hbar$. Чтобы составить дифференциальное уравнение, решением которого является $\psi(x, t)$, воспользуемся соотношением

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Для выделения энергии E и импульса p микрочастицы в явном виде из уравнения волны де Бройля проведем дифференцирование:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}}_{=\psi} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) E = -\frac{i}{\hbar} E \psi.$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \right) (-p) \right]^2 = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi,$$

откуда

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

$$p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Подставляя полученные выражения в соотношение, связывающее энергию и импульс микрочастицы, получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Шредингера со временем для случая $U = 0$ (движение свободной частицы).

Проведенные преобразования не являются выводом уравнения Шредингера. Они лишь поясняют логику составления этого уравнения. Доказательством же правильности уравнения Шредингера является согласие с опытом тех выводов, к которым оно приводит.

§ 77. Свойства волновой функции. Квантование энергии и импульса

Соотношения де Бройля и результаты опытов по дифракции микрочастиц показывают, что с математической точки зрения подход к описанию поведения микрочастиц должен быть статистическим, или вероятностным. Это видно из физического смысла волновой функции. Волновая функция, которая является решением уравнения Шредингера, имеет следующий физический смысл: квадрат модуля волновой функции есть плотность вероятности обнаружения микрочастицы в момент времени t в области с координатами x и $x + dx$, y и $y + dy$, z и $z + dz$. Таким образом,

$$|\psi|^2 = \frac{dP}{dV},$$

где dP – вероятность обнаружения микрочастицы в объеме $dV = dx dy dz$. Квадрат модуля волновой функции, как следует из теории функций комплексного переменного, также равен произведению самой функции и комплексно с ней сопряженной

$$|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*.$$

Из условий, налагаемых теорией дифференциальных уравнений на решение уравнений Шредингера, т.е. на волновую функцию, вытекают свойства волновой функции.

Таким образом, волновая функция должна обладать следующими свойствами:

1. Должна быть однозначной, т.е. одному значению аргумента (координата) должно соответствовать одно значение функции;
2. Должна быть конечной (не может принимать бесконечно больших значений), так как математическая вероятность $dP \leq 1$;
3. Должна быть непрерывной, т.е. иметь первую и вторую производные, чтобы существовало уравнение Шредингера.

Кроме того, в теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения, подобные уравнению Шредингера, имеют решения, удовлетворяющие свойствам волновой функции не при любых значениях полной

энергии E , а лишь при некоторых дискретных значениях. Таким образом, энергия микрочастицы квантуется, и это следует не из гипотезы Планка, а из вида уравнения Шредингера. Квантованные значения энергии E_n называются уровнями энергии, а число n , определяющее энергетические уровни микрочастицы, называется квантовым числом. Соответственно, квантованные значения энергии называются собственными для уравнения Шредингера, а решения уравнения называются собственными функциями. Поскольку импульс микрочастицы однозначно связан с энергией E формулой

$$p = \sqrt{2mE},$$

то, следовательно, и импульс микрочастицы принимает квантованные значения.

Для волновых функций должно также выполняться условие нормировки вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP = 1,$$

поэтому

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1,$$

где тройной интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству, т.е. по всей области изменения переменных x, y, z . Интеграл представляет собой сумму вероятностей нахождения частицы во всех возможных элементах объема, т.е. представляет собой вероятность обнаружения частицы в пространстве. Если частица действительно существует, то вероятность ее обнаружения в пределах $\pm \infty$ равна единице.

§ 78. Микрочастица в потенциальной «яме»

Решим простейшую задачу квантовой механики – исследуем поведение микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими стенками. Такая «яма» математически описывается функцией вида (рис. 133):

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & x > l. \end{cases}$$

Примером потенциальной «ямы» является кулоновская потенциальная «яма», описывающая притяжение электрона атомным ядром.

Так как функция $U(x)$ не изменяется со временем, то поле сил, в котором находится микрочастица, является стационарным, и уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

По условию задачи (бесконечно высокие «стенки») частица не проникает за пределы «ямы», поэтому вероятность ее обнаружения за пределами «ямы» равна нулю, следовательно, и все значения ψ – функции в этих частях пространства должны быть нулевыми.

Из условия непрерывности ψ – функции следует, что она должна быть равна нулю и на границах «ямы», т.е. граничные условия в данном случае имеют вид:

$$\psi(0) = 0; \psi(l) = 0.$$

В пределах «ямы» ($0 \leq x \leq l$), где $U = 0$, уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0.$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

получим дифференциальное уравнение, формально одинаковое с уравнением свободных гармонических колебаний

$$\ddot{\psi} + k^2\psi = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

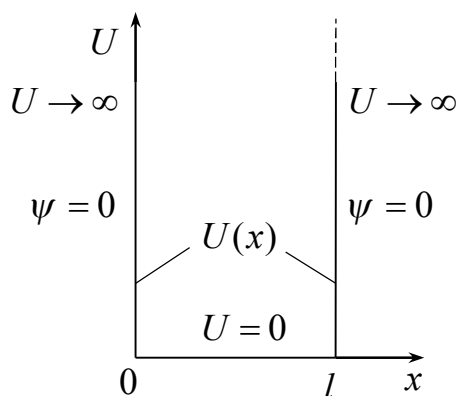


Рис. 133. Потенциальная энергия микрочастицы в бесконечно глубокой одномерной «яме»

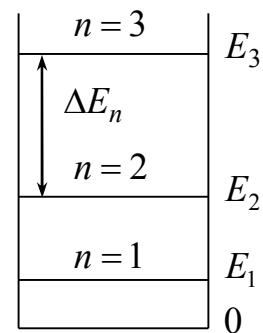


Рис. 134. Энергетические уровни микрочастицы в потенциальной «яме»

Воспользовавшись граничными условиями $\psi(0) = 0$, видим, что $B = 0$, тогда $\psi(x) = A \sin kx$. Условие

$$\psi(l) = A \sin kl = 0$$

выполняется только при $kl = n\pi$, где $n = 1, 2, 3$ — целые числа. Значение $n = 0$ отпадает, так как при этом получается $\psi = 0$ на отрезке от нуля до l , т.е. частица нигде не находится.

Таким образом, получается, что

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

В итоге решение уравнения Шрёдингера в данном случае выглядит так:

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Соответственно, собственные значения энергии имеют вид (из $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$):

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Следовательно, энергия E_n микрочастицы в потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками» не может быть произвольной, а принимает лишь определенные дискретные значения, т.е. квантуется (рис.134).

Если микрочастицей является электрон, то для него при $n = 1$ и $l = 10^{-10}$ м

$$E_1 = \frac{1^2 \cdot 9,87 \cdot 1^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} \approx 10^2 \text{ эВ}.$$

Оценим расстояние между соседними уровнями для различных значений массы частицы и ширины «ямы» l . Разность энергий двух соседних уровней

$$\begin{aligned} \Delta E_n = E_{n+1} - E_n &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [n^2 + 2n + 1 - n^2] = \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n, \text{ для } n > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для молекулы массой 10^{-26} кг при ширине «ямы» $l = 10$ см величина $\Delta E_n \approx 10^{-24} \cdot n$ эВ. Для электрона в металле при ширине «ямы» того же размера аналогичная величина составляет $\Delta E_n \approx 10^{-16} \cdot n$ эВ. Нетрудно видеть, что в этих случаях квантование энергии хотя и имеет место, но его можно не учитывать, так как спектр энергии является практически непре-

рывным и на характер движения микрочастицы квантование энергии не окажет влияния.

Рассмотрим поведение электрона в «яме», размеры которой соизмеримы с атомными размерами ($l \approx 10^{-10}$ м). В этом случае $\Delta E_n \approx 10^2 \cdot n$ эВ. Эта величина одинакова со значением энергии E_n , и дискретность энергетических уровней проявляется заметным образом. Таким образом, чем ближе размеры «ямы» к размерам атома, тем отчетливее проявляется квантование энергии. Влияние квантового числа n сказывается следующим образом. При $n \gg 1$ ($\Delta E_n / E_n$) $\ll 1$ и имеет место практически непрерывная последовательность значений энергии и квантовая природа физических явлений не проявляется. Этот результат является частным случаем принципа соответствия Бора, согласно которому законы квантовой механики при больших значениях квантовых чисел переходят в законы классической физики.

В общем случае принцип соответствия Бора заключается в следующем: любая новая, более общая физическая теория, является развитием классической теории. В свою очередь классическая теория оказывается частным случаем общей теории (при этом последняя в некоторых предельных случаях переходит в классическую).

Рассмотрим собственные функции уравнения Шредингера:

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Множитель A определим из условия нормировки, которое в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = A^2 \underbrace{\int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx}_{=0,5l} = 1.$$

В результате интегрирования получим $A = \sqrt{2/l}$, а собственные функции имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Графики собственных функций, соответствующие уровням энергии E_n приведены на рис. 135а. Здесь также представлены плотности вероятностей обнаружения микрочастицы (рис. 135б).

Из рис. 135 следует, что, например, в квантовом состоянии с $n = 2$ микрочастица не может находиться в середине «ямы», в то время как одинаково часто может пребывать в ее левой и правой частях. Такое поведение микрочастицы несовместимо с понятием траектории движения.

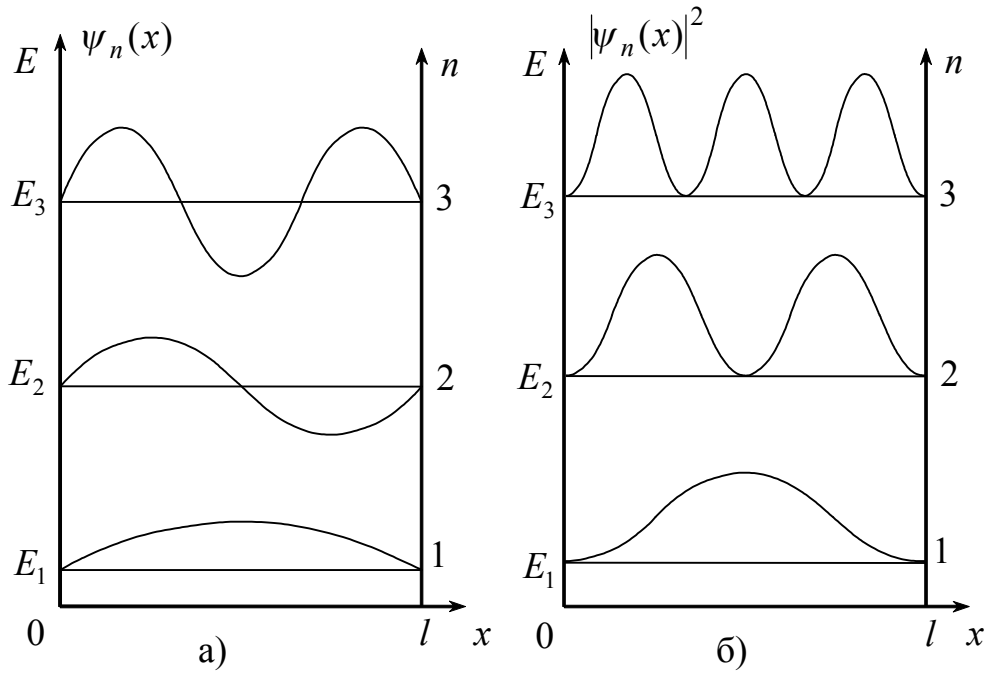


Рис. 135. Графики собственных функций и плотности вероятности обнаружения микрочастицы в потенциальной «яме»

В заключение следует отметить, что в квантовой механике для стационарных состояний деление полной энергии на кинетическую и потенциальную весьма условно, так как противоречит соотношению неопределенностей. Тот факт, что частица обладает определенной кинетической энергией E_k , означает, что она же имеет определенный импульс p . Аналогично, тот факт, что частица имеет определенное значение потенциальной энергии, означает, что она находится в точке с определенными координатами. Так как координата и импульс не могут быть определены одновременно точно, так же не могут быть одновременно точно определены E_k и $E_{\text{п}}$. Для изменяющейся во времени энергии микрочастиц в квантовой механике существует соотношение неопределенностей для E и t :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Оно выводится следующим образом. Из соотношения $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$ получим:

$$\Delta p_x \Delta x = \Delta(m v_x) \Delta x = \Delta m v_x \Delta x = \frac{\Delta E}{c^2} v_x \Delta x = \Delta E \frac{v_x}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c}.$$

При $v_x \cong c$ далее видим, что

$$\Delta E \frac{v_x}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c} = \Delta E \frac{\Delta x}{c} = \Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Следовательно, квантовая система, имеющая среднее время жизни Δt , не может быть охарактеризована определенным значением энергии: раз-

брос значений энергии $\Delta E = \hbar / \Delta t$ возрастает с уменьшением среднего времени жизни системы.

Частота излучённого фотона также должна иметь неопределенность

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar},$$

т.е. линии спектра должны характеризоваться частотой

$$\omega \pm \Delta\omega = \omega \pm \frac{\Delta E}{\hbar}.$$

Опыт показывает, что все спектральные линии размыты; измеряя ширину спектральной линии можно оценить порядок времени существования атома в возбужденном состоянии.

§ 79. Квантово-механическая модель атома водорода

Для атома водорода, или водородоподобного атома решение задачи определения энергетических уровней электрона сводится к решению задачи о движении электрона в кулоновском поле ядра. Так как электрическое поле ядра является центрально-симметричным, то уравнение и решение представляют в сферической системе координат r, ϑ, φ (аналоги – географические радиус Земли, широта и долгота).

Потенциальная энергия взаимодействия электрона и ядра, обладающего зарядом Ze (для атома водорода $Z = 1$)

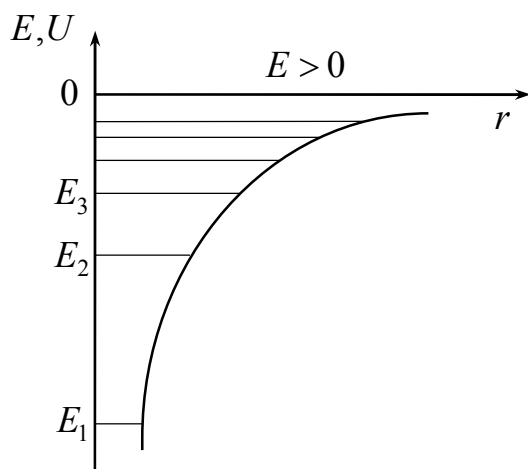


Рис. 136. График потенциальной энергии взаимодействия электрона и ядра

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние между электроном и ядром (рис. 136).

Стационарное уравнение Шредингера для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

где E – полная энергия электрона в атоме.

Уравнение имеет однозначные, конечные и непрерывные решения в двух случаях: 1. При любых $E > 0$; 2. При значениях

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(сравнить с аналогичной формулой §73)

Первый случай соответствует свободному движению электрона, – он не захватывается полем ядра и может удалиться от него на бесконечное расстояние. Во втором случае электрон является связанным, и его энергия образует набор отрицательных дискретных значений.

Собственные функции уравнения Шредингера содержат три квантовых числа: главное n , орбитальное l и магнитное m . При заданном числе n число l принимает значения:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Соответственно число m принимает значения

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l - 1, l,$$

суммарное число которых равно $(2l + 1)$. Набор чисел n, l, m соответствует какому-либо состоянию атома.

Таким образом, каждому E_n (кроме E_1) соответствует несколько волновых функций ψ_{nlm} , отличающихся значениями чисел l и m . Это означает, что атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких различных состояниях. Каждому состоянию соответствует различное пространственное распределение электронного облака около ядра. Состояния с одинаковой энергией, называются вырожденными, а число различных состояний с одинаковым значением энергии называется кратностью вырождения. Кратность вырождения уровней атома водорода равна n^2 , что можно проиллюстрировать с помощью табл. 1. Значение главного квантового числа n определяет энергию состояния; орбитальное (азимутальное) квантовое число l определяет величину момента импульса электрона в атоме, а магнитное квантовое число m – величину проекции этого момента на заданное направление в пространстве, например на направление вектора $\vec{H}$ внешнего магнитного поля.

Таблица 1

E_n	n	l	m	ψ_{nlm}
E_1	1	0	0	ψ_{100}
E_2	2	0	0	ψ_{200}
	2	1	-1	ψ_{21-1}
	2	1	0	ψ_{210}
	2	1	+1	ψ_{21+1}

Как видно, кратность выражения для уровня энергии E_2 равна четырём. Вероятность обнаружения электрона в различных частях атома различна. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя электронное облако, густота которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных частях атома. Квантовые числа n и l

характеризуют вероятность нахождения электрона в различных частях атома и, таким образом, характеризуют размер и форму электронного облака. Квантовое число m характеризует ориентацию электронного облака в пространстве.

Из решения уравнения Шредингера вытекает, что орбитальный момент импульса электрона квантуется, т.е. принимает дискретные значения, определяемые формулой

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

При $l = 0$, $L = m_e v r = 0$, т.е. представление о вращении электрона по круговой траектории допустимо лишь в рамках постулатов Бора.

Этот же вектор может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция L_z на направление Oz внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные $\hbar$:

$$L_z = m\hbar.$$

В атомной физике приняты обозначения, заимствованные из спектроскопии, а именно: состояние электрона, характеризующееся квантовыми числами $l = 0$ называется s-состоянием, $l = 1$ – p-состоянием, $l = 2$ – d-состоянием; $l = 3$ – f-состоянием и т.д. Например, электрон в состоянии с числами $n = 3$ и $l = 1$ обозначается 3p. Излучение и поглощение света происходит при переходах электрона с одного уровня на другой. В квантовой механике доказывается правило отбора, согласно которому возможны только такие переходы, при которых орбитальное квантовое число l изменяется на единицу:

$$\Delta l = \pm 1,$$

а магнитное квантовое число удовлетворяет условию

$$\Delta m = 0, \pm 1.$$

Существование правила отбора есть следствие закона сохранения момента импульса. Используем это правило для объяснения закономерностей в спектре атома водорода (рис. 137).

Пользуясь условными обозначениями состояний электрона, можно обозначить переходы, приводящие к возникновению серии Лаймана, следующим образом:

$$np \rightarrow 1s.$$

Для серии Бальмера:

$$np \rightarrow 2s, ns \rightarrow 2p \text{ и } nd \rightarrow 2p.$$

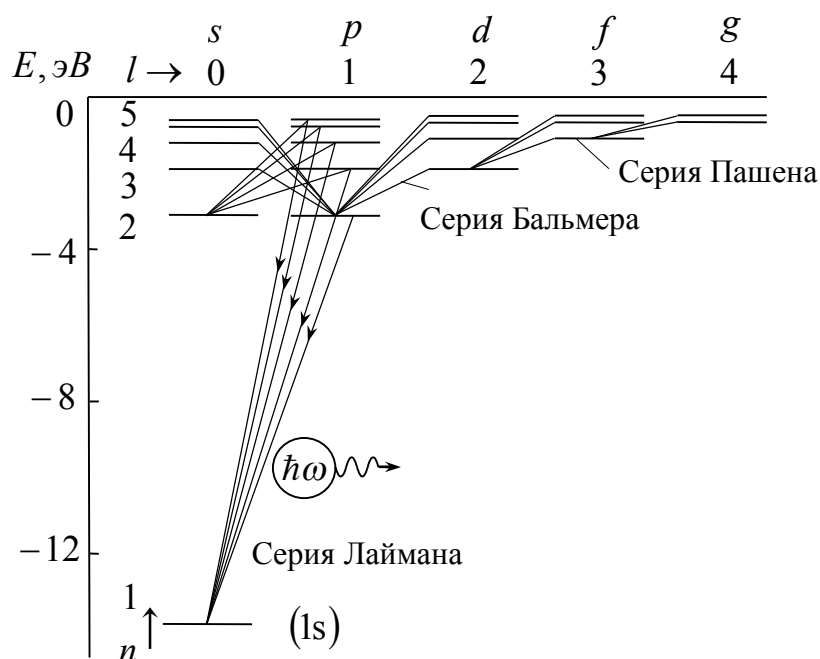


Рис. 137. Спектральные линии и серии атома водорода

Что касается спектров поглощения, то их происхождение объясняется следующим образом: в состоянии $1s$ атом обладает минимальной энергией и это состояние называется основным. Переход электрона из основного состояния в возбужденное связан с увеличением энергии атома и может происходить только при сообщении атому энергии извне, например, за счет поглощения атомом фотона, при этом атом может поглощать только те фотоны, энергия которых в точности соответствует разности энергий двух его уровней. Так как поглощающий атом находится обычно в основном состоянии, то спектр атома водорода должен состоять из линий, соответствующих переходам $1s \rightarrow np$ ($n = 2, 3, \dots$), что находится в полном согласии с экспериментом.

