

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра физической электроники

53(07)
Г951

С.Ю. Гуревич

**КРАТКИЙ
КУРС
ФИЗИКИ**

Учебное пособие

Часть I

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2018

УДК 53(075.8)
Г951

*Одобрено
учебно-методической комиссией физического факультета*

Рецензенты:

д.ф-м.н., проф. Бучельников В.Д., д.ф-м.н., проф. Песин Л.А.

Гуревич, С.Ю.

Г951 Краткий курс физики: учебное пособие / С.Ю. Гуревич – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – Ч. I. – 183 с.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по технологическим и техническим направлениям подготовки бакалавров и специалистов. Дисциплина «Физика» входит в федеральный компонент цикла общих математических и естественно-научных дисциплин в государственных образовательных стандартах ФГОС 3+. Материал пособия ориентирован на курс физики объемом 420–430 часов, или 12 зачётных единиц, при этом объём самостоятельной работы студентов должен составлять 210–220 часов. Содержание пособия соответствует «Примерным программам дисциплины «Физика», утвержденным НМС по физике Минобрнауки РФ 11.02.2009. Приступая к изучению дисциплины «Физика» студент должен знать физику в рамках программы средней школы.

Физика создает универсальную базу для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре, аспирантуре. В пособии в краткой форме изложены основные принципы и положения курса физики, необходимые будущему бакалавру и специалисту для самостоятельной конструкторской, технологической и организационной работы. Физика является предшествующей дисциплиной при изучении курсов «Теоретическая механика», «Термодинамика», «Сопrotивление материалов», «Электротехника и электроника» и др.

УДК 53(075.8)

© Гуревич С.Ю., 2018

© Издательский центр ЮУрГУ, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Физика (от греч. *physis* – природа) – это наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения.

Известны два вида материи: вещество и поле. К первому виду материи – веществу – относятся, например, атомы, молекулы и все образованные из них тела, т.е. вещество – это вид материи, обладающей массой покоя. Второй вид материи образуют гравитационные, электромагнитные и другие поля. Различные виды материи могут превращаться друг в друга.

Материя находится в непрерывном движении, под которым в философии понимается всякое изменение вообще. Движение представляет собой неотъемлемое свойство материи, которое несотворимо и неуничтожимо, как и сама материя. Материя существует и движется в пространстве и во времени, которые являются формами бытия материи.

Пространство выражает порядок сосуществования отдельных объектов, время – порядок смены явлений. Пространство и время – основные понятия всех разделов физики. Они играют главную роль на опытном уровне физического познания, а именно – непосредственное содержание результатов наблюдений и экспериментов состоит в фиксации пространственно – временных совпадений. В то же время пространство и время служат одним из важнейших средств конструирования теоретических моделей, объясняющих экспериментальные результаты.

Основным методом исследования в физике является опыт, т.е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы. Гипотеза – это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность гипотезы проверяется посредством постановки эксперимента для выяснения согласия следствий, вытекающих из гипотезы, с результатами опытов и наблюдений. Успешно прошедшая такую проверку и доказанная гипотеза превращается в научный закон или теорию.

Физику подразделяют на классическую и квантовую. Классической называют физику, создание которой было завершено в начале XX столетия.

Начало классической физики было положено И. Ньютоном, сформулировавшим основные законы классической механики.

В начале XX века появились факты, не получившие объяснения в рамках классической механики:

- 1) неудача попыток создания теории излучения абсолютно черного тела;
- 2) неудачные попытки обнаружения эфира – гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн;
- 3) открытие электрона, чем было установлено сложное строение атома, считавшегося прежде неделимым.

В 1900 г. М. Планк решил задачу об излучении абсолютно черного тела, введя представление об излучении света отдельными порциями – квантами.

В 1905 г. А. Эйнштейн создал основы специальной теории относительности, которая дает уравнения движения, существенно отличающиеся от уравнений классической механики.

В 1913 г. Н. Бор развил теорию атома, наложив на движение электрона в атоме специальные квантовые ограничения.

В 1924 г. Л. де-Бройль сформулировал гипотезу о том, что частицы при определенных условиях должны проявлять волновые свойства.

В 1926–27 г.г. Э. Шредингер и В. Гейзенберг создали новую физическую теорию – волновую, или квантовую механику.

Роль физики в развитии техники сформулировал в свое время президент АН СССР С.И. Вавилов: «Физика – это техника завтрашнего дня».