§ 80. Основное состояние электрона в атоме водорода

Основное состояние электрона – $1s$ -состояние – является сферически симметричным, т.е. не зависит от углов ϑ и φ . Это обстоятельство можно выразить следующим образом:

$$\psi = \psi_{nlm}(r) = \psi_{100}(r),$$

где r – расстояние от электрона до ядра, 100 означает: $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$.

Уравнению Шредингера для $1s$ -состояния удовлетворяет функция вида

$$\psi = Ce^{-r/r_B},$$

где $r_B = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (me^2)$ – первый боровский радиус для атома водорода, C – постоянная интегрирования, которая определяется из условия нормировки.

Вследствие сферической симметрии ψ – функции вероятность обнаружения электрона на заданном расстоянии r одинакова по всем направлениям. Поэтому элемент объема dV , входящий в условие нормировки, должен быть выбран таким образом, чтобы интегрирование было наименее трудоемким. Очевидно, что для центрально-симметричной задачи этот объем представляет собой шаровой слой радиусом r и толщиной dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

В этом случае условие нормировки примет вид

$$1 = \int_0^\infty |\psi|^2 dV = \int_0^\infty C^2 e^{-2r/r_B} 4\pi r^2 dr = C^2 \pi r_B^3.$$

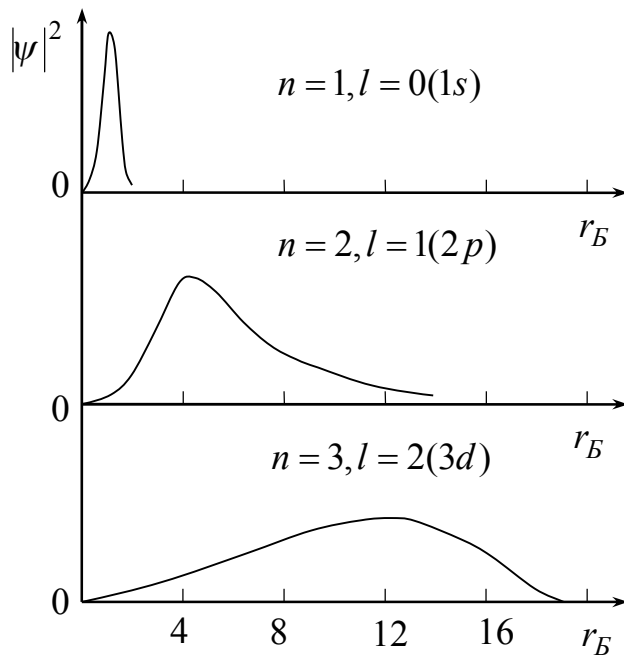


Рис. 138. Плотности вероятности нахождения электрона в атоме водорода

Вычислив отсюда C , определим нормированную функцию для 1s-состояния:

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B}.$$

Вероятность обнаружения электрона в объеме dV

$$dP = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 4\pi r^2 dr.$$

Подставив в эту формулу волновую функцию, получим

$$dP = \frac{1}{\pi r_B^3} e^{-2r/r_B} \cdot 4\pi r^2 dr.$$

На рис. 138 представлены графики плотности вероятности обнаружения электрона в атоме водорода для трех состояний. Здесь за единицу измерения расстояния принят первый боровский радиус. Видно, что движение

электрона в атоме носит вероятностный характер, несовместимый с понятием о траекториях. В основном состоянии (1s) атома водорода максимальное значение плотности вероятности соответствует первому боровскому радиусу. В этом заключается квантово-механический смысл боровского радиуса.

§ 81. Спин электрона и спиновое квантовое число

В 1922 году немецкие физики Штерн и Герлах при определении магнитных моментов атомов обнаружили расщепление на два пучка в неоднородном магнитном поле узкого пучка атомов серебра. Дальнейшие исследования показали, что расщепление пучка имеет место даже для атомов водорода, находящихся в s -состоянии, когда орбитальный момент импульса электрона равен нулю:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} = 0.$$

Магнитный момент атома, связанный с орбитальным движением электрона, пропорционален механическому моменту:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = 0,$$

и поэтому также равен нулю. Таким образом, уже известными магнитными свойствами, связанными с орбитальным движением электрона, атомы в s -состоянии не обладают, однако на магнитное поле реагируют. Следовательно, есть какие-то другие магнитные свойства, не связанные с орбитальным движением электрона.

Для объяснения указанного явления американские физики Уленбек и Гоудсмит в 1925 году выдвинули гипотезу о том, что электрон обладает собственным механическим моментом импульса, не связанным с движением электрона в пространстве. Эта величина получила название спин (от англ. spin – веретено). Спин электрона и других микрочастиц – квантовая величина, она не имеет классического аналога и является таким же свойством электрона, как его заряд и масса. В дальнейшем, как показал английский физик Дирак, наличие у микрочастиц спина вытекает из релятивистского уравнения Шредингера, составленного с учетом положений теории относительности. Таким образом, спин электрона является свойством одновременно и квантовым, и релятивистским. Спин квантуется по закону

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

где s – спиновое квантовое число

В связи с тем, что электрон обладает спином L_s , то он должен обладать собственным (спиновым) магнитным моментом $\vec{p}_{ms}$, наличием которого и объясняется явление Штерна–Герлаха. Таким образом, атомы серебра с одним направлением $\vec{p}_{ms}$ отклонялись магнитным полем в одну сторону, с противоположным направлением $\vec{p}_{ms}$ – в другую сторону. По аналогии с орбитальным моментом импульса проекция L_{sz} спина квантуется так, что вектор $\vec{L}_z$ может принимать $2s + 1$ ориентаций. Однако в опытах Штерна и Герлаха наблюдалось только две ориентации, поэтому

$$2s + 1 = 2,$$

Откуда для электрона $s = 1/2$. Проекция спина на направление внешнего магнитного поля, являясь квантовой величиной, определяется выражением

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где m_s – магнитное спиновое квантовое число. Оно имеет только два значения:

$$m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Из вышеизложенного следует, что для полного описания состояния электрона в атоме необходимо наряду с главным, орбитальным (азимутальным) и магнитным квантовыми числами задавать еще магнитное спиновое квантовое число, которое для краткости называется просто «спиновое число». Для спина и спинового магнитного момента гиромагнитное отношение в два раза больше (ферромагнетизм), чем для орбитального движения, поэтому (см. § 23 гл. VII)

$$\vec{p}_{ms} = \frac{e}{m_e} \vec{L}_s.$$

§ 82. Распределение электронов в атоме по энергетическим уровням. Таблица Д.И. Менделеева

Таким образом, состояние каждого электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами: главным n ($n = 1, 2, 3, \dots$), орбитальным l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$), магнитным m ($m = -l, \dots, -1, 0, +1, \dots, +l$), спиновым m_s ($m_s = +1/2, -1/2$). Энергия состояния зависит в основном от чисел n и l . Кроме того, имеется слабая зависимость энергии от чисел m и m_s , поскольку их значения связаны с взаимной ориентацией моментов импульса $\vec{L}$ и $\vec{S}$. За некоторыми исключениями, энергия состояния сильнее возрастает с увеличением числа n , нежели с увеличением l . Поэтому, как правило, состояние с большим числом n обладает, независимо от значения числа l , большей энергией.

В нормальном (невозбужденном) состоянии атома электроны должны располагаться на самых низких доступных для них энергетических уровнях. Поэтому, казалось бы, в любом атоме в нормальном состоянии все электроны должны находиться в состоянии $1s$ ($n = 1, l = 0$). Однако результаты опытов показывают, что это не так.

Согласно одному из законов квантовой механики, называемому принципом Паули (немецкий физик), в одном и том же атоме (или другой квантовой системе) не может быть двух и более электронов с одинаковым набором четырех квантовых чисел. Иными словами, в одном и том же состоянии не могут находиться одновременно два электрона. Так как при данном числе n число l может изменяться от 0 до $n - 1$, а каждому значе-

нию числа l соответствует $2l + 1$ различных значений числа m , то число различных состояний, соответствующих данному n , равно

$$\sum_{l=0}^{l=n-1} (2l + 1) = n^2.$$

С учетом спинового числа m_s число различных состояний удваивается, так как число m_s может принимать два значения $\pm 1/2$. Поэтому в состояниях, определяемых главным числом n , могут находиться в атоме не более $2n^2$ электронов: $n = 1$ –2 электрона; $n = 2$ –8 электронов; $n = 3$ –18 электронов; $n = 4$ –32 электрона.

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одинаковое значение числа n называется электронной оболочкой. В каждой из оболочек электроны подразделяются по подоболочкам, соответствующим значению числа l . Поскольку число l принимает значения от 0 до $n - 1$, число подоболочек равно порядковому номеру n оболочки. Количество электронов в подоболочке определяется магнитным m и магнитным спиновым m_s квантовыми числами: максимальное число электронов в подоболочке с данным l равно $2(2l + 1)$. В соответствии со значением числа n оболочкам даны обозначения, заимствованные из спектроскопии (табл. 2):

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7
оболочка	K	L	M	N	O	P	Q

Распределение возможных состояний электрона в атоме на оболочки и подоболочки представлено в табл. 3, в которой обозначение $m_s = \pm 1/2$ заменено символами $\uparrow\downarrow$.

Принцип Паули позволяет объяснить периодическую систему элементов Д.И. Менделеева – фундаментального закона природы, являющегося основой современной химии, атомной и ядерной физики. Д.И. Менделеев ввел понятие порядкового числа Z химического элемента, равного числу протонов в ядре и соответственно общему числу электронов в электронной оболочке атома. Расположив химические элементы по мере возрастания порядкового числа, он установил периодичность в изменении химических свойств элементов, а также предсказал существование новых, еще не открытых элементов и их основные свойства. Заполнение электронами энергетических состояний атома, находящегося в невозбужденном состоянии, происходит следующим образом.

Таблица 3

Оболочка	n	l	m	m_s	Подоболочка
K	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$K(1s)$
L	2	0	0	$\uparrow\downarrow$	$L_1(2s)$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$L_2(2p)$
			0	$\uparrow\downarrow$	
			+1	$\uparrow\downarrow$	
M	3	0	0	$\uparrow\downarrow$	$M_1(3s)$
		1	-1	$\uparrow\downarrow$	$M_2(3p)$
			0	$\uparrow\downarrow$	
			+1	$\uparrow\downarrow$	
		2	-2	$\uparrow\downarrow$	$M_3(3d)$
			-1	$\uparrow\downarrow$	
			0	$\uparrow\downarrow$	
			+1	$\uparrow\downarrow$	
			+2	$\uparrow\downarrow$	

В атоме водорода единственный электрон находится в состоянии $1s$, характеризуемом спиновыми числами $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$, $m_s = \pm 1/2$ (рис. 139).

Оба электрона атома He находятся в состоянии $1s$, но с антипараллельной ориентацией спина, поэтому электронная конфигурация для атома He записывается как $1s^2$. На атоме He заканчивается заполнение К-оболочки, что соответствует завершению I периода периодической системы элементов Менделеева.

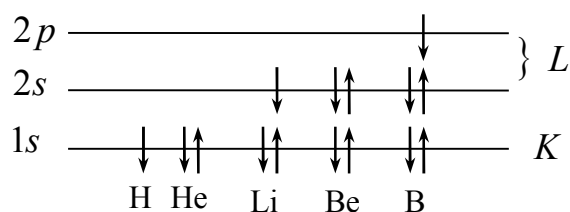


Рис. 139. Заполнение электронами энергетических состояний атомов

В атоме Li третий электрон, согласно принципу Паули, не может находиться в заполненной К-оболочке и занимает наинизшее энергетическое состояние, для которого $n = 2$ (L-оболочка), т.е. состояние $2s$. Электронная конфигурация для атома Li: $1s^2 2s$. Для атома Na, например, электронная конфигурация выглядит следующим обра-

зом: $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. В то же время имеют место отклонения указанной периодичности в заполнении электронных состояний. Например, энергия $3d$ -состояния некоторых элементов оказывается большей, чем энергия $4s$ -

состояния. Такими элементами являются переходные металлы Fe, Co, Ni, обладающие уникальными ферромагнитными свойствами.

§ 83. Квантово-механическая модель молекулы

Молекула – это наименьшая частица вещества, состоящая из одинаковых или различных атомов, связанных между собой химическими связями и являющаяся носителем его (вещества) основных химических и физических свойств. Силы, удерживающие атомы в молекуле, вызваны взаимодействием внешних электронов; электроны же внутренних оболочек при объединении атомов в молекулу остаются в прежних состояниях.

Различают два вида связи. Один из них осуществляется в тех молекулах, в которых часть электронов движется около обоих ядер. Такая связь называется гомеополярной (от греч. homos – одинаковый, polos – полюс) или ковалентной (атомной). Она образуется парами электронов с антипараллельно направленными спинами (H_2 , N_2).

Второй вид связи имеет место, когда электроны в молекуле можно разделить на две группы, каждая из которых все время находится около одного из ядер. Такая связь называется гетерополярной (от греч. heteros – другой). Электроны распределяются так, что около одного из ядер образуется

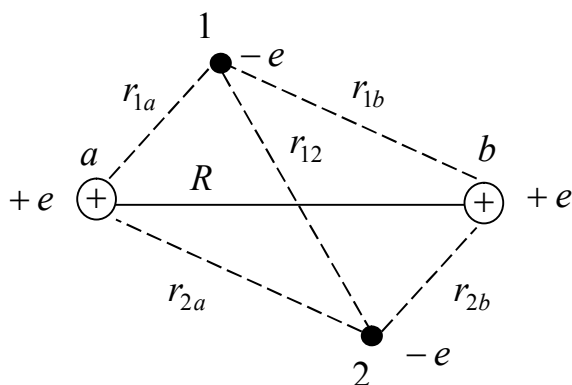


Рис. 140. Схема гомеополярной связи в молекуле водорода, a , b – ядра; 1 , 2 – электроны

избыток электронов, а около другого – их недостаток. В результате возникает электростатическое притяжение ионов противоположных знаков ($NaCl$, HCl).

В 1927 году немецкие физики Гайтлер и Лондон осуществили квантово-механический расчет основного состояния молекулы H_2 . Ими было решено уравнение Шредингера для системы, состоящей из двух протонов (ядер атома водорода) и двух электронов (рис. 140).

Потенциальная энергия такой

системы:

$$U = -\frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{2a}} - \frac{e^2}{r_{1b}} - \frac{e^2}{r_{2b}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R}.$$

Волновая функция зависит от координат обоих электронов. Следовательно, уравнение Шредингера имеет вид

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - e^2 \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_{1,2,a,b}} \right) \right] \psi = 0.$$

Здесь Δ_1 – оператор Лапласа, содержащий координаты одного электрона а Δ_2 – оператор Лапласа, содержащий координаты другого электрона.

Спиновое число m_s каждого из электронов может иметь два значения: $\pm 1/2$. Если знаки m_s обоих электронов различны, спины ориентированы в противоположные стороны; при совпадении знаков m_s спины параллельны. Получающиеся из уравнения собственные значения энергии оказываются зависящими от расстояния R , причем характер этой зависимости существенно различен для параллельной и антипараллельной ориентации спинов (рис. 141). Образование молекулы происходит при сближении атомов, имеющих антипараллельные спины. Асимптотическое значение E_0 , к которому стремится энергия молекулы при $R \rightarrow \infty$, для обеих кривых одинаково и равно сумме энергий изолированных атомов. Величина E_D есть энергия связи молекулы; она численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы разделить молекулу на изолированные атомы, т.е. вызвать диссоциацию молекулы.

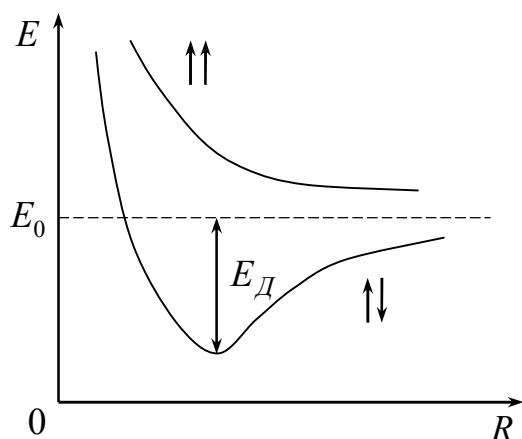


Рис. 141. Зависимость полной энергии молекулы от расстояний между атомами

Полная энергия молекулы складывается из: 1) E_e – энергия, обусловленная электронной конфигурацией (электронная энергия); 2) E_v – энергия, соответствующая колебаниям молекулы (колебательная, или вибрационная энергия); 3) E_r – энергия вращения молекулы (вращательная, или ротационная энергия). Считая эти виды энергии независимыми друг от друга, можно записать

$$E \approx E_e + E_v + E_r.$$

Квантово-механические расчеты и опытные результаты показывают, что энергии E_e, E_v, E_r могут принимать лишь дискретные значения. Формула для расчета E_e была приведена ранее при рассмотрении квантово-механической модели атома водорода, а для вибрационной энергии

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_v, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Число v называется вибрационным квантовым числом, для которого существует правило отбора: $\Delta v = \pm 1$. По этой причине вибрационная энергия может изменяться только порциями $\hbar \omega_v$, причем наименьшее значение равно не нулю, а величине $\hbar \omega_v / 2$. Это значение называется нулевой энергией, так как молекула обладает вибрационной энергией даже при 0К, и этот факт подтверждается опытом.

Вращательная энергия молекулы также может иметь только квантованные значения:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1), \quad I = 0, 1, 2, \dots$$

Число I называется ротационным квантовым числом; J – момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через ее центр инерции. Расчеты показывают, что $E_e \gg E_v \gg E_r$, причем $E_e \approx 1 \dots 10$ эВ, $E_v \approx 10^{-2} \dots 10^{-1}$ эВ, $E_r \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$ эВ.

Таким образом, полная энергия молекулы равна

$$E = E_e + \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_v + \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1) .$$

Энергетические расстояния ΔE_r между соседними вращательными уровнями значительно меньше энергетических расстояний ΔE_v колебательных уровней, которые, в свою очередь, значительно меньше аналогичных расстояний ΔE_e между электронными уровнями (рис. 142).