В общих чертах роль курса общей физики в ВУЗе можно сформулировать так:

- 1) изучение физики имеет большое значение для формирования научного мировоззрения;
- 2) физика является фундаментальной базовой дисциплиной для большого числа общеинженерных и специальных дисциплин. Ее законы и методы исследования широко применяются в курсах сопротивления материалов, теплотехники, электротехники, радиотехники и т.д.

ГЛАВА I. МЕХАНИКА

Тема 1. Кинематика материальной точки

§1. Основные понятия и определения механики

Механика (от греч. *mechanike* – наука о машинах) – это раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи – механическая, заключающаяся в движении физических тел в пространстве и времени. Физическое тело – это любая ограниченная часть материи, обладающая массой покоя. Тот факт, что механические явления протекают в пространстве и во времени, находит свое отражение в любом механическом законе, содержащем явно или неявно пространственно-временные соотношения – расстояния и промежутки времени.

Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо иным телам. Это же относится и к движению тела, т.е. к изменению его положения с течением времени. Тело, или систему неподвижных относительно друг друга тел, которые служат для определения положения интересующего нас тела, называют телом отсчета.

Практически с телом отсчета связывают какую-нибудь систему координат, например прямоугольную (декартову). Координаты тела позволяют установить его положение в пространстве. Так как движение происходит не только в пространстве, но и во времени, то для описания движения необходимо отсчитывать также и время. Это делается с помощью часов различного типа.

Совокупность тела отсчета, связанной с ней системы координат и синхронизированных между собой часов образует так называемую систему отсчета. Понятие системы отсчета является фундаментальным в физике. Пространственно-временное описание движения тела при помощи расстояний и промежутков времени возможно только тогда, когда выбрана определенная система отсчета.

Опыт показывает, что, пока скорости тел малы по сравнению со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени остаются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой. Механику, изучающую движения тел именно в этих случаях, называют ньютонической (классической).

Реальные движения тел настолько сложны, что, изучая их, необходимо отвлекаться от несущественных деталей. С этой целью используют понятия (абстракции, идеализации), применимость которых зависит от конкретного характера интересующей задачи, а также от той погрешности, с которой

мы хотим получить результат. Среди этих понятий большую роль играют понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка (м.т.) – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, т.е. в отличие от геометрической точки материальная точка обладает массой.

Абсолютно твердое тело – это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Деформация (от лат. *deformatio* – искажение) – это изменение формы и размеров какого-либо объекта, возникшее в результате внешних воздействий или внутренних сил.

Основными задачами механики являются:

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения – законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения тела в каждом конкретном случае.

2. Отыскание общих свойств, присущих любой системе тел, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

Решение первой задачи привело к установлению Ньютоном и Эйнштейном так называемых динамических законов, решение же второй задачи – к обнаружению законов сохранения таких фундаментальных величин, как энергия, импульс и момент импульса, причем оба решения были получены с использованием такого важнейшего понятия физики как физическая величина.

Физическая величина – это свойство физического объекта (части материи), которое, во-первых, в качественном отношении является общим для многих физических объектов (физических систем, их состояний и т.д.), а во-вторых, в количественном отношении является индивидуальным для каждого физического объекта. Например, такая физическая величина как вязкость является общим свойством и для воды, и для ртути, и для расплавленного металла, в то же время выраженное конкретными цифрами значение вязкости является индивидуальным для каждой из указанных жидкостей.

Механику составляют три раздела: 1. Кинематика; 2. Статика; 3. Динамика. Кинематика (от греч. *kinematos* – движение) изучает движение тел вне зависимости от причин, обуславливающих это движение. Статика (от греч. *statike* – учение о равновесии) изучает условия равновесия тел. Динамика (от греч. *dynamis* – сила) изучает движение тел в связи с теми причинами, которые обуславливают характер движения.

§2. Кинематика материальной точки

Существует три способа описания движения м.т.: векторный (от лат. vector – несущий), координатный (от лат. со – совместно, ordinatus – упорядоченный) и так называемый естественный.

При векторном способе положение интересующей нас м.т. А задают радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из некоторой неподвижной т. О выбранной системы отсчета в точку пространства (или положение), в которой находится м.т. А (рис. 1). При движении м.т. А ее радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т.е. радиус-вектор \vec{r} зависит от времени t . Линию, которую образует при своем движении м.т., называют траекторией.