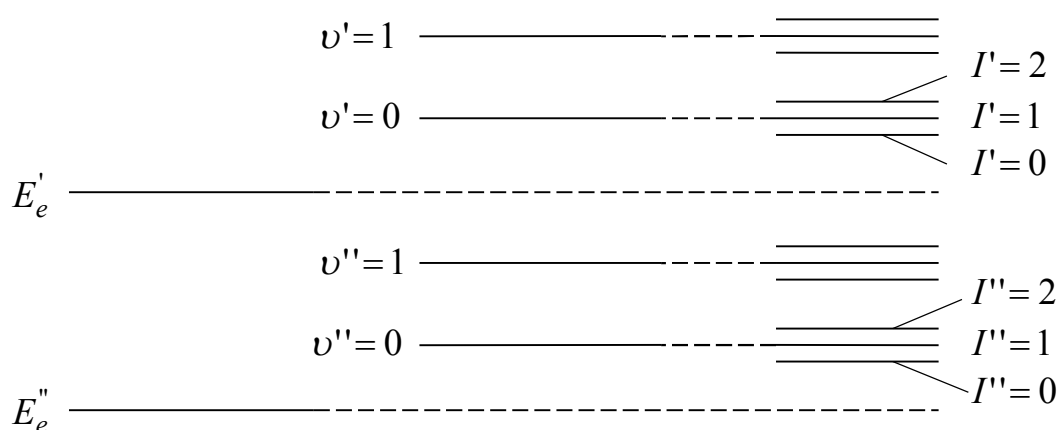


Рис. 142. Схема расщепления энергетических уровней молекулы

§ 84. Спонтанное и вынужденное излучения энергии атомами

Кроме спонтанных (самопроизвольных) переходов атомов с одного энергетического уровня на другой наблюдаются также индуцированные (вынужденные) переходы, обусловленные действием на атом падающего на него излучения. Спонтанные переходы могут осуществляться только в одном направлении – с более высоких энергетических уровней на менее высокие. Вынужденные переходы могут с равной вероятностью происходить как в одном, так и в другом направлении. При переходе на более высокий уровень атом поглощает падающее на него излучение, при переходе на менее высокий энергетический уровень происходит излучение атомом

фотона, дополнительно к тому фотону, под действием которого произошел переход (рис. 143).

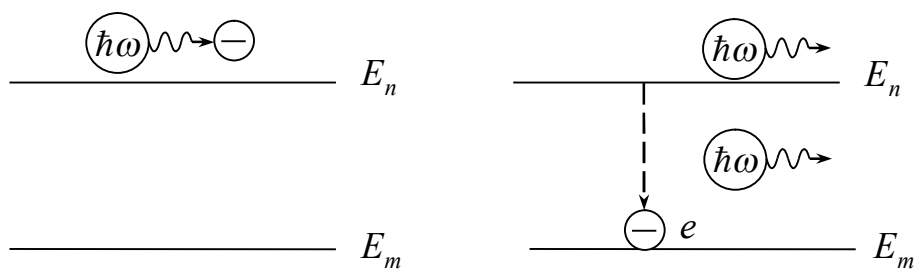


Рис. 143. Схема возникновения вынужденного излучения

Это дополнительное излучение и называется вынужденным. Как видно из рис. 143 происходит своего рода усиление излучения – вместо одного фотона после взаимодействия излучение состоит из двух фотонов. Вынужденное излучение обладает весьма важными свойствами. Направление его распространения в точности совпадает с направлением распространения внешнего излучения, вызвавшего переход. Это же относится к частоте, фазе и поляризации вынужденного и внешнего излучений. Таким образом, вынужденное и внешнее излучения оказываются когерентными. Это обстоятельство использовал Эйнштейн для объяснения наблюдавшегося на опыте термодинамического равновесия между веществом и излучаемым и поглощаемым им излучением.

В статистической физике известен принцип детального равновесия, согласно которому при термодинамическом равновесии каждому процессу можно сопоставить обратный процесс, причем скорость их протекания одинакова. Эйнштейн применил этот принцип и закон сохранения энергии для рассмотрения процессов излучения и поглощения электромагнитных волн в случае абсолютно черного тела. Из условия, что при равновесии полная вероятность излучения (спонтанного и вынужденного) фотонов равна вероятности поглощения фотонов той же частоты, Эйнштейн вывел формулу Планка.

Излученные фотоны, двигаясь в одном направлении и встречая другие возбужденные атомы, стимулируют дальнейшие индуцированные переходы, и число фотонов растет лавинообразно. Однако наряду с вынужденным излучением возможен и противоположный процесс – поглощение фотонов. Поэтому для усиления падающего излучения необходимо, чтобы число вынужденных переходов, сопровождающихся излучением фотонов, превышало число вынужденных переходов, сопровождающихся поглощением фотонов. Первые переходы пропорциональны количеству атомов, находящихся в возбужденном состоянии, или населенности этих состояний; вторые переходы пропорциональны населенности основных состояний. В си-

стеме атомов, находящихся в термодинамическом равновесии, поглощение падающего излучения будет преобладать над вынужденным. Это означает, что падающее излучение при прохождении через вещество будет ослабляться.

Для усиления падающего излучения необходимо сообщить извне энергию системе атомов т.е. перевести систему в неравновесное состояние, в котором населенность возбужденных состояний превышает населенность основных состояний. Этот перевод называется инверсией (от лат. inversion – переворачивание) уровней, а процесс перевода системы атомов в состояние с инверсной населенностью называется накачкой. Накачку можно осуществлять путем передачи системе атомов оптической, электромагнитной и другой энергии.

В средах, находящихся в инверсном состоянии, интенсивность вынужденного излучения может превышать интенсивность поглощения, вследствие чего световой пучок при прохождении сквозь эти среды будет усиливаться. Такие среды называются оптически активными, и их называют средами с отрицательным коэффициентом поглощения.

Впервые на возможность получения сред, в которых свет может усиливаться за счет вынужденного излучения, указал в 1940 году российский физик В. А. Фабрикант, экспериментально обнаружив вынужденное излучение паров ртути, возбужденных при электрическом разряде. Открытие явления усиления электромагнитных волн и изобретенный способ его осуществления легли в основу квантовой электроники, создавшей квантовые усилители и квантовые генераторы света.

§ 85. Оптические квантовые генераторы

Использование вынужденного излучения для усиления электромагнитных волн в микроволновом диапазоне было предложено в 1953 году российскими физиками Н.Г. Басовым и А.М. Прохоровым. В 1960 году был создан прибор, излучающий электромагнитные волны или импульсы в оптическом (видимом) диапазоне. Это лазер (от первых букв английского названия Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation), или оптический квантовый генератор.

Важнейшими из существующих типов лазеров являются твердотельные, газовые, полупроводниковые и жидкостные (в основу классификации положен тип активной среды). Другие классификации учитывают методы накачки – оптические, тепловые, химические, электроионизационные и др. Учитывается так же режим генерации излучения – непрерывный или импульсный.

Основными составляющими лазера являются: 1) активная среда, в которой создается инверсия населенностей уровней; 2) система накачки (устройство для создания инверсии населенностей); 3) оптический резона-

тор (устройство, выделяющее в пространстве избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок).

Первым твердотельным лазером, излучающим электромагнитные импульсы в видимой области спектра (длина волны излучения 0,6943 мкм), был так называемый рубиновый лазер. В нем инверсная населенность уровней осуществляется по трехуровневой схеме, предложенной Н.Г. Басовым и А.М. Прохоровым (нобелевская премия, 1964). Кристалл рубина представляет собой оксид алюминия Al_2O_3 в кристаллической решетке которого часть атомов Al замещена ионами хрома Cr^{3+} (0,03% и 0,05% ионов хрома для розового и красного рубина соответственно). Для оптической накачки используется импульсная газоразрядная лампа в виде спирали, заполненной газом ксеноном. Внутри лампы расположен кристалл рубина в виде сплошного цилиндра, диаметром 10 мм и длиной 50 мм, торцы которого отполированы и представляют собой параллельные друг другу зеркала. При интенсивном облучении кристалла светом мощной импульсной лампы ионы Cr^{3+} переходят с нижнего уровня 1 на уровни 3 широкой энергетической полосы (рис. 144).

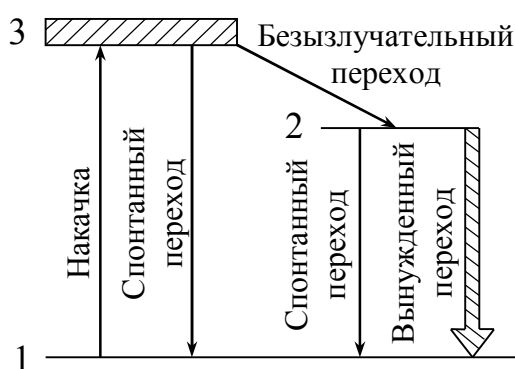


Рис. 144. Схема энергетических уровней и переходов в рубиновом лазере

Так как время жизни ионов Cr^{3+} в возбужденных состояниях мало (менее 10^{-7} с), то далее происходят либо спонтанные переходы $3 \rightarrow 1$ (их число незначительно), либо наиболее вероятные безызлучательные переходы на уровень 2 (он называется метастабильным) с передачей избытка энергии решетке кристалла рубина. Спонтанный переход $2 \rightarrow 1$ запрещен правилами отбора, поэтому длительность возбужденного состояния 2 атомов хрома составляет $\sim 10^{-3}$ с, что в десять тысяч раз дольше, чем для состояния 3.

Это приводит к накоплению ионов хрома на уровне 2. При достаточной мощности накачки их число на уровне 2 будет гораздо больше, чем на уровне 1, т.е. возникает среда с инверсной населенностью уровня 2.

Каждый фотон, случайно «родившийся» при спонтанных переходах, может инициировать (создавать) в активной среде множество вынужденных переходов $2 \rightarrow 1$, в результате чего появляется целая лавина вторичных фотонов, когерентных с первичными. В результате чего и возникает лазерная генерация. В то же время спонтанные переходы носят случайный характер и спонтанно рождающиеся фотоны излучаются в различных направлениях, поэтому они не могут обладать высокими когерентными свойствами.

Для пространственного оформления фотонной лавины используется оптический резонатор. В простейшем случае им является пара обращенных друг к другу параллельных или вогнутых зеркал с общей оптической осью, между которыми помещается активная среда (кристалл или сосуд с газом). Одно зеркало покрыто непрозрачным слоем серебра, другое прозрачно на 8...10%. Фотоны, движущиеся под углами к оси резонатора, выходят из активной среды через ее боковую поверхность. Те же из фотонов, которые движутся вдоль оси, многократно отразятся от противоположных торцов, каждый раз вызывая вынужденное излучение вторичных фотонов. Последнее в свою очередь вызовут вынужденные излучения других фотонов и так далее. Так как фотоны, возникшие при вынужденном излучении, движутся в том же направлении, что и первичные, то поток фотонов, параллельный оси резонатора, будет лавинообразно нарастать. Многократно усиленный поток фотонов выходит через полупрозрачное зеркало, создавая строго направленный световой пучок огромной яркости. Таким образом, оптический резонатор выделяет направление (вдоль оси резонатора) усиливаемого фотонного потока, формируя тем самым лазерное излучение с высокими когерентными свойствами.

Первым газовым лазером непрерывного действия (1961 г.) был лазер, активной средой которого является смесь атомов неона и гелия. Газы обладают узкими линиями поглощения, лампы же накачки излучают свет в широком интервале длин волн, следовательно, использовать их в качестве накачки невыгодно, так как используется только часть мощности лампы. Поэтому в газовых лазерах инверсная населенность осуществляется электрическим разрядом.

В гелий-неоновом лазере накачка происходит в два этапа: энергию электрического разряда воспринимают атомы гелия, а лазерное излучение создают атомы неона. Электроны, образующиеся при электрическом разряде, сталкиваясь с атомами гелия, переводят их на более высокие энергетические уровни 3 (рис. 145).

При столкновениях возбужденных атомов гелия с атомами неона происходит их возбуждение, и они переходят на один из более высоких энергетических уровней, сравнимых с уровнем возбужденного гелия. Переход атомов неона с верхнего уровня 3 на один из нижних уровней 2 приводит к лазерному излучению

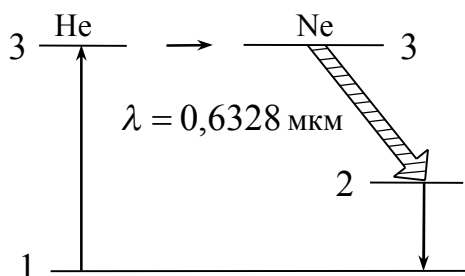


Рис. 145. Энергетические уровни гелий-неонового лазера

длиной волны $\lambda = 0,6328$ мкм.

Лазерное излучение обладает следующими свойствами:

1. Высокие временная и простран-

ственная когерентности. Время когерентности составляет 10^{-3} с, что соответствует длине когерентности порядка 10^5 м ($l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$), т.е. в десять миллионов раз выше, чем для обычных источников света.

2. Высокая монохроматичность ($\Delta\lambda < 10^{-11}$ м).

3. Большая мощность излучения. Если при накачке рубиновый лазер получил энергию $E = 20$ Дж и высветил импульс длительностью 10^{-3} с, то поток излучения $\Phi_e = 2 \cdot 10^4$ Вт. Фокусируя это излучение на площади 1 мм^2 , получим поверхностную плотность мощности излучения величиной $2 \cdot 10^{11} \text{ Вт/м}^2$, что используется при резке металлов, их сварке и т.д.

4. Очень малое угловое расхождение в пучке. Например, при использовании специальной фокусировки луч лазера дает на поверхности Луны световое пятно диаметром примерно 3 км (луч прожектора осветил бы поверхность диаметром примерно 40000 км).

К.п.д. лазеров колеблется в широких пределах – 0,01% (для гелий-неонового лазера) до 75% (для лазера с кристаллом из алюмо-иттриевого граната).

Уникальные свойства лазерного излучения нашли самое широкое применение в науке, промышленности, медицине, в создании новых видов вооружения и т.д.

Тема 25. Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

§ 86. Понятие о квантовой статистике. Функция распределения

Под термином статистика в физике понимается система формул и логических заключений, которые позволяют определить среднее число частиц в определенном энергетическом или ином состоянии. В отличие от исходных положений классической статистической физики (распределение Максвелла для молекул газа по скоростям или энергиям), в которой тожде-

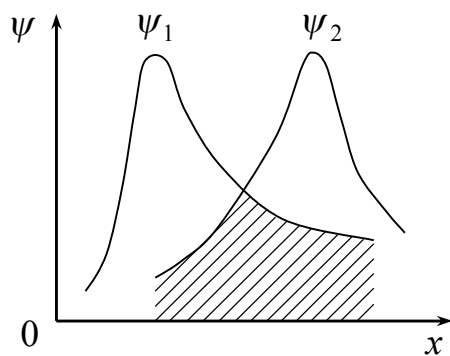


Рис. 146. Волновые
функции двух микрочастиц

ственные частицы (например, молекулы одного и того же газа) различимы, квантовая статистика основывается на принципе неразличимости тождественных частиц. Две тождественные частицы – это, например, два электрона, два протона и т.д. Этот принцип вытекает из соотношения неопределенностей Гейзенберга, согласно которому для микрочастиц неприменимо понятие траектории. Если волновые функции двух тождественных частиц в какой-

либо области пространства перекрываются (рис. 146), то указать, какая именно частица находится в данной области невозможно: можно лишь определить вероятность нахождения в данной области одной из тождественных частиц.

В соответствии с физическим смыслом величины $|\psi|^2$ принцип неразличимости тождественных частиц можно записать в виде

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2,$$

где x_1, x_2 – соответственно совокупность координат первой и второй частиц. При определении волновой функции возможны два случая:

$$\psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1).$$

Таким образом, принцип неразличимости тождественных частиц ведет к такому свойству волновой функции, как ее симметрия. Если при перемещении местами частиц волновая функция любой из них не меняет знака, то она называется симметричной, если меняет – антисимметричной. Информация о симметричности или антисимметричности волновой функции позволяет определить, какой из двух квантовых статистик описывается состояние системы микрочастиц. Изменение знака волновой функции не означает изменения состояния, так как физический смысл имеет лишь квадрат модуля волновой функции. В квантовой механике доказано, что характер симметрии волновой функции не меняется со временем, поэтому свойство симметрии и антисимметрии волновых функций является признаком данного типа микрочастиц.

Опыт показывает, что симметрия или антисимметрия волновых функций определяется спином частиц, и эта зависимость теоретически была подтверждена Паули. В частности, частицы с полуцелым спином ($s = 1/2$) описываются антисимметричными волновыми функциями. Это – электроны, протоны, нейтроны. Есть частицы с нулевым или целочисленным спином ($s = 0, 1$), которые описываются симметричными волновыми функциями. Сюда относятся фотоны и некоторые ядерные частицы. Такие тождественные частицы имеют одинаковые квантовые числа.

Основной задачей статистики является определение средних значений величин, характеризующих рассматриваемую систему микрочастиц. Вероятность dP данного состояния системы представляется с помощью так называемой функции распределения, явное выражение которой в самом общем виде получил американский физик Гиббс. Оно называется каноническим распределением и для неизменного числа частиц в квантовой статистике имеет вид

$$f(E_n) = A e^{\frac{-E_n}{kT}},$$

где A – постоянная, определяемая из условия нормировки на единицу, n – совокупность всех квантовых чисел, характеризующих данное состояние, E_n – энергия системы микрочастиц в состоянии, характеризуемом n квантовыми числами. k – постоянная Больцмана, T – температура системы.

В данном случае

$$dP = f(E_n),$$

т.е. $f(E_n)$ есть именно вероятность данного состояния с энергией E_n , а не вероятность того, что система микрочастиц имеет определенное значение энергии E_n , так как данному значению энергии может соответствовать не одно, а несколько различных состояний с различным набором четырех квантовых чисел, что называется вырождением.

Одним из важнейших объектов изучения и классической, и квантовой статистики является идеальный газ, содержащий переменное число частиц. Это связано с тем, что во многих случаях реальную систему микрочастиц можно в хорошем приближении считать идеальным газом. Состояние системы невзаимодействующих частиц задается с помощью так называемых чисел заполнения N_i – чисел, указывающих заполнение квантового состояния, характеризуемого данным набором i квантовых чисел, частицами системы, состоящей из многих тождественных частиц. Другими словами, это число частиц системы, находящихся в данном квантовом состоянии.

Для систем частиц, образованных бозонами – частицами с нулевым или целым спином, числа заполнения могут принимать любые целые значения: $0, 1, 2, \dots$. Квантовая статистика позволяет подсчитать среднее число частиц в данном квантовом состоянии, т.е. определить средние числа заполнения $\langle N_i \rangle$.

Идеальный газ из бозонов – бозе-газ – описывается симметричными волновыми функциями и подчиняются квантовой статистике Бозе–Эйнштейна (Бозе – индийский физик). Распределение бозонов по состояниям с данной энергией вытекает из так называемого большого канонического распределения Гиббса (с переменным числом частиц), при условии, что число тождественных бозонов в данном квантовом состоянии может быть любым (переменным):

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}.$$

Это распределение называется распределением Бозе–Эйнштейна. Здесь $\langle N_i \rangle$ – среднее число бозонов в квантовом состоянии с энергией E_i , μ – химический потенциал. Он определяет изменение внутренней энергии системы при добавлении к ней одной частицы при условии, что все остальные величины, от которых зависит внутренняя энергия, фиксированы, т.е. не изменяются.

Частицы с полуцелым спином – электроны, протоны, нейтроны – описываются антисимметричными волновыми функциями и подчиняются статистике Ферми–Дирака (Ферми – итальянский физик); эти частицы называются фермионами. Для систем частиц, образованных фермионами – частицами с полуцелым спином, числа заполнения могут принимать лишь два значения: 0 – для свободных состояний и 1 – для занятых. Сумма всех чисел заполнения должна быть равна числу частиц системы. Для фермионов волновая функция является антисимметричной, отсюда следует, что два одинаковых фермиона, входящих в одну систему, не могут находиться в одинаковых состояниях. Обобщая опытные результаты, Паули сформулировал принцип, согласно которому системы фермионов встречаются в природе только в состояниях, описываемых антисимметричными волновыми функциями.

Это квантово-механическая формулировка принципа Паули. Отсюда вытекает элементарная формулировка принципа Паули, которая была введена им в квантовую теорию еще до создания квантовой механики: в системе одинаковых фермионов любые два из них не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии, т.е. не могут иметь одинаковый набор четырех квантовых чисел. Отметим, что число однотипных бозонов, находящихся в одном и том же состоянии, может быть любым. Отсюда следует, что статистика для фермионов должна отличаться от статистики для бозонов. Идеальный газ из фермионов – ферми-газ – описывается квантовой статистикой Ферми–Дирака. Распределение фермионов по состояниям с данной энергией имеет вид

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} + 1},$$

где $\langle N_i \rangle$ – среднее число фермионов в квантовом состоянии с энергией E_i , μ – химический потенциал. Это распределение называется распределением Ферми–Дирака.

Если $E_i \gg \mu$, то $\exp(E_i - \mu)/kT \gg 1$, и распределения Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака переходят в классическое распределение Максвелла–Больцмана

$$\langle N_i \rangle = A e^{-E_i/kT}.$$

Таким образом, при высоких температурах бозе-газ и ферми-газ ведут себя подобно идеальному газу.

Система частиц называется вырожденной, если ее свойства существенным образом отличаются от свойств систем, подчиняющихся классической статистике. Поведение бозе-газа и ферми-газа отличается от идеального газа, поэтому оба газа вырождены. Вырождение газов становится существенным при весьма низких температурах и больших плотностях. Параметром вырождения называется величина A . При $A \ll 1$, т.е. при малой

степени вырождения оба распределения переходит в классическое распределение Максвелла–Больцмана.

Температурой вырождения T_0 называется температура, ниже которой отчетливо проявляются квантовые свойства идеального газа, обусловленные тождественностью частиц, т.е. T_0 – температура, при которой вырождение становится существенным. Если $T \gg T_0$, то поведение системы частиц (газа) описывается классически.

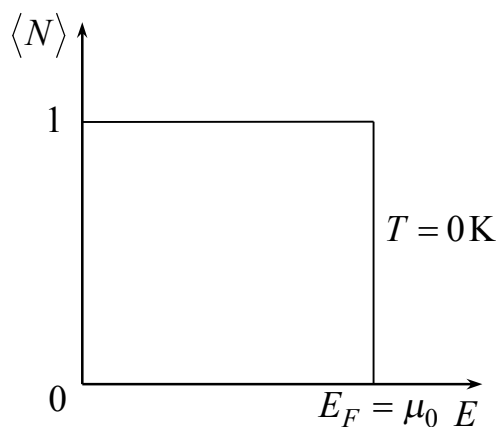
§ 87. Распределение электронов проводимости в металле по энергиям. Энергетические зоны в кристаллах

Распределение электронов по различным квантовым состояниям подчиняется принципу Паули, согласно которому в любой квантовой системе в одном состоянии не может быть двух одинаковых (с одинаковым набором четырех квантовых чисел) электронов, они должны отличаться какой-то характеристикой, например, направлением спина. Следовательно, по квантовой теории все электроны и в металле не могут располагаться на самом низшем энергетическом уровне даже при 0 К. Принцип Паули вынуждает электроны «взбираться» вверх по энергетическим уровням, как например, в атоме.

Электроны проводимости в металле можно рассматривать как идеальный газ, подчиняющийся квантовому распределению Ферми–Дирака. В этом случае совокупность электронов называется электронным газом. Если μ_0 – химический потенциал электронного газа при $T = 0$ К, то согласно распределению Ферми–Дирака среднее число $\langle N(E) \rangle$ электронов в квантовом состоянии на энергетических уровнях с энергией E равно:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu_0)/kT} + 1}.$$

Отсюда следует, что при $T = 0$ и при $E < \mu_0$ функция распределения принимает значение $\langle N(E) \rangle = 1$, так как



$$\frac{E - \mu_0}{kT} \rightarrow -\infty, \quad e^{-\infty} \ll 1.$$

При $E > \mu_0$ функция распределения равна 0.

При $E = \mu_0$ функция $\langle N(E) \rangle$ скачкообразно уменьшается до нуля (рис. 147). Это означает, что при $T = 0$ К все нижние квантовые состояния, вплоть до состояния с энергией $E = \mu_0$,

Рис. 147. Распределение электронов по энергиям при 0 К

заполнены электронами, а все состояния с энергией, большей μ_0 , свободны. Следовательно, μ_0 есть максимальная энергия, которую могут иметь электроны проводимости в металле при 0 К. Эта максимальная энергия называется энергией Ферми и обозначается E_F . Поэтому распределение Ферми–Дирака обычно записывается в виде

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}.$$

При $T = 0$ наивысший энергетический уровень, занятый электронами, называется уровнем Ферми. Уровню Ферми соответствует энергия Ферми E_F , которую имеют электроны на этом уровне. Уровень Ферми, очевидно, будет тем выше, чем больше плотность электронного газа, т.е. чем больше электронов в единице объема металла. Работу выхода электрона из металла нужно отсчитывать не от дна потенциальной ямы, как это делалось в классической теории, а от уровня Ферми, т.е. от верхнего из занятых электронами энергетических уровней.

Для металлов при не слишком высоких температурах выполняется неравенство $kT \ll E_F$. Это означает, что электронный газ практически всегда находится в состоянии сильного вырождения. Температура T_0 вырождения находится из условия $kT_0 = E_F$.

Она определяет границу, выше которой квантовые эффекты перестают быть существенными. Расчеты показывают, что для электронов в металле $T_0 \approx 10^4$ К, т.е. для всех температур, при которых металл может существовать в твердом состоянии, электронный газ в металле вырожден.

При температурах, отличных от 0 К, функция распределения плавно уменьшается от 1 до 0 в узкой области (порядка kT) в окрестности E_F (рис. 148). Это объясняется тем, что при $T > 0$ небольшое число электронов с энергией, близкой к E_F , возбуждается за счет теплового движения, и их энергия становится больше E_F . Соответственно, вблизи уровня Ферми, при $E < E_F$, среднее число электронов меньше единицы, а при $E > E_F$ — больше нуля.

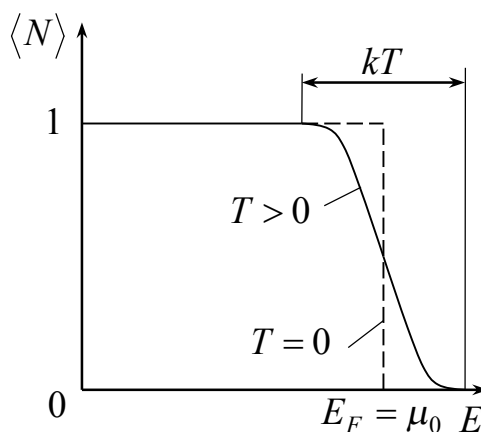


Рис. 148. Распределение электронов по энергиям при $T > 0$ К

В тепловом движении участвует лишь небольшое число электронов, например, при комнатной температуре $T \approx 300$ К и температуре вырождения $T_0 = 3 \cdot 10^4$ К – это 10^{-5} от общего числа электронов.

Если $(E - E_F) \gg kT$ («хвост» функции распределения), то единицей в знаменателе распределения Ферми–Дирака можно пренебречь и тогда распределение Ферми–Дирака переходит в распределение Максвелла–Больцмана.

Небольшим количеством электронов, имеющим $E > E_F$, объясняется тот факт, что теплоемкости проводников и диэлектриков одинаковы, т.е. теплоемкость электронного газа практически равна нулю. При этом теплоемкость кристаллической решетки металла значительна.

Квантовая теория объяснила также температурную зависимость электропроводности металлов. По классической теории $\sigma \sim 1/\sqrt{T}$, фактически же $\sigma \sim 1/T$. Зависимость классической теории получается из того обстоятельства, что средняя скорость упорядоченного движения электронов $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$. Квантовая теория рассматривает движение электронов с учетом их взаимодействия с кристаллической решеткой. Согласно корпускулярно-волновому дуализму, движению электрона сопоставляют волновой процесс. Идеальная кристаллическая решетка (в ее узлах находятся неподвижные частицы и в ней отсутствуют нарушения периодичности) ведет себя подобно оптически однородной среде – она «электронные волны» не рассеивает. Это соответствует тому, что металл не оказывает электрическому току – упорядоченному движению электронов – никакого сопротивления. «Электронные волны», распространяясь в идеальной кристаллической решетке, как бы огибают узлы решетки, и проходят значительные расстояния.

В реальной кристаллической решетке всегда имеются неоднородности, которыми могут быть, например, примеси, вакансии; неоднородности обуславливаются также тепловыми колебаниями ионов. В реальной кристаллической решетке происходит рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, что и является причиной электрического сопротивления металлов. Рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, связанных с тепловыми колебаниями, можно рассматривать как столкновения электронов с фононами (от греч. phone – звук). Фононы есть квазичастицы, колебательное движение которых с точки зрения квантовой теории представляет собой упругую волну, вызванную нагревом металла. Узлы кристаллической решетки совершают колебания, подобно колебаниям частиц в упругой волне, но не за счет приложения переменной механической нагрузки к металлу, а за счет его нагрева. С повышением температуры рассеяние «электронных волн» на тепловых колебаниях (фононах) возрастает, что соответствует уменьшению средней длины свободного пробега электро-

нов. В области комнатных температур $\langle l_F \rangle \sim 1/T$, $\langle l_F \rangle$ – средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми, поэтому удельная проводимость $\sigma \sim 1/T$, а $R \sim T$.

Используя уравнение Шредингера – основное уравнение динамики в релятивистской квантовой механике – можно рассматривать задачу о кристалле, например, найти возможные значения его энергии, а также соответствующие энергетические состояния. Однако, как в классической, так и в квантовой механике отсутствуют методы точного решения динамической задачи для системы многих частиц. Поэтому эта задача решается приближенно, путем сведения задачи многих частиц к задаче об одном электроне, движущимся в заданном внешнем поле. Подобный путь приводит к зонной теории твердого тела.

В основе зонной теории лежит адиабатическое приближение. Квантово-механическая система разделяется на ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Считая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривается в постоянном периодическом поле ядер.

Далее используется приближение самосогласованного поля. Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и ядер. Таким образом, в рамках зонной теории многоэлектронная задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле всех ядер и электронов.

Представим себе мысленно образование модели кристалла, состоящего из двух атомов (рис. 149). В изолированном состоянии (рис. 149а)

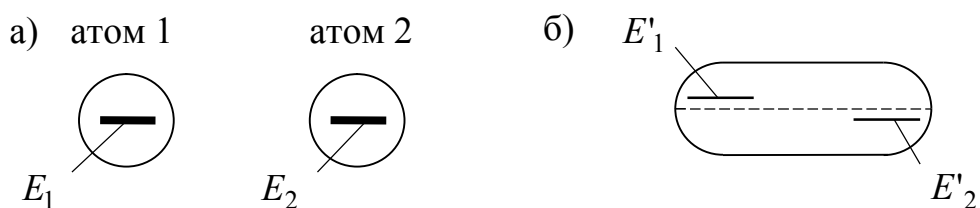


Рис. 149. Схема образования энергетических зон в модели кристаллах

энергетические уровни двух тождественных электронов одинаковы ($E_1 = E_2$). При объединении в единую квантовую систему (рис. 149б) в соответствии с принципом Паули энергетические уровни E_1 и E_2 не могут быть одинаковыми и поэтому незначительно смещаются друг относительно-

но друга. При образовании реального кристалла, где число атомов примерно равно числу Авогадро, число расщеплённых энергетических уровней также равно числу Авогадро, и они образуют так называемую энергетическую зону, т.е. почти сплошной набор энергетических уровней. Расстояние между соседними энергетическими уровнями в зоне составляет примерно 10^{-22} эВ. Расщепление незанятых энергетических уровней образует так называемую разрешённую энергетическую зону. Эти зоны разделены запрещёнными (по принципу Паули) энергетическими зонами. Электроны не могут занимать энергетические уровни, расположенные в запрещённых зонах.

Если разрешённая энергетическая зона образована расщеплением энергетических уровней валентных электронов внутренних оболочек свободных атомов, то она называется валентной. Если разрешённая энергетическая зона образована расщеплением энергетических уровней электронов проводимости (создающих электрический ток), то она называется зоной проводимости.

Физические свойства металлов, полупроводников и диэлектриков объясняются с позицией зонной теории (рис. 150). Здесь самая верхняя зона является зоной проводимости 1, ниже расположена запрещенная зона 2, и еще ниже – валентная зона 3. Случаи а) и б) соответствуют металлам, в которых электроны могут двигаться с ускорением, увеличивая свою кинетическую энергию, так как имеются свободные энергетические уровни либо в валентной зоне, либо за счет перекрытия валентной зоны и зоны проводимости. Полупроводники характеризуются узкой запрещенной зоной, а диэлектрики – очень широкой запрещенной зоной.

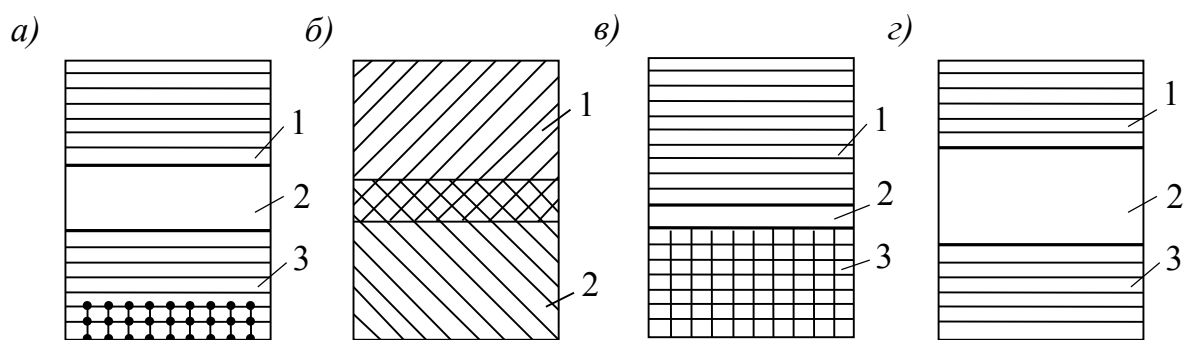


Рис. 150. Взаимное расположение зоны проводимости, запрещённой зоны и валентной зоны для металлов а) и б), полупроводника в) и диэлектрика г)

§ 88. Собственная проводимость полупроводников

Полупроводниками называют вещества, характеризующиеся значениями удельной электропроводности σ , промежуточными между удельной электропроводностью металлов $\sigma_{Me} = 10^6 \div 10^4 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ и диэлектриков

$\sigma_0 = 10^{-10} \div 10^{-12} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ (при комнатной температуре). Характерной особенностью полупроводников, отличающих их от металлов, является возрастание электропроводности с ростом температуры. При $T = 0$ полупроводники характеризуются полностью занятой электронами валентной зоной 1, отделенной от зоны проводимости 2 сравнительно узкой ($\Delta E \leq 1$ эВ) запрещенной зоной 3 (рис. 151).

В природе полупроводники существуют в виде элементов (Si, Ge, As, Se, Te) и химических соединений, например, оксиды, сульфиды, селениды, сплавы элементов. Различают собственные и примесные полупроводники. Собственными полупроводниками являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется собственной проводимостью. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Se, а также многие химические соединения: InSb, GaAs, CdS.

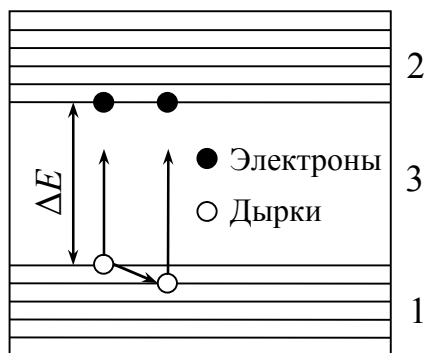


Рис. 151. Зонная схема полупроводника

При 0 К и отсутствии других внешних факторов, собственные полупроводники ведут себя как диэлектрики. При повышении же температуры электроны с верхних уровней валентной зоны могут перейти на нижние уровни зоны проводимости. При наложении на кристалл электрического поля они перемещаются против поля и создают электрический ток. Проводимость собственных полупроводников, обусловленная электронами, называется электронной проводимостью или проводимостью n-типа (от англ. negative – отрицательный).

В результате тепловых «забросов» электронов из валентной зоны в зону проводимости в валентной зоне возникают вакантные состояния, получившие название электронных дырок. Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место – дырку – может переместиться электрон с соседнего нижнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушел электрон и т.д. Такой процесс заполнения дырок электронами равносителен перемещению дырки в направлении, противоположном движению электрона (т.е. в нижнюю часть валентной зоны) так, как если бы дырка обладала положительным зарядом, равным по величине заряду электрона.

Проводимость собственных полупроводников, обусловленная квазичастицами – электронными дырками, называется дырочной проводимостью или проводимостью p-типа (от англ. positive – положительный).

Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются одновременно два механизма проводимости – электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, перешедшим в зону проводимо-

сти: $N_e = N_p$. Проводимость полупроводников всегда является возбужденной, т.е. появляется только под действием внешних факторов (температуры, облучения, сильных электрических полей и т.д.).

В собственном полупроводнике уровень Ферми находится в середине запрещенной зоны. Действительно, для переброса электрона с верхнего уровня валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости, затрачивается энергия активации, равная ширине запрещенной зоны ΔE (рис. 152).

При появлении же электрона в зоне проводимости в валентной зоне возникает дырка. Следовательно, энергия, затраченная на образование пары носителей тока, должна делиться на две равные части. Так как энергия, соответствующая половине ширины запрещенной зоны, идет на переброс электрона и такая же энергия затрачивается на образование дырки, то

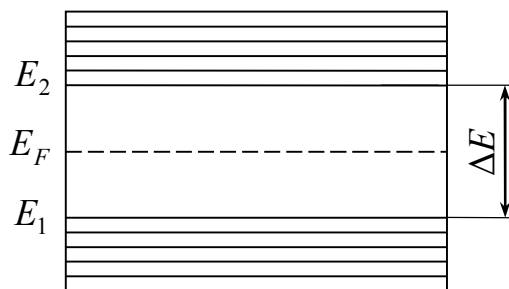


Рис. 152. Положение уровня Ферми в собственном полупроводнике

начало отсчета для каждого из этих процессов должно находиться в середине запрещенной зоны. Энергия Ферми в собственном полупроводнике представляет собой энергию, от которой происходит возбуждение электронов и дырок.

Так как для собственных полупроводников $\Delta E \gg kT$ ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), то распределение Ферми–Дирака в зоне проводимости переходит в распределение Максвелла–Больцмана. Положив $E - E_F \approx \Delta E / 2$, получим

$$\langle N(E) \rangle \geq e^{-\Delta E / (2kT)}.$$

Количество электронов, переброшенных в зону проводимости, а следовательно, и количество образовавшихся дырок, пропорциональны $\langle N(E) \rangle$. Таким образом, удельная проводимость собственных полупроводников

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta E / (2kT)},$$

где σ_0 – постоянная, характерная для данного полупроводника.

Увеличение проводимости полупроводников с повышением температуры является их характерной особенностью. С точки зрения зонной теории это обстоятельство объяснить довольно просто: с повышением температуры растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости и участвуют в проводимости. Поэтому, удельная проводимость собственных полупроводников растет. Если представить температурную зависимость удельной проводимости в логарифмических координатах, то для собственных полупроводников – это

прямая, по наклону которой можно определить ширину запрещенной зоны ΔE , а по ее продолжению – σ_0 (рис. 153).

Наиболее широко распространенным полупроводниковым элементом является германий, имеющий решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными связями с четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge дана на рис. 154, где каждая черточка обозначает связь, осуществляемую одним электроном. В идеальном кристалле при 0 К такая структура представляет собой диэлектрик, т.к. все валентные электроны участвуют в образовании связей и, следовательно, не участвуют в проводимости.

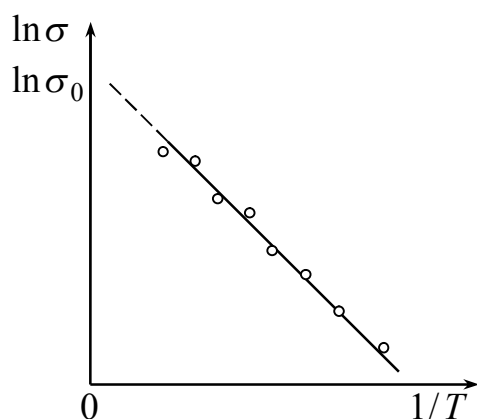


Рис. 153. График линейной зависимости логарифма удельной проводимости от обратной температуры

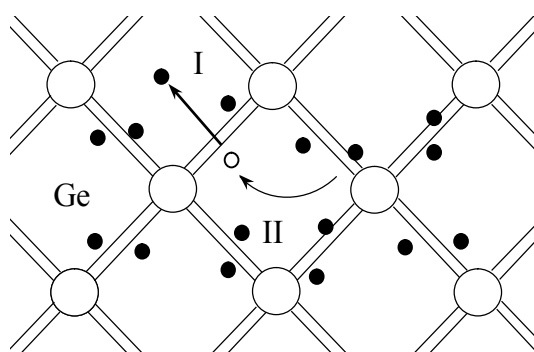


Рис. 154. Схема расположения атомов в кристалле Ge и движение электронов и дырок по кристаллу.
● – электрон; ○ – дырка

При повышении температуры (или под действием других внешних факторов) тепловые колебания решетки могут привести к разрыву некоторых валентных связей, в результате чего часть электронов отщепляется, и они становятся свободными.

В покинутом электроном месте возникает дырка, заполнить которую могут электроны из соседней пары. В результате дырка, также как и освободившийся электрон, будет двигаться по кристаллу. Движение электронов проводимости и дырок в отсутствие электрического поля является хаотическим. Если же на кристалл наложить электрическое поле, то электроны начнут двигаться против поля, дырки – по полю, что приведет к возникновению собственной проводимости германия, обусловленной как электронами, так и дырками.

В полупроводниках наряду с процессом генерации электронов и дырок идет процесс рекомбинации: электроны возвращаются из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке и испуская кванты электромагнитного излучения. В результате для каждой температуры устанавли-

ливаются определенная равновесная концентрация электронов и дырок, изменяющаяся с температурой пропорционально $\exp(-\Delta E / (2kT))$.

§ 89. Примесная проводимость полупроводников

Проводимость полупроводников, обусловленная примесями, называется примесной проводимостью, а сами полупроводники – примесными полупроводниками. Примесями являются атомы посторонних элементов, избыточные по сравнению со стехиометрическим составом, тепловые (пустые узлы или атомы в междоузлиях) и механические (трещины, дислокации и т.д.) дефекты. Стехиометрический (от греч. *stoiheion* – основание) состав – это состав вещества, при котором имеет место строгое соответствие количества атомов различных элементов вещества химической формуле. Например, в NaCl на один атом Na должен приходиться один атом Cl. Наличие в полупроводнике примеси существенно изменяет его проводимость. Например, при введении в кремний $\sim 0,001$ ат.% бора его проводимость увеличивается в 1000 раз.

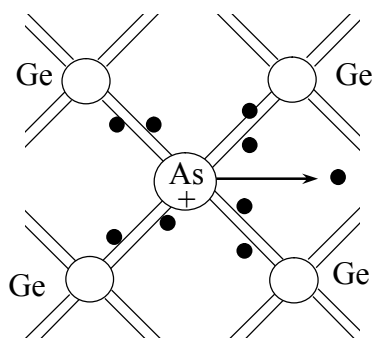


Рис. 155. Схема образования примесной электронной проводимости

Примесную проводимость полупроводников рассмотрим на примере Ge, в который вводятся атомы с валентностью, отличной от валентности основных атомов на единицу. Например, при замещении атома германия пятивалентным атомом мышьяка, один электрон не может образовывать ковалентной связи. Он оказывается лишним и может быть легко при тепловых колебаниях решетки отщеплен от атома, т.е. стать свободным (рис. 155).

Образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентной связи; следовательно, в отличие от случая собственного полупроводника дырки не возникает. Избыточный положительный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с атомом примеси и поэтому перемещаться по решетке не может. С точки зрения зонной теории рассмотренный процесс можно представить следующим образом.

Введение примеси искажает потенциальное поле решетки, что приводит к возникновению в запрещенной зоне энергетического уровня D валентных электронов мышьяка, называемого примесным уровнем (рис. 156). В случае германия с примесью мышьяка этот уровень располагается от дна зоны проводимости на расстоянии $\Delta E_D = 0,015$ эВ. Так как $\Delta E_D \ll \Delta E$, то уже при обычных температурах энергия теплового движе-

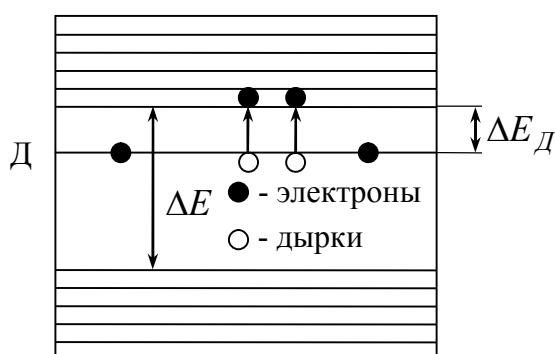


Рис. 156. Расположение энергетических уровней электронов в полупроводнике *n*-типа

возникает электронная примесная проводимость (проводимость *n*-типа). Полупроводники с такой проводимостью называются электронными (или полупроводниками *n*-типа). Примеси, являющиеся источником электронов, называются донорами (от лат. dono – дарю), а энергетические уровни этих примесей – донорными уровнями.

Предположим, что в решетку кремния Si введен примесный атом с тремя валентными электронами, например, бор. Для образования связей с четырьмя ближайшими соседями у атома бора не хватает одного электрона, одна из связей остается неукомплектованной и четвертый электрон может быть захвачен от соседнего атома основного вещества, где соответственно образуются дырки (рис. 157). Последовательное заполнение образующихся дырок электронами эквивалентно движению дырок в полупроводнике, т.е. дырки не остаются локализованными, а перемещаются в решетке кремния как свободные положительные заряды. Избыточный же отрицательный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с атомом примеси и по решетке перемещаться не может.

По зонной теории, введение трехвалентной примеси в решетку кремния приводит к возникновению в запрещенной зоне примесного энергетического уровня *A*, не занятого электронами (рис. 158).

ния достаточно для того, чтобы перебросить электроны примесного уровня в зону проводимости на расстояние $\Delta E_D = 0,015 \text{ эВ}$.

Образующиеся при этом дырки локализуются на неподвижных атомах мышьяка и в проводимости не участвуют. Таким образом, в полупроводниках с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, носителями тока являются электроны;

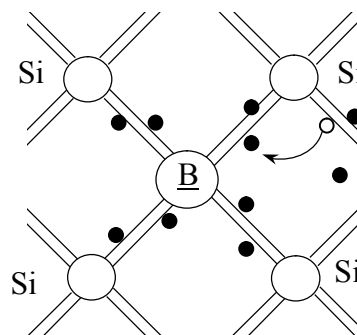


Рис. 157. Схема образования примесной дырочной проводимости

В случае кремния с примесью бора этот уровень располагается выше

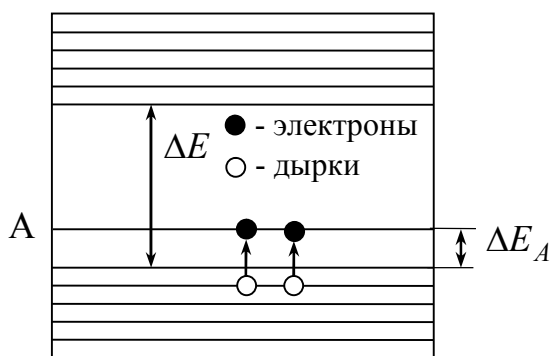


Рис. 158. Расположение энергетических уровней электронов в полупроводнике *p*-типа

верхнего края валентной зоны на расстоянии $\Delta E_A = 0,88$ эВ. Близость этих уровней к валентной зоне приводит к тому, что уже при сравнительно низких температурах электроны из валентной зоны переходят на примесные уровни и, связываясь с атомами бора, теряют способность перемещаться по решетке кремния, т.е. в проводимости не участвуют. Носителями тока являются лишь дырки, возникающие в валентной зоне.

Таким образом, в полупроводниках с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, носителями тока являются дырки; возникает дырочная проводимость (проводимость *p*-типа). Полупроводники с такой проводимостью называются дырочными (или полупроводниками *p*-типа). Примеси, захватывающие электроны из валентной зоны полупроводника, называются акцепторами (от лат. acceptor – принимающий), а энергетические уровни этих примесей – акцепторными уровнями.

В отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно и электронами и дырками, примесная проводимость полупроводников обусловлена в основном носителями одного знака: электронами – в случае донорной примеси и дырками – в случае акцепторной. Эти носители тока называются основными. Кроме основных носителей в полупроводнике имеются и неосновные носители: в полупроводниках *n*-типа – дырки, в полупроводниках *p*-типа – электроны.

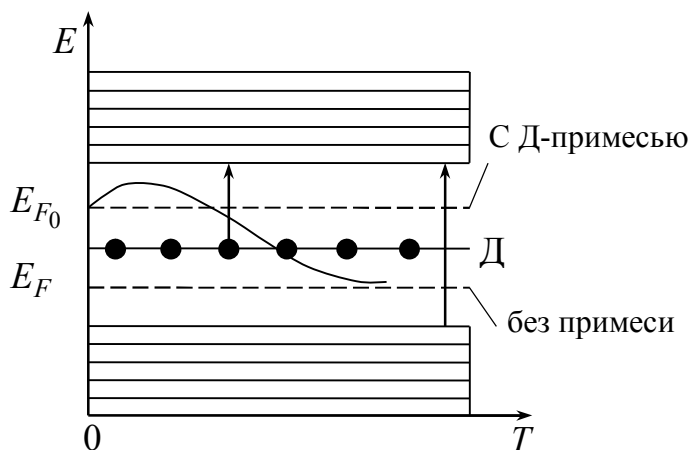


Рис. 159. Положение уровня Ферми в примесном электронном полупроводнике

Наличие примесных уровней в полупроводниках существенно изменяет положение уровня Ферми E_F . Расчеты показывают, что в случае примесных полупроводников *n*-типа уровень Ферми E_{F0} при 0 К расположен посередине между «дном» зоны проводимости и донорным уровнем (рис. 159).

С повышением температу-

ры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, но, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергий. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для чистого полупроводника.

Уровень Ферми в полупроводниках p -типа при 0 К E_{F0} располагается посередине между «потолком» валентной зоны и акцепторным уровнем (рис. 160). Сплошная кривая показывает его смещение с температурой.

При температурах, при которых примесные атомы оказываются истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.

Проводимость примесного полупроводника, как и проводимость любого проводника, определяется концентрацией носителей и их подвижностью (средней скоростью упорядоченного движения). С изменением температуры подвижность носителей меняется по сравнительно слабому степенному закону, а концентрация носителей – по очень сильному экспоненциальному закону, поэтому зависимость проводимости примесных полупроводников от температуры определяется в основном температурной зависимостью концентрации носителей тока в нем.

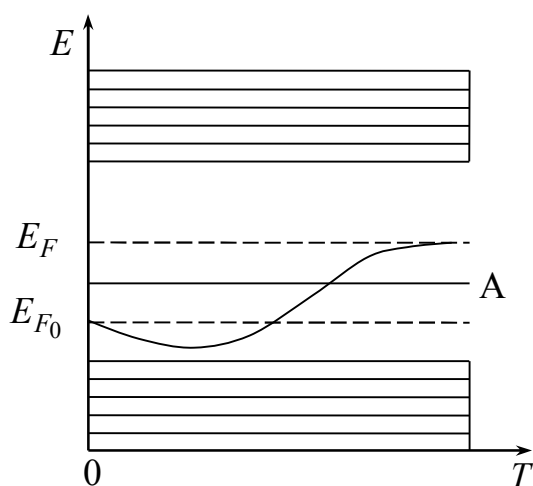


Рис. 160. Положение уровня Ферми в примесном дырочном полупроводнике

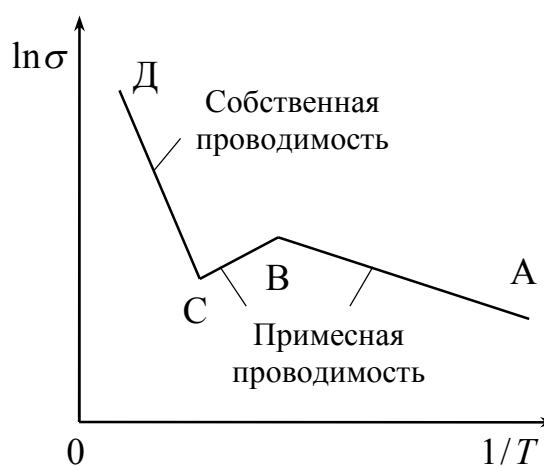


Рис. 161. График зависимости логарифма удельной проводимости примесных полупроводников от обратной температуры

На рис. 161 дан примерный график температурной зависимости удельной проводимости примесных полупроводников в логарифмических координатах. Участок АВ описывает примесную проводимость полупроводни-

ка; ее рост с повышением температуры обусловлен, в основном, ростом концентрации примесных носителей. Участок ВС соответствует области истощения примесей, либо полному заполнению донорных уровней; участок СД описывает собственную проводимость полупроводника.

Если в металлах число носителей тока и их энергия практически не зависят от температуры, то в полупроводниках (при любом типе проводимости) число носителей тока значительно меньше, чем в металлах, и концентрация носителей тока и их энергия сильно зависят от температуры – они возрастают при ее повышении.

§ 90. Контакт электронного и дырочного полупроводников

Граница соприкосновения двух полупроводников, один из которых имеет электронную, а другой – дырочную проводимость, называется электронно-дырочным переходом ($n-p$ переходом). Эти переходы имеют большое практическое значение, являясь основой работы многих полупроводниковых приборов. $n-p$ переход нельзя осуществить просто механическим соединением двух полупроводников. Обычно области различной проводимости создают либо при выращивании кристаллов, либо при соответствующей обработке кристаллов.

Например, на кристалл германия n -типа накладывается индиевая таблетка (рис. 162а). Эта система нагревается примерно при $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ в вакууме или в атмосфере инертного газа; атомы индия диффундируют на некоторую глубину в германий. Затем кристалл медленно охлаждают. Так как германий, содержащий индий, обладает дырочной проводимостью, то на границе закристаллизовавшегося индия и германия n -типа образуется $n-p$ переход (рис. 162б).

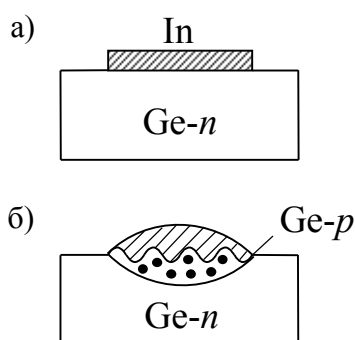


Рис. 162. Схема образования $n-p$ перехода

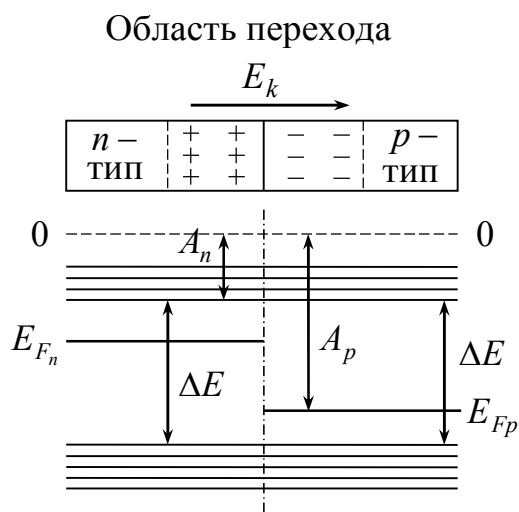


Рис. 163. Расположение энергетических уровней донорного и акцепторного полупроводников

Рассмотрим физические процессы, происходящие в $n-p$ переходе (рис. 163). Пусть однородный полупроводник (работа выхода $-A_n$, уровень Ферми $-E_{F_n}$) приводится в контакт с акцепторным полупроводником (A_p , E_{F_p}). Электроны из n -полупроводника, где их концентрация выше, будут диффундировать в p -полупроводник, где их концентрация ниже. Диффузия же дырок происходит в обратном направлении – в направлении $p \rightarrow n$.

В n -полупроводнике, из-за ухода электронов, вблизи границы остается некомпенсированный объемный положительный заряд неподвижных ионизированных донорных атомов. В p -полупроводнике, из-за ухода дырок, вблизи границы образуется отрицательный объемный заряд неподвижных ионизированных акцепторов. Эти объемные заряды образуют у границы двойной электрический слой, поле которого, направленное от n -области к p -области, препятствует дальнейшему переходу электронов в направлении $n \rightarrow p$ и дырок в направлении $p \rightarrow n$. Если концентрация дырок и акцепторов в полупроводниках n - и p -типа одинаковы, то толщины слоев d_1 и d_2 , в которых локализуются неподвижные заряды, равны ($d_1 = d_2$, рис. 164).

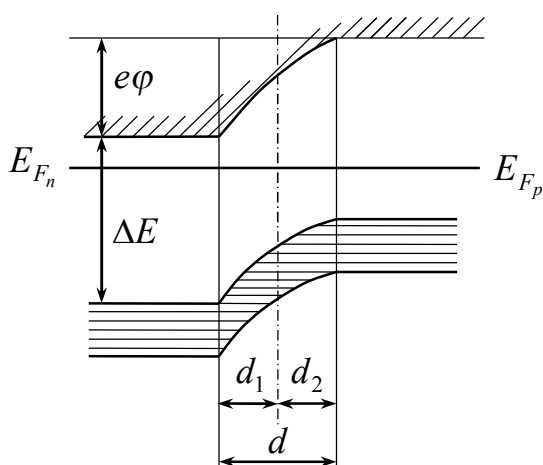


Рис. 164. Смещение энергетических уровней и искривление энергетических зон в области $n-p$ перехода

При определенной толщине $n-p$ перехода наступает равновесное состояние, характеризуемое выравниванием уровней Ферми для обоих полупроводников. В области $n-p$ перехода энергетические зоны искривляются, в результате чего возникают потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок. Эти барьеры и препятствуют переходу электронов в направлении $n \rightarrow p$ и дырок в направлении $p \rightarrow n$. Высота потенциального барьера $e\phi$ определяется первоначальной разностью положений уровня Ферми в обоих полупроводниках. Все энергетические уровни акцепторного полупроводника подняты относительно уровней донорного полупроводника на высоту, равную $e\phi$, причем подъем происходит на толщине двойного слоя d .

Толщина d слоя $n-p$ перехода в полупроводниках составляет примерно 10^{-6} – 10^{-7} м, а контактная разность потенциалов – десятые доли вольт. Носители тока способны преодолеть такую разность потенциалов лишь при температуре в несколько тысяч градусов, т.е. при обычных температу-

При определенной толщине $n-p$ перехода наступает равновесное состояние, характеризуемое выравниванием уровней Ферми для обоих полупроводников. В области $n-p$ перехода энергетические зоны искривляются, в результате чего возникают потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок. Эти барьеры и препятствуют переходу электронов в направлении $n \rightarrow p$ и дырок в направлении $p \rightarrow n$. Высота потенциального барьера $e\phi$ определяется первоначальной

рах равновесный контактный слой является запирающим (характеризуется повышенным сопротивлением).

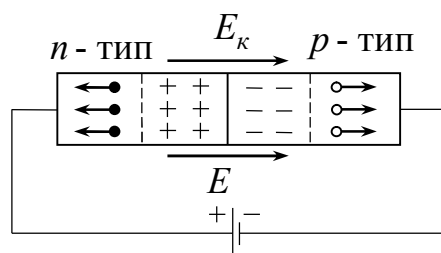


Рис. 165. Запирающее направление внешнего поля

Сопротивление запирающего слоя можно изменить с помощью внешнего электрического поля. Если приложенное к $n-p$ переходу внешнее электрическое поле E направлено от n -полупроводника к p -полупроводнику, т.е. совпадает с полем контактного слоя E_k , то оно вызывает движение электронов в n -полупроводнике и дырок в p -полупроводнике от границы

$n-p$ перехода в противоположные стороны (рис. 165).

В результате запирающий слой расширится и его сопротивление возрастет. Направление внешнего поля, расширяющего запирающий слой, называют запирающим (обратным). В этом направлении электрический ток через $n-p$ переход практически не проходит. Ток в запирающем слое в запирающем направлении образуется лишь за счет неосновных носителей тока (электронов в p -полупроводнике и дырок в n -полупроводнике), но ими можно пренебречь, т.к. концентрации неосновных носителей тока в примесных полупроводниках весьма малы.

Если приложенное к $n-p$ переходу внешнее электрическое поле направлено противоположно полю контактного слоя, то оно вызывает движение электронов в n -полупроводнике и дырок в p -полупроводнике к границе $n-p$ перехода навстречу друг другу (рис. 166). В этой области они рекомбинируют, исчезает двойной электрический слой, толщина контактного слоя и его сопротивление уменьшаются и последующие электроны и дырки почти свободно проходят через $n-p$ переход.

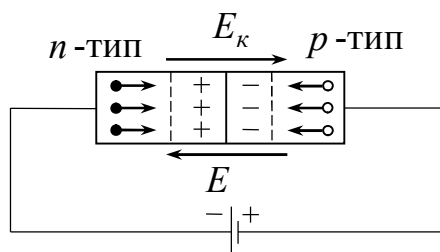


Рис. 166. Пропускное направление внешнего поля

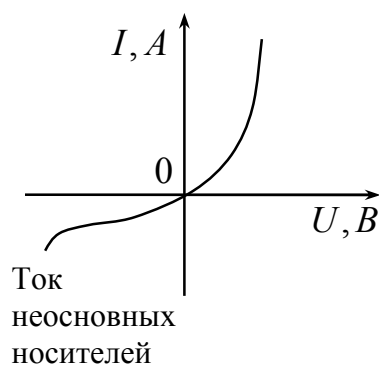


Рис. 167. Вольтамперная характеристика $n-p$ перехода

Следовательно, в этом направлении электрический ток проходит сквозь $n - p$ переход в направлении от p -полупроводника к n -полупроводнику; оно называется пропускным (прямым).

Таким образом, $n - p$ переход обладает односторонней (вентильной) проводимостью, и если на $n - p$ переход подать переменный электрический ток, то в электрической цепи появится пульсирующий ток в виде положительных полупериодов, разделенных временным промежутками, в течение которых ток в цепи отсутствует. Происходит так называемое однополупериодное «выпрямление» электрического тока.

На рис. 167 изображена вольтамперная характеристика $n - p$ перехода при наличии внешнего поля при некоторой температуре.

§ 91. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы)

Односторонняя проводимость контактов двух полупроводников (или металла с полупроводником) используется для выпрямления и преобразования переменных токов. Если имеется один электронно-дырочный переход, то его действие аналогично действию двухэлектродной лампы – диода. Поэтому, полупроводниковое устройство, содержащее один $n - p$ переход, называют полупроводниковым (кристаллическим) диодом (от греч. *di* – дважды и англ. *electrod* – электрод). Полупроводниковые диоды по конструкции делятся на точечные и плоскостные.

Рассмотрим точечный германиевый диод, в котором тонкая вольфрамовая проволока 1 прижимается к $Ge-n$ острием, покрытым алюминием (рис. 168). Если через диод в прямом направлении пропустить кратковременный импульс тока, то при этом резко повышается диффузия Al в Ge и образуется слой Ge , обогащенный алюминием и обладающий p -проводимостью.

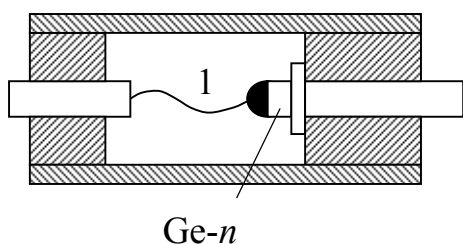


Рис. 168. Точечный германиевый диод

На границе этого слоя образуется $n - p$ переход, обладающий высоким коэффициентом выпрямления. Благодаря малой емкости контактного слоя точечные диоды применяются в качестве детекторов (выпрямителей) высокочастотных колебаний вплоть до сантиметрового диапазона волн. Полупроводниковые диоды обладают целым рядом преимуществ по сравнению с

электронными лампами (малые габаритные размеры, высокие к.п.д. и срок службы, постоянная готовность к работе и т.д.), но они очень чувствительны к температуре, поэтому интервал их рабочих температур ограничен (от -70 до $+120^{\circ}C$).

$n-p$ переходы обладают не только прекрасными выпрямляющими свойствами, но могут быть использованы также для усиления, а если в схему ввести обратную связь, то и для генерирования электрических колебаний. Для этого применяются полупроводниковые триоды или транзисторы (от англ. transfer – переносить и resistor – сопротивление), представляющие собой полупроводниковые устройства, содержащие два $n-p$ перехода.

Для изготовления транзисторов используются германий и кремний, так как они характеризуются большой механической прочностью, химической устойчивостью и большей, чем в других полупроводниках, подвижностью носителей тока. Транзисторы делятся на точечные и плоскостные. Первые значительно усиливают напряжение, но их выходные мощности малы из-за опасности перегрева ($50-80^{\circ}\text{C}$). Плоскостные транзисторы являются более мощными.

Рассмотрим принцип работы плоскостного триода $p-n-p$. Рабочие электроды триода, которыми являются база, эмиттер и коллектор, включаются в схему с помощью невыпрямляющих контактов – металлических проводников (рис. 169).

Между эмиттером и базой прикладывается постоянное смещающее напряжение в прямом направлении, а между базой и коллектором – постоянное смещающее напряжение в обратном направлении. Усиливаемое пе-

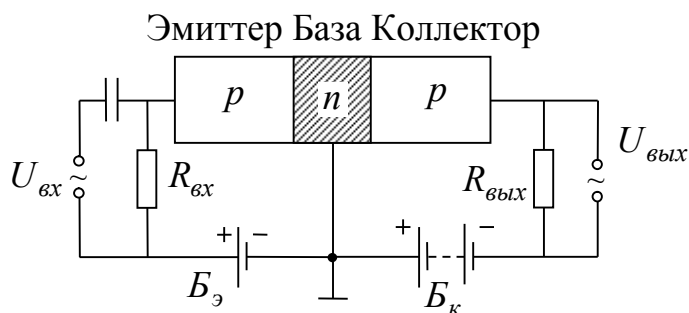


Рис. 169. Плоскостной $p-n-p$ триод

ременное напряжение подается на входное сопротивление $R_{вх}$, а усиленное – снимается с выходного сопротивления $R_{вых}$. Протекание тока в цепи эмиттера обусловлено в основном движением дырок и сопровождается их «впрыскиванием» – инжекцией – в область базы. Проникшие в базу дырки диффундируют по направлению к коллектору, причем при небольшой толщине базы значительная часть инжектированных дырок достигает коллектора. Здесь дырки захватываются полем, действующим внутри перехода (притягиваются к отрицательно заряженному коллектору), и изменяют ток коллектора. Следовательно, всякое изменение тока в цепи эмиттера вызывает изменение тока в цепи коллектора.

Прикладывая между эмиттером и базой переменное напряжение, получим в цепи коллектора переменный ток, а на выходном сопротивлении – переменное напряжение. Величина усиления зависит от свойств $n - p$ переходов, нагрузочных сопротивлений и напряжения батарей B_K . Коэффициент усиления может достигать 10^4 . Так как мощность переменного тока, выделяемого в $R_{вых}$, может быть больше, чем расходуемая в цепи эмиттера, то транзистор дает и усиление мощности. Эта усиленная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора. Транзистор, подобно электронному триоду, дает усиление и напряжения, и мощности. Если в лампе анодный ток управляется напряжением на сетке, ток коллектора, соответствующий анодному току в лампе, управляется током эмиттера.

ГЛАВА XII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 92. Состав и характеристики атомного ядра

Атомное ядро состоит из элементарных частиц – протонов и нейтронов. Впервые протонно-нейтронная модель ядра была предложена в 1932 году российским физиком Д.Д. Иваненко. Общее название этих частиц – нуклоны (от лат. nucleus – ядро). Соответственно ядро часто называют нуклидом.

Протон (p) – это ядро атома водорода (от греч. protos – первый). Он имеет положительный заряд, равный заряду электрона ($Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) и массу покоя $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг = $1836 m_e$, где m_e – масса электрона. Нейтрон (n) – нейтральная (от лат. neuter – ни тот, ни другой) частица, масса покоя которой составляет $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг = $1839 m_e$. Общее число нуклонов в ядре называется массовым числом A.

Атомное ядро характеризуется зарядом Ze , где e – заряд протона, Z – зарядовое число ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в периодической системе элементов Д.И. Менделеева. Известные в настоящее время 117 элементов таблицы Д.И. Менделеева имеют зарядовые числа ядер от $Z = 1$ до $Z = 117$.

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом ${}_Z^A X$, где X – символ химического элемента, Z – атомный номер элемента, т.е. зарядовое число, A – массовое число. Ядра с одинаковыми Z , но разными A (т.е. с разными числами нейтронов $N = A - Z$) называются изотопами (от греч. isos – одинаковый, topos – место). Так, например, водород имеет три изотопа: ${}_1^1\text{H}$ – обычный водород или протий ($Z = 1, N = 0$); ${}_1^2\text{H}$ – тяжелый водород или дейтерий ($Z = 1, N = 1$); ${}_1^3\text{H}$ – тритий ($Z = 1, N = 2$). Кислород имеет три стабильных изотопа, олово – десять, и т.д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами, (исключение составляют, например, изотопы водорода), определяющимися, в основном, структурой электронных оболочек, которая является одинаковой для всех изотопов данного элемента.

Ядра с одинаковым массовым числом A называются изобарами (от греч. baros – тяжесть). В качестве примера можно привести ${}_{18}^{40}\text{Ar}$ и ${}_{20}^{40}\text{Ca}$. Ядра с одинаковым числом N нейтронов носят название изотонов (${}_6^{13}\text{C}$, ${}_7^{14}\text{N}$) (от греч. topos – напряжение). Наконец, существуют радиоактивные ядра с одинаковыми Z и A , отличающиеся только периодом полураспада. Они называются изомерами (от греч. meros – часть). Существуют два изомера ядра ${}_{35}^{80}\text{Br}$, период полураспада которых составляет 18 мин и 4,5 часа.

Радиус ядра определяется эмпирической формулой

$$R = R_0 A^{1/3}, R_0 = (1,3 \dots 1,7) \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Отсюда видно, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер ($\sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$). Для сравнения вспомним, что первый борковский радиус $r_B = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, т.е. ядро в сто тысяч раз меньше, чем атом.

В настоящее время известно около 1500 ядер, различающихся либо Z , либо A , либо тем и другим. Около 25% этих ядер устойчивы, остальные радиоактивны. Многие ядра получены искусственным путем с помощью ядерных реакций. В природе существуют элементы с $Z = 1 \dots 92$, исключая технеций (Tc, $Z = 43$) и прометий (Pm, $Z = 61$). Для устойчивых ядер характерно определенное отношение числа нейтронов N к числу протонов Z . У легких ядер это отношение близко к единице. По мере увеличения числа нуклонов в ядре N/Z растет, достигая для урана значения 1,6.

§ 93. Масса и энергия связи ядра

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями, несмотря на взаимное отталкивание одинаково заряженных протонов. Это означает, что в ядре между нуклонами существует определенная связь. Точные измерения массы ядра показали, что масса ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Так как всякому изменению массы по формуле $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ должно соответствовать изменение энергии, то энергия ядра меньше, чем энергия составляющих его нуклонов, т.е. при образовании ядра система нуклонов переходит в состояние, соответствующее минимуму её энергии. Таким образом, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Из закона сохранения энергии вытекает и противоположное – для разделения ядра на нуклоны необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергия связи $E_{св}$ численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы разделить ядро на отдельные нуклоны. $E_{св} < 0$ так как $\Delta m < 0$.

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я}] \cdot c^2,$$

где m_p , m_n , $m_{я}$ – соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

Так как в таблицах указываются массы атомов, а не ядер, то пользуются формулой

$$E_{св} = [Zm_H + (A - Z)m_n - m] \cdot c^2,$$

где m_H – масса атома водорода.

Так как m_n больше m_p на величину m_e , то первое слагаемое в квадратных скобках включает в себя массу Z электронов. Поскольку масса m атома отличается от массы ядра $m_{\text{я}}$ как раз на массу Z электронов, то вычисления по обеим формулам приводят к одинаковым результатам.

Величина

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$$

называется дефектом массы ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

Одной из важнейших величин, характеризующих устойчивость ядра, является удельная энергия связи $E_{\text{св}}/A$. На рис. 170 представлен график зависимости

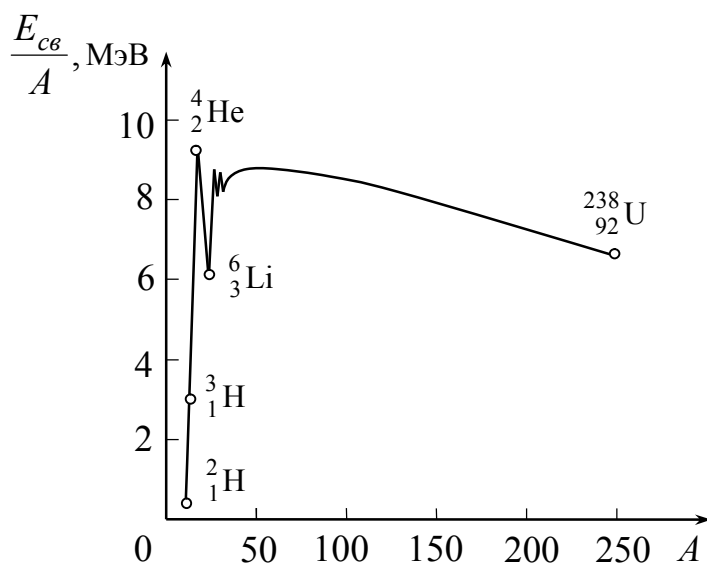


Рис. 170. Зависимость удельной энергии связи нуклонов в ядре от массового числа

удельной энергии связи от массового числа. Для легких ядер ($A \leq 12$) удельная энергия связи круто возрастает до 6...7 МэВ, затем медленно возрастает до максимальной величины 8,7 МэВ для элементов с $A = 50...60$, и, далее, постепенно уменьшается для тяжелых элементов, например, до 7,6 МэВ для $^{238}_{92}\text{U}$. Для сравнения отметим, что энергия связи валентных электронов с ядром в атомах составляет примерно 10

эВ, т.е. в 10^6 раз меньше.

Наиболее устойчивыми являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Такая зависимость $E_{\text{св}}/A$ делает энергетически выгодными два процесса: 1) деление тяжелых ядер на несколько легких; 2) слияние (синтез) легких ядер друг с другом в более тяжелое ядро. Оба процесса сопровождаются выделением большого количества энергии. Например, деление одного ядра с массовым числом $A = 240$ ($E_{\text{св}}/A = 7,5$ МэВ) на два ядра с массовыми числами $A = 120$ ($E_{\text{св}}/A = 8,5$ МэВ) привело бы к высвобождению энергии величиной 240 МэВ.

Слияние двух ядер тяжелого водорода ^2_1H в ядро ^4_2He привело бы к выделению энергии величиной ~ 24 МэВ. Для сравнения укажем, что при сгорании одного атома углерода выделяется 5 эВ.

§ 94. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

Радиоактивностью называется явление спонтанного превращения одних атомных ядер в другие, сопровождающееся различными видами радиоактивного излучения, в состав которого входят элементарные частицы. Радиоактивность разделяется на естественную (наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе) и искусственную (наблюдается у изотопов, полученных посредством ядерных реакций).

Радиоактивное излучение имеет сложный состав. В магнитном поле узкий пучок радиоактивного излучения расщепляется на три компоненты:

- 1) слабо отклоняемый пучок положительных частиц (α -излучение);
- 2) сильно отклоняемый пучок отрицательных частиц (β -излучение);
- 3) неотклоняемый пучок (γ -излучение).

α -излучение представляет собой поток α -частиц, или ядер гелия. Они отклоняются электрическим и магнитным полями, обладают высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (поглощаются слоем алюминия толщиной $\sim 0,05$ мм). Заряд α -частицы равен $+2e$, а масса равна массе изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$.

β -частицы также отклоняются электрическим и магнитным полями; их ионизирующая способность примерно в 100 раз меньше, а проникающая способность гораздо больше (поглощаются слоем алюминия толщиной ~ 2 мм), чем у α -частиц. β -излучение представляет собой поток электронов.

γ -излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (например, проходит сквозь слой свинца толщиной 5 см). γ -излучение представляет собой электромагнитное излучение с очень малой длиной волны $\lambda < 10^{-10}$ м и большой частотой. Поэтому оно представляет собой поток γ -квантов высокой энергии с ярко выраженными корпускулярными свойствами.

Под радиоактивным распадом понимается естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется материнским, возникающее ядро – дочерним.

Теория радиоактивного распада строится на предположении о том, что радиоактивный распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Пусть N_0 – начальное число нераспавшихся ядер в момент $t = 0$. Число ядер dN_1 , распавшихся в среднем за время dt , пропорционально этому времени и числу N нераспавшихся ядер к моменту времени t :

$$dN_1 = \lambda N dt,$$

где λ – постоянная для данного радиоактивного вещества величина, называемая постоянной радиоактивного распада. Поскольку убыль числа нераспавшихся ядер равна приращению числа распавшихся ядер, то

$$dN = -dN_1,$$

поэтому

$$dN = -\lambda N dt.$$

Разделив переменные и интегрируя уравнение, получим

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt; \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt; \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

и

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число нераспавшихся ядер в момент времени t . Последняя формула является математическим выражением закона радиоактивного распада.

Число распавшихся ядер равно

$$N_1 = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Поскольку

$$\lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt},$$

то постоянная распада есть относительная убыль числа нераспавшихся ядер в единицу времени.

Промежуток времени, за который распадается половина первоначального количества ядер, называется периодом полураспада T . В этом случае

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,69}{\lambda}.$$

Период полураспада изменяется в очень широких пределах: $3 \cdot 10^{-7} \text{ с} \leq T_{1/2} \leq 5 \cdot 10^5 \text{ лет}$. Период полураспада плутония ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ $T_{1/2} \approx 90$.

Интенсивность радиоактивного распада характеризуется активностью A нуклида. Это физическая величина, равная отношению числа ΔN_1 распавшихся ядер ко времени Δt , за которое произошел распад:

$$A = \frac{\Delta N_1}{\Delta t}.$$

Единицей измерения активности в СИ является беккерель (Бк) в честь французского физика Беккереля, обнаружившего в 1896 году радиоактивное излучение. 1 Бк – это активность нуклида, при котором за 1 с происхо-

дит один распад ядра. Существует внесистемная единица кюри (Ки): $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$.

Воздействие ионизирующего излучения на вещество и биологические объекты характеризуется дозой ионизирующего излучения. Существуют три различных дозы.

1. Поглощенная доза излучения – физическая величина, равная отношению энергии излучения, поглощенной веществом, к массе облучаемого вещества.

Единица поглощенной дозы излучения – грей (Гр) в честь английского физика Грея. 1 Гр – доза излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия любого ионизирующего излучения величиной 1 Дж.

2. Экспозиционная доза излучения – доза рентгеновского и γ -излучений, определяемая по ионизации воздуха. Это физическая величина, равная отношению суммы электрических зарядов всех ионов одного знака, созданных в облученном воздухе, к массе этого воздуха. Единица экспозиционной дозы излучения в СИ – кулон на килограмм; внесистемной является рентген (Р): $1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$. Мощность экспозиционной дозы излучения – это величина, равная отношению дозы излучения ко времени излучения. Единица измерения – микрорентген (мкР) в час. Безопасной для человека является мощность дозы до 20 мкР/час.

3. Эквивалентная доза излучения. При облучении живых организмов, в частности человека, возникают биологические эффекты, величина которых при одной и той же поглощенной дозе различна для разных видов излучения (α -, β -, γ -). Принято сравнивать биологические эффекты, вызываемые любыми ионизирующими излучениями, с эффектами от рентгеновского и γ -излучений. Наименование единицы эквивалентной дозы излучения – зиверт (Зв) в честь шведского радиобиолога Зиверта: $1 \text{ Зв} = 1 \text{ Дж/кг}$. Внесистемная единица эквивалентной дозы излучения – бэр (биологический эквивалент рентгена): $1 \text{ бэр} = 0,01 \text{ Дж/кг}$. Эквивалентная доза излучения величиной 4...5 Зв, полученная человеком за 5 мин является смертельной. Однако такая же доза, полученная в течении всей жизни, не приводит к ухудшению здоровья. Безопасной для человека мощность дозы до 0,5 мкЗв/час.

§ 95. Фундаментальные взаимодействия.

Природа ядерных сил

В природе, по современным представлениям, имеется четыре типа фундаментальных взаимодействий элементарных частиц. Это (в порядке возрастания интенсивности) гравитационное, слабое, электромагнитное, сильное взаимодействия. О силе взаимодействия можно судить по скоро-

сти протекания процессов, которые оно вызывает. Обычно сравнивают между собой скорости процессов при энергиях 1 ГэВ, которые характерны для физики элементарных частиц. При таких энергиях процесс, обусловленный сильным взаимодействием, происходит за время $\sim 10^{-24}$ с, электромагнитный процесс за время $\sim 10^{-21}$ с, слабое взаимодействие за время $\sim 10^{-10}$ с, что считается очень медленным в физике элементарных частиц. Слабое взаимодействие обладает настолько малым радиусом действия, что он до сих пор не измерен. Его ожидаемая величина $\sim 2 \cdot 10^{-18}$ м. В то же время гравитационное взаимодействие, как и электромагнитное, имеет бесконечно большой радиус действия. Однако, несмотря на малую величину и короткодействие, слабое взаимодействие играет очень важную роль в природе. В результате этого взаимодействия происходит процесс превращения протона в нейтрон, позитрон и нейтрино, в результате которого четыре протона превращаются в ядро гелия. Этот же процесс служит источником энергии Солнца и большинства звезд. Нейтрино – нейтральная элементарная частица, имеет спин $1/2$ $m_0 = 0$.

Гравитационное взаимодействие элементарных частиц – наиболее слабое из всех известных фундаментальных взаимодействий. Например, гравитационное взаимодействие двух протонов на расстоянии 10^{-13} см (радиус ядра) составляет 10^{-38} МэВ, что в 10^{36} раз меньше их электростатического (кулоновского) взаимодействия на том же расстоянии. Из-за малости масс элементарных частиц оно пренебрежимо мало и в физических процессах микромира не учитывается.

Огромная энергия связи нуклонов в ядре свидетельствует о том, что между нуклонами имеется интенсивное взаимодействие. Это взаимодействие проявляется как силы притяжения, значительно превышающие кулоновские силы отталкивания между протонами. Ядерное взаимодействие получило название сильного, а силы взаимодействия называются ядерными. Экспериментальными исследованиями доказано, что ядерные силы намного превышают гравитационные, электрические и магнитные силы.

Особенностями ядерных сил являются следующие:

1) ядерные силы притяжения являются короткодействующими – их действие проявляется на расстояниях примерно 10^{-15} м. При увеличении расстояния между нуклонами ядерные силы быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших указанной величины, резко возрастают;

2) ядерные силы обладают зарядовой независимостью. Это означает, что ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или между протоном и нейтроном одинаковы по величине. Таким образом, ядерные силы имеют неэлектрическую природу;

3) ядерным силам свойственно насыщение: каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов;

4) ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтерий ${}^2_1\text{H}$ только при условии параллельной ориентации их спинов.

По современным представлениям сильное взаимодействие микрочастиц обусловлено тем, что нуклоны обмениваются виртуальными микрочастицами, получившими название мезонов.

В квантовой механике виртуальными (от лат. virtualis – возможный) называются частицы, которые не могут быть обнаружены за время их существования. Понять смысл термина виртуальный можно следующим образом. Рассмотрим покоящийся электрон, создающий в окружающем его пространстве электромагнитное поле в соответствии с уравнением:

$$e^- \leftrightarrow e^- + \hbar\omega.$$

Суммарная энергия фотона и электрона больше, чем энергия покоящегося электрона. Казалось бы, что указанное превращение противоречит закону сохранения энергии, однако для виртуального фотона это нарушение является кажущимся. В соответствии с соотношением неопределенностей Гейзенберга, которое для энергии и времени выглядит следующим образом:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

энергия E системы может испытывать отклонения ΔE , длительность Δt которых соответствует указанному соотношению. Таким образом, если излученный электроном фотон, обладающий энергией $\varepsilon = \hbar\omega$, будет поглощен этим же или другим электроном до истечения времени $\Delta t = \hbar/\varepsilon$, то нарушение закона сохранения энергии не может быть обнаружено. За время Δt виртуальный фотон может передать взаимодействие между точками, разделенными расстоянием $\ell = c\Delta t = c\hbar/\varepsilon = 0,7 \cdot 10^{-15}$ м.

Энергия фотона ε может быть весьма малой, так как $0 \leq \omega \leq \infty$. Поэтому радиус действия электромагнитных сил является неограниченным. Указанная возможность объясняется тем, что масса покоя фотона равна нулю. Если бы частицы, которыми обмениваются взаимодействующие электроны, имели отличную от нуля массу покоя, то радиус действия соответствующих сил был бы ограничен величиной

$$r = c\Delta t_{\max} = c \frac{\hbar}{\varepsilon_{\min}} = c \frac{\hbar}{m_0 c^2} = 3,9 \cdot 10^{-13} \text{ м (для электронов).}$$

$$\text{Для фотона же при } m_0 = 0 \quad r = c \frac{\pi}{m_0 c^2} \rightarrow \infty.$$

Квантовая электродинамика представляет электромагнитное поле как совокупность фотонов, и процесс взаимодействия двух заряженных частиц, например, электронов, заключается в непрерывном обмене фотонами. Каждая частица создает вокруг себя поле, непрерывно излучая и поглощая фотоны. Действие поля на другую частицу проявляется в результате поглощения этой частицей одного из фотонов, излученных первой частицей.

В 1934 году российский физик И.Е. Тамм высказал предположение, что взаимодействие между нуклонами так же осуществляется посредством каких-то виртуальных микрочастиц. К тому времени, кроме протонов и нейтронов, были известны фотон, электрон, позитрон и нейтрино. Для самой тяжелой из них частицы – электрона – радиус действия составляет $3,9 \cdot 10^{-13}$ м, что в 200 раз превышает радиус действия ядерных сил.

В 1935 году японский физик Юкава высказал гипотезу о том, что в природе существуют пока не обнаруженные частицы массой в 200 ... 300 раз большей массы электрона, и что эти частицы и выполняют роль переносчиков ядерного взаимодействия, подобно тому, как фотоны являются переносчиками электромагнитного взаимодействия. Так как по массе эти частицы занимают промежуточное положение между электронами и нуклонами, они впоследствии были названы мезонами (от греч. mesos – средний).

В 1936 году в составе космических лучей были обнаружены частицы, масса покоя которых составляла $207 m_e$. Они получили название μ -мезонов, однако являться носителями ядерного взаимодействия не могли, так как, как выяснилось, слабо взаимодействуют с нуклонами. Впоследствии они получили название мюонов.

В 1947 году в космическом излучении были открыты π -мезоны, которые и оказались носителями ядерных сил. В настоящее время эти частицы называются пионами. Установлено, что существует положительный π^+ , отрицательный π^- и нейтральный пион. Масса положительных и отрицательных пионов одинакова и составляет $273 m_e$, время жизни – $2,6 \cdot 10^{-8}$ с. Спин всех трех микрочастиц равен нулю, они нестабильны и распадаются по схеме:

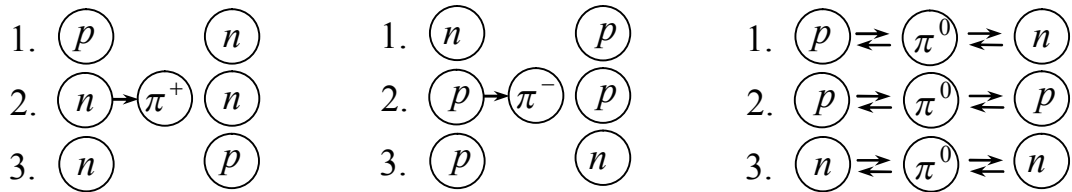
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}; \quad \pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma,$$

где μ^+ и μ^- – положительный и отрицательный мюоны; ν – нейтрино, $\bar{\nu}$ – антинейтрино, γ – гамма – квант.

В процессе обменного взаимодействия между нуклонами имеют место виртуальные процессы:

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow n + \pi^+, & p &\leftrightarrow p + \pi^0, \\ n &\leftrightarrow p + \pi^-, & n &\leftrightarrow n + \pi^0. \end{aligned}$$

В результате этих процессов нуклон окружен облаком виртуальных пионов, которые образуют поля ядерных сил. Схематически эти процессы



можно изобразить следующим образом

С помощью символов элементарных частиц указанные превращения можно записать так:

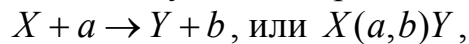
1. $p + n \leftrightarrow n + \pi^+ + n \leftrightarrow n + p$
2. $n + p \leftrightarrow p + \pi^- + p \leftrightarrow p + n$
3. $p + n \leftrightarrow n + \pi^0 + n \leftrightarrow p + n$ и так далее.

В этой серии второе превращение интересно тем, что объясняет наличие спина у электронейтрального нейтрона.

§ 96. Ядерные реакции

Ядерной реакцией называется процесс превращения атомных ядер при их взаимодействии с элементарными частицами (в том числе и с γ -квантами) или друг с другом.

Наиболее распространенным видом ядерной реакции является реакция, записываемая символически следующим образом

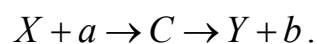


где X , Y – исходное и конечное ядра, a – частица, взаимодействующая с исходным ядром, b – частица, образующаяся в результате реакции.

Любая ядерная реакция подчиняется закону сохранения электрических зарядов и закону сохранения массовых чисел. Согласно последнему, сумма массовых чисел ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме массовых чисел продуктов реакции. Кроме того, ядерные реакции подчиняются законам сохранения энергии, импульса и момента импульса.

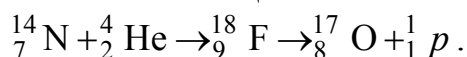
Ядерные реакции могут сопровождаться как выделением, так и поглощением энергии. Количество выделяющейся энергии называется тепловым эффектом ΔE , который определяется как разность масс покоя ядер и частиц, участвующих в реакции, до и после реакции, выраженных в энергетических единицах ($\times c^2$). Если $\Delta E > 0$ – реакция называется экзотермической, если $\Delta E < 0$ – эндотермической.

В 1936 году Бор предположил, что ядерные реакции протекают в две стадии по следующей схеме:



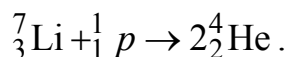
Первая стадия – это захват ядром X частицы a , приблизившейся к нему на расстояние действия ядерных сил (примерно $2 \cdot 10^{-15}$ м), и образование промежуточного ядра C , называемого составным ядром. Энергия поглощенной ядром частицы быстро распределяется между нуклонами составного ядра, в результате чего оно оказывается в возбужденном состоянии. При взаимодействии нуклонов составного ядра между собой один из нуклонов или их комбинация, например, α -частица, может получить энергию, достаточную для его вылета из ядра. В результате возможна вторая стадия ядерной реакции – распад составного ядра на ядро Y и частицу b . Время жизни составного ядра в $10^6 \dots 10^{10}$ раз превышает время, необходимое для преодоления частицей расстояния, равного диаметру ядра (10^{-15} м). Отсюда следует, что за время жизни составного ядра происходит очень много столкновений нуклонов между собой, приводящих к перераспределению энергии. Поэтому характер распада составного ядра не зависит от способа его образования.

Первая ядерная реакция была осуществлена в 1919 году Резерфордом при облучении азота потоком α -частиц:

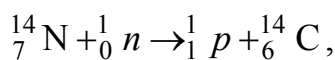


В этой реакции источником α -частиц являлся природный препарат ${}^{214}_{84}\text{Po}$.

Первая ядерная реакция, вызванная искусственно ускоренными частицами, была осуществлена в 1932 году английским физиком Кокрофтом, который, с помощью умножителя напряжения ускорял протоны до энергии 0,8 МэВ и наблюдал реакцию



Большое значение имеют реакции, вызываемые нейтронами. В отличие от заряженных частиц нейтроны не испытывают кулоновского отталкивания, вследствие чего они могут проникать в ядра, обладая малой энергией. Например, реакция



которая непрерывно протекает в атмосфере под действием нейтронов, входящих в состав космических лучей. Возникающий при этом углерод ${}^{14}_6\text{C}$ называется радиоуглеродом, так как он e^- – радиоактивен, т.е. при распаде излучает электроны; при этом период полураспада составляет 5600 лет. Радиоуглерод усваивается растениями при фотосинтезе и, таким образом, участвует в круговороте веществ в природе. Так как период полураспада радиоуглерода очень велик, устанавливается равновесная концентрация ядер ${}^{14}_6\text{C}$ в обычном углероде ${}^{12}_6\text{C}$. Исследования показали, что эта равновесная концентрация в различных местах земного шара одинакова и соответствует активности нуклида, равной 14 Бк на 1 г углерода. Пока органи-

ческое вещество живет, убыль в нем радиоуглерода, обусловленная радиоактивным распадом, восполняется за счет круговорота веществ в природе. В момент смерти организма прекращается обмен веществ в нем и концентрация радиоуглерода начинает убывать по закону радиоактивного распада. Таким образом, определив концентрацию радиоуглерода в останках организмов, можно определить дату их смерти.

§ 97. Деление ядер

В 1938 году немецкие физики Ган и Штрассман обнаружили, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы – барий и лантан. Объяснение этого явления дали австрийский физик Мейтнер и английский физик Фриш. Они предположили, что захватившее нейтрон ядро урана делится на две примерно равные части, получившие название осколков деления.

Дальнейшие исследования показали, что деление ядра урана может происходить разными путями. Всего может образоваться около 80 различных осколков, причем наиболее вероятным является деление на осколки, массы которых относятся как 2:3.

На рис. 186 представлена зависимость от массового числа относительного выхода осколков различной массы, возникающих при делении $^{235}_{92}\text{U}$ медленными или тепловыми нейтронами (энергия до 0,5 эВ). Медленными называются нейтроны, находящиеся в тепловом равновесии с атомами вещества. Они эффективны для возбуждения ядерных реакций, так как относительно долго находятся вблизи атомного ядра. Благодаря этому вероятность захвата нейтрона ядром становится довольно большой.

Выход, %

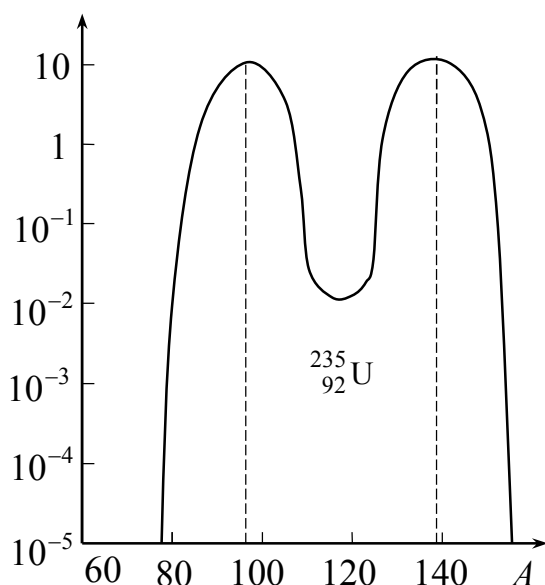


Рис. 171. Зависимость выходов осколков различной массы от массового числа

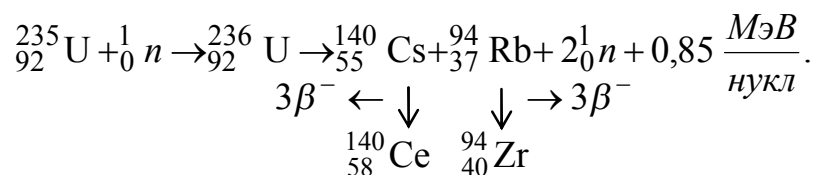
Они эффективны для возбуждения ядерных реакций, так как относительно долго находятся вблизи атомного ядра. Благодаря этому вероятность захвата нейтрона ядром становится довольно большой.

Как следует из рис. 171 относительное число актов деления ядер урана, при которых образуется два осколка равной массы ($A \cong 117$), составляет $10^{-2}\%$, в то время как образование осколков с массовыми числами 95 и 140 ($95:140 \cong 2:3$) наблюдается в 7% случаев.

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, для ядер средней массы значительно больше, чем у тяжелых ядер. Отсюда следует, что деление ядер должно сопровождаться

выделением большого количества энергии.

Кроме того, замечательной особенностью деления ядер является то, что оно сопровождается излучением двух или трех вторичных нейтронов. Так как для средних ядер число нейтронов примерно равно числу протонов ($N/Z \cong 1$), а для тяжелых ядер число нейтронов значительно превышает число протонов ($N/Z \cong 1,6$), то образовавшиеся осколки деления перегружены нейтронами, в результате чего они и выделяют вторичные нейтроны. Большинство нейтронов излучается мгновенно (10^{-14} с). Некоторая часть (0,75%) нейтронов, получивших название запаздывающих, излучается позже на 3...60 с. В среднем на каждое деление ядра приходится 2,5 выделившихся нейтронов. Осколки деления, будучи перегружены нейтронами, испытывают превращение одного из нейтронов в протон с одновременным образованием электрона и антинейтрино. Например,



В этой схеме Ce и Zr являются стабильными изотопами.

Кроме урана, при облучении нейтронами делятся также ${}_{90}\text{Th}$, протактиний ${}_{91}\text{Pa}$ и плутоний ${}_{94}\text{Pu}$. Ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ и ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ делятся нейтронами любых энергий, но особенно хорошо медленными нейтронами. В природе имеются три изотопа, которые могут служить ядерным топливом или сырьем для его получения. Это ${}_{92}^{235}\text{U}$, которого в естественном уране содержится примерно 0,7%, а также ${}_{90}^{232}\text{Th}$ и ${}_{92}^{238}\text{U}$, которых в естественном уране содержится примерно 99,3%. Природные изотопы делятся только быстрыми нейтронами, энергия которых превышает 10 МэВ.

Возникновение нескольких нейтронов при делении ядер ${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ и ${}_{92}^{233}\text{U}$ делают возможным осуществление цепной ядерной реакции. В самом деле, испущенные при делении одного ядра Z нейтронов могут вызвать деление Z ядер, в результате чего будет излучено Z^2 новых ядер и т.д. Таким образом, число нейтронов, появляющихся в каждом поколении, нарастает в геометрической прогрессии. Нейтроны, излучаемые при делении ядер ${}_{92}^{235}\text{U}$, имеют в среднем энергию ~ 2 МэВ, что соответствует скорости $2 \cdot 10^7$ м/с. Поэтому время, протекающее между появлением нейтрона и захватом его ядром, очень мало, так что процесс размножения нейтронов в делящемся веществе протекает весьма быстро.

В реальных условиях из-за конечных размеров делящегося тела и большой проникающей способности нейтронов многие из них покинут зону реакции прежде, чем будут захвачены каким-либо ядром и вызовут его

деление. Кроме того, часть нейтронов поглотятся неделящимися ядрами примесей. Однако, относительная доля вылетающих за пределы вещества нейтронов уменьшается с увеличением массы делящегося вещества, поэтому при некоторой массе, называемой критической и сосредоточенной в пределах соответствующих критических размеров, возможно развитие цепной реакции деления.

Цепные реакции делятся на управляемые и неуправляемые. Неуправляемой реакцией, например, является взрыв атомной бомбы, которая содержит выделенные из природного урана изотопы ${}_{92}^{235}\text{U}$ или ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, критическая масса для которых по расчетам Гейзенберга составляет 9 кг. Чтобы атомная бомба не взорвалась при хранении, в ней делящийся изотоп делится на две удаленные друг от друга части с массами ниже критических. Затем, с помощью обычного порохового взрыва эти части сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической и за счет нейтронов космических лучей или спонтанного деления ядер возникает взрывная цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением гигантского количества различных видов энергии, которым соответствуют различные поражающие факторы. При этом успевает прореагировать только часть ядерного заряда.

Непосредственные измерения значения выделяющейся энергии при делении ядер урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ дали величину ~ 200 МэВ, причём большая часть этой энергии (~ 68 МэВ) приходится на кинетическую энергию осколков деления. Выделяющаяся при делении ядер энергия имеет электростатическое, а не ядерное происхождение, так как ядерные силы притяжения прекращают своё действие на расстоянии $\sim 10^{-15}$ м. Большая кинетическая энергия, которую имеют осколки, возникает в следствии их кулоновского отталкивания. Осколки разлетаются со скоростью, равной $\sim 10^7$ м/с.

К поражающим факторам относятся ударная волна, возникающая вследствие ударов осколков по молекулам воздуха, световое излучение, проникающая радиация, радиационное заражение местности и электромагнитный импульс.

Управляемая цепная реакция реализуется в ядерных реакторах. Пуск первого реактора в мире осуществлен в 1942 году под руководством Ферми в Чикагском университете, а в Европе в 1946 году И.В. Курчатовым в Институте атомной энергии.

В активной зоне реактора на медленных нейтронах расположены тепловыделяющие элементы (твэлы) и замедлитель, в котором нейтроны замедляются до энергий ~ 1 МэВ. Замедлителем, как правило, является графит. Твэлы представляют собой блоки цилиндрической формы из делящегося материала, заключенные в герметическую оболочку, слабо поглощающую нейтроны. Кинетическая энергия осколков деления передаётся при ударах оболочкам твелов, в результате они разогреваются и выделяемое

ими полезное тепло переходит в поток теплоносителя, который образует первый контур охлаждения, причем теплоносителем является расплавленный щелочной металл. Активная зона окружается отражателем, уменьшающим утечку нейтронов.

Управление цепной реакцией осуществляется с помощью стержней из материалов, сильно поглощающих нейтроны (например, Cd, В). Параметры реактора рассчитываются так, что при полностью вставленных стержнях реакция заведомо не идет, при постепенном изъятии стержней из активной зоны число нейтронов возрастает и возникает цепная реакция. По мере работы реактора количество делящегося материала в активной зоне уменьшается и происходит ее заполнение осколками деления, среди которых имеются сильные поглотители нейтронов. Чтобы реакция не прекратилась, из активной зоны с помощью автоматического устройства постепенно извлекаются управляющие стержни. Когда ядерное топливо выгорает, реакция прекращается. Для нового запуска реактора отработавшее ядерное топливо извлекают и загружают новое. В реакторе имеются также и аварийные стержни, введение которых при внезапном увеличении интенсивности реакции немедленно ее обрывает.

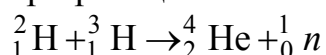
Ядерный реактор является мощным источником проникающей радиации (нейтроны, γ -излучение), которая примерно в 10^{11} раз превышает санитарные нормы. Поэтому любой реактор имеет биологическую защиту – систему экранов из защитных материалов (например, свинец, бетон, вода), располагающуюся за его отражателем.

Первый контур охлаждения передает тепло второму контуру охлаждения, в котором вода превращается в пар, энергия которого используется, например, для вращения турбины электрогенератора.

Первая в мире атомная электростанция мощностью 5 МВт была построена в 1954 году под руководством И.В. Курчатова в Обнинске.

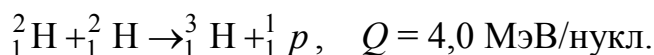
§ 98. Термоядерные реакции

Зависимость удельной энергии связи от массового числа указывает на еще один источник получения энергии в результате синтеза легких ядер. Реакции синтеза атомных ядер обладают той особенностью, что в них энергия, выделяемая на один нуклон, в несколько раз превышает аналогичную величину для реакции деления. Например, если при делении ядра $^{238}_{92}\text{U}$ выделяется энергии примерно 200 МэВ, что составляет на один нуклон примерно 0,84 МэВ, то при реакции синтеза



эта величина равна $17,6/5 \cong 3,5$ МэВ/нукл.

Произведем оценку температуры протекания реакции синтеза ядер дейтерия:



Для соединения ядер дейтерия их необходимо сблизить до расстояния $2 \cdot 10^{-15}$ м, равного радиусу действия ядерных сил, преодолевая при этом кулоновские силы отталкивания, что соответствует потенциальной энергии

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \cong 0,7 \text{ МэВ.}$$

При этом на долю каждого ядра приходится энергия 0,35 МэВ, что соответствует температуре $2,6 \cdot 10^9$ К. Эту температуру можно вычислить, считая «ядерный» газ идеальным и используя законы идеальных газов. Полученная величина на два порядка превышает температуру центральных областей Солнца, равную $1,3 \cdot 10^7$ К. Однако синтез атомных ядер возможен при меньшей средней температуре порядка 10^7 К за счет распределения ядер по скоростям и энергиям, так как при этой температуре любое вещество представляет собой плазму, поведение частиц которой описывается распределением Максвелла. В соответствии с этим распределением в зоне реакции всегда существуют ядра, энергия которых в 100 раз превышает энергии., соответствующую температуре 10^7 К.

Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах, называются термоядерными реакциями.

Наиболее легко осуществляется реакция синтеза ядер дейтерия ${}^2_1\text{H}$ и трития ${}^3_1\text{H}$. Именно эти вещества образуют заряд водородной (или термоядерной) бомбы, а запалом является атомная бомба, при взрыве которой возникает необходимая для протекания термоядерной реакции высокая температура. Впервые искусственная неуправляемая термоядерная реакция в виде взрыва термоядерной бомбы была осуществлена в СССР в 1953 году.

Выделяющаяся при термоядерной реакции энергия представляет собой кинетическую энергию α – частиц, которая может достигать ~ 2 МэВ на частицу и приводит к созданию известных поражающих факторов.

Термоядерные реакции являются источниками энергии Солнца и звезд. Возможны два варианта протекания реакции: 1) протонно-протонный, или водородный цикл; 2) углеродно-азотный цикл.

Для осуществления управляемой термоядерной реакции необходимо создание и поддержание в ограниченном объеме температуры порядка 10^8 К. На сегодняшний день эта задача не решена

* * *

В создании ракетно-ядерной оборонительной системы нашей Родины выдающуюся роль создали ученые Челябинского политехнического инсти-

тута (ныне ЮУрГУ) Николай Леонидович Духов и Виктор Петрович Макеев.

Н.Л. Духов (1904–1964) – один из основателей Южно-Уральского государственного университета, создатель автотракторного факультета, первый заведующий первой в ЧПИ кафедры «Танки». Трижды Герой социалистического труда, член-корреспондент АН СССР, генерал-лейтенант инженерно-технической службы. Лауреат Ленинской и пяти Государственных премий СССР. Главный конструктор тяжелых танков производства Кировского завода (ЧТЗ), где впервые в мире организовал конвейерное производство танков. Выдающийся конструктор ядерных и термоядерных боеприпасов для ракет всех видов, авиабомб и других носителей.

В.П. Макеев (1924–1985) – создатель аэрокосмического факультета ЧПИ (ЮУрГУ), первый заведующий кафедрой «Летательные аппараты» нашего университета. Дважды Герой социалистического труда, академик АН СССР. Лауреат Ленинской и трех Государственных премий СССР. Генеральный конструктор КБ Машиностроения (г. Миасс, ныне ГРЦ им. академика В.П. Макеева). Выдающийся конструктор межконтинентальных ядерных баллистических ракет морского базирования (БРПЛ).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Записать закон Ампера.
2. Записать закон Био-Савара-Лапласа и построить векторную диаграмму.
3. Что называется магнитным моментом?
4. Сформулировать закон полного тока.
5. Записать формулу для вычисления работы по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.
6. Почему сила Лоренца не совершает работы?
7. Записать закон электромагнитной индукции и пояснить рисунком знак э.д.с. индукции.
8. Что такое индуктивность проводящего контура?
9. Как вычисляется энергия магнитного поля?
10. Что такое намагниченность вещества?
11. Какие вещества называются ферромагнетиками?
12. Записать уравнение плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны.
13. Что такое интерференция света?
14. Дать определение оптической разности хода двух световых волн.
15. Чему равна оптическая разность хода световых волн, отражённых от пластины?

16. Что называется дифракцией света?
17. Сформулировать принцип Гюйгенса-Френеля.
18. Записать условия главных максимумов и минимумов при дифракции света на одной щели и на дифракционной решётке.
19. Дать определение поляризации света.
20. Записать закон Малюса.
21. Записать закон Брюстера.
22. Что называется энергетической светимостью тела?
23. Какие тела называют абсолютно чёрными?
24. Записать закон Стефана-Больцмана и первый закон Вина.
25. Что называется внешним фотоэффектом?
26. Изобразить вольт-амперную характеристика внешнего фотоэффекта.
27. Написать формулу Эйнштейна для фотоэффекта.
28. Написать соотношения де Бройля.
29. Написать соотношения неопределённостей для координаты и импульса микрочастицы.
30. Написать соотношения неопределённостей для энергии микрочастицы и времени.
31. Записать закон радиоактивного распада.
32. Что называется периодом полураспада?
33. Каков физический смысл постоянной распада?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуревич, С.Ю. Физика для бакалавров: учебное пособие для самостоятельной работы студентов / С.Ю. Гуревич – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – Ч. I. – 162 с.
2. Гуревич, С.Ю. Физика для бакалавров: учебное пособие для самостоятельной работы студентов / С.Ю. Гуревич – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – Ч. II. – 221 с.
3. Трофимова, Т.И. Курс физики: Учебник для студентов вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 2001. – 405 с.
4. Савельев, И.В. Курс общей физики в 3-х томах / И.В. Савельев. – М.: Наука, 2007. – 128 с.
5. Трофимова, Т.И., Павлова, З.Т. Сборник задач по курсу физике с решениями . Учебное пособие для вузов. – М.:Высш. шк., 1999. – 591 с.
6. Гуревич, С.Ю. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие по выполнению лабораторных работ / С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев, Е.Л. Шахин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. – 110 с.
7. Шульгинов, А.А. Электричество и магнетизм: учебное пособие для выполнения лабораторных работ / А.А. Шульгинов, Ю.В. Петров, Д.Г. Кожевников, под ред. А.А. Шульгинова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 132 с.
8. Андрианов, Б.А. Оптика и ядерная физика: учебное пособие для выполнения лабораторных работ / Б.А. Андрианов, В.Ф. Подзерко, А.С. Соболевский – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 82 с.
9. Общая физика: рабочая программа и контрольные задания для студентов заочного инженерно-экономического факультета / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Д.Г. Клещев – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 114 с.
10. Пяткин, В.А. Генеральный конструктор В.П. Макеев / В.А. Пяткин. –Челябинск: ОАО «Юж.-Урал. кн. изд-во», 2004. – 390 с.
11. Конструктор Н.Л. Духов и его школа. – Челябинск: ОАО «Юж.-Урал. кн. изд-во», 2004. – 448 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Тема 14. Магнитное поле в вакууме

§ 1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции.....	3
§ 2. Закон Ампера.....	4
§ 3. Закон Био–Савара–Лапласа.....	6
§ 4. Магнитное поле прямолинейного проводника с током.....	8
§ 5. Взаимодействие прямолинейных проводников с током.....	9
§ 6. Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент.....	11
§ 7. Закон полного тока.....	12
§ 8. Магнитное поле соленоида.....	16
§ 9. Контур с током в магнитном поле.....	18
§ 10. Магнитный поток.....	20
§ 11. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле.....	21
§ 12. Сила Лоренца.....	23
§ 13. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.....	25

Тема 15. Электромагнитное поле

§ 14. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея.....	27
§ 15. Электромагнитная индукция в движущемся проводнике.....	30
§ 16. Э.д.с. индукции в проводящем контуре, вращающемся в магнитном поле.....	31
§ 17. Магнитный поток самоиндукции. Индуктивность проводящего контура.....	32
§ 18. Явление самоиндукции.....	34
§ 19. Ток при замыкании и размыкании электрической цепи, содержащей L и R	36
§ 20. Энергия магнитного поля.....	37
§ 21. Основы теории Максвелла электромагнитного поля. Первое уравнение Максвелла.....	38
§ 22. Второе уравнение Максвелла. Ток смещения.....	40

Глава VII. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 23. Магнитные моменты электронов и атомов.....	44
§ 24. Диа- и парамагнетики.....	46
§ 25. Намагниченность. Магнитная индукция в веществе.....	48
§ 26. Ферромагнетики. Природа ферромагнетизма.....	51

Глава VIII. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Тема 16. Электромагнитные колебания

§ 27. Свободные затухающие электромагнитные колебания. Колеба-	
--	--

тельный контур.	56
§ 28. Вынужденные электромагнитные колебания.....	60
§ 29. Электрический резонанс напряжений.....	62
§ 30. Превращения энергии в колебательном контуре.....	64

Тема 17. Электромагнитные волны

§ 31. Уравнение электромагнитной волны. Опыты Герца.....	66
§ 32. Свойства электромагнитной волны.....	69
§ 33. Энергия электромагнитных волн. Вектор Умова–Пойнтинга.....	71
§ 34. Излучение электромагнитного диполя.....	74

Глава IX. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 35. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности. Постулаты Эйнштейна.....	78
§ 36. Преобразования Лоренца.....	80
§ 37. Следствия из преобразований Лоренца.....	84
§ 38. Релятивистский закон сложения скоростей.....	86
§ 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки и закон взаимосвязи массы и энергии.....	87

Глава X. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Тема 18. Интерференция света

§ 40. Основные законы оптики. Принцип Ферма.....	91
§ 41. Интерференция света. Условия интерференционных максимумов и минимумов.....	94
§ 42. Интерференционная картина от двух источников.....	97
§ 43. Интерференция света в тонких пленках. Кольца Ньютона.....	99

Тема 19. Дифракция света

§ 44. Дифракция света. Принцип Гюйгенса–Френеля.....	101
§ 45. Метод зон Френеля.....	103
§ 46. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске.....	104
§ 47. Дифракция Фраунгофера на одной щели.....	105
§ 48. Дифракционная решетка.....	107
§ 49. Дифракция рентгеновских лучей.....	110

Тема 20. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

§ 50. Дисперсия света.....	112
§ 51. Электронная теория дисперсии света.....	113
§ 52. Поглощение света.....	116
§ 53. Излучение Вавилова–Черенкова.....	117

Тема 21. Поляризация света

§ 54. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса.....	118
§ 55. Поляризация света при отражении и преломлении.....	120

§ 56. Двойное лучепреломление.....	122
§ 57. Искусственная оптическая анизотропия. Вращение плоскости поляризации.....	124
Тема 22. Квантовая природа излучения	
§ 58. Тепловое излучение и его характеристики.....	126
§ 59. Закон Кирхгофа.....	130
§ 60. Закон Стефана–Больцмана. Закон Вина.....	132
§ 61. Формулы Рэлея–Джинса.....	133
§ 62. Квантовая гипотеза и формула Планка.....	134
§ 63. Оптическая пирометрия.....	136
§ 64. Внешний фотоэффект и его законы.....	138
§ 65. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.....	141
§ 66. Внутренний и вентильный фотоэффекты.....	143
§ 67. Масса и импульс фотона. Давление света.....	144
§ 68. Эффект Комптона.....	148
§ 69. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения	151

Глава XI. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ ВЕЩЕСТВА

Тема 23. Элементы атомной физики

§ 70. Закономерности в спектре атома водорода.....	153
§ 71. Опыты Резерфорда. Модели атома.....	154
§ 72. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца.....	156
§ 73. Теория Бора строения атома водорода.....	158

Тема 24. Основы квантовой механики

§ 74. Гипотеза де Бройля. Волновые свойства вещества.....	160
§ 75. Соотношение неопределенностей.....	161
§ 76. Уравнение Шредингера.....	166
§ 77. Свойства волновой функции. Квантование энергии и импульса.....	168
§ 78. Микрочастица в потенциальной «яме».....	169
§ 79. Квантово-механическая модель атома водорода.....	174
§ 80. Основное состояние электрона в атоме водорода.....	177
§ 81. Спин электрона и спиновое квантовое число.....	179
§ 82. Распределение электронов в атоме по энергетическим уровням. Таблица Д.И. Менделеева.....	180
§ 83. Квантово-механическая модель молекулы.....	183
§ 84. Спонтанное и вынужденное излучения энергии атомами.....	185
§ 85. Оптические квантовые генераторы.....	187

Тема 25. Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

§ 86. Понятие о квантовой статистике. Функция распределения.....	191
§ 87. Распределение электронов проводимости в металле по энергиям. Энергетические зоны в кристаллах.....	194

§ 88. Собственная проводимость полупроводников.....	199
§ 89. Примесная проводимость полупроводников.....	202
§ 90. Контакт электронного и дырочного полупроводников.....	206
§ 91. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы).....	210

Глава XII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 92. Состав и характеристики атомного ядра.....	212
§ 93. Масса и энергия связи ядра.....	213
§ 94. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада.....	215
§ 95. Фундаментальные взаимодействия. Природа ядерных сил.....	217
§ 96. Ядерные реакции.....	221
§ 97. Деление ядер.....	223
§ 98. Термоядерные реакции.....	226

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	228
--------------------------------------	------------

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	230
--------------------------------------	------------