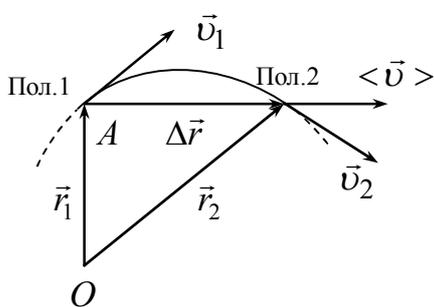


Рис. 1. Векторный способ описания движения м.т.

Для характеристики быстроты изменения положения м.т. в пространстве существует понятие скорости точки. Пусть за промежуток времени Δt м.т. А переместилась из пол.1 в пол.2. Вектор, соединяющий начальное и конечное положение м.т. называют перемещением. Из рис. 1 видно, что вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ м.т. А представляет собой приращение радиуса-вектора \vec{r} за время Δt : $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ называют вектором средней скорости движения м.т.: $\langle\vec{v}\rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Вектор $\langle\vec{v}\rangle$ совпадает по направлению с $\Delta\vec{r}$.

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) называется предел отношения $\Delta\vec{r}/\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

В математике выражение такого вида называется первой производной от функции и обозначается как $\frac{df(t)}{dt}$, т.е. в данном случае

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Это значит, что вектор скорости \vec{v} м.т. в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора \vec{r} по времени и направлен по касательной к траектории в данном положении в сторону движения м.т. А (как и вектор $d\vec{r}$, рис. 2). Модуль вектора

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

Движение м.т. характеризуется также ускорением. Это физическая ве-

личина, характеризующая быстроту изменения скорости. Мгновенным ускорением называют предел отношения $\Delta \vec{v} / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Направление вектора \vec{a} совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$ – приращением вектора \vec{v} за время dt . Модуль вектора \vec{a} определяется аналогично модулю вектора \vec{v} .

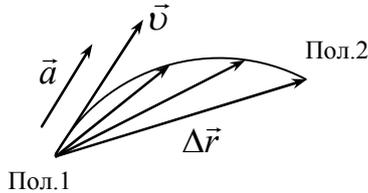


Рис. 2. Векторы перемещения, мгновенной скорости и ускорения при $\frac{dv}{dt} > 0$

Таким образом, зная зависимость $\vec{r}(t)$ можно найти скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} м.т. в каждый момент времени.

Возникает и обратная задача: можно ли найти зависимости $\vec{v}(t)$ и $\vec{r}(t)$, зная зависимость от времени ускорения $\vec{a}(t)$? Оказывается, для получения однозначного решения этой задачи знания одной зависимости $\vec{a}(t)$ недостаточно, необходимо ещё знать так называемые начальные условия, а именно скорость \vec{v}_0 и радиус-вектор \vec{r}_0 в некоторый начальный момент времени $t = 0$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим простейший случай, когда в процессе движения ускорение точки $\vec{a} = const$. Такое движение называют равнопеременным. Соотношению $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{v}$ соответствует равноускоренное движение, а если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}$, то это равнозамедленное движение. Определим скорость м.т. $\vec{v}(t)$.

Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ скорость м.т. увеличилась от v_0 до v на величину Δv т.е. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}$. Разобьем этот промежуток времени на N малых промежутков Δt_i : $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_i + \dots + \Delta t_N$. В течении каждого Δt_i скорость увеличивается на величину $\Delta \vec{v}_i$, поэтому итоговое увеличение скорости $\Delta \vec{v}$ за время Δt можно вычислить так:

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_2 + \dots + \Delta \vec{v}_i + \dots + \Delta \vec{v}_N = \sum_{i=1}^N \Delta \vec{v}_i.$$

При малых Δt_i

$$\Delta \vec{v}_i \cong \vec{a}_i \Delta t_i.$$

Знак приближенного равенства означает, что в пределах отрезка времени Δt_i ускорение \vec{a}_i не остается постоянным, т.е. зависит от t , но это равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δt_i . Таким образом,

$$\Delta \vec{v} \cong \sum_{i=1}^N \vec{a}_i \Delta t_i.$$

В пределе при стремлении всех Δt_i к нулю (при этом $N \rightarrow \infty$) сумма, стоящая в приближенном равенстве справа, станет точно равна $\Delta \vec{v}$:

$$\Delta \vec{v} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \vec{a}_i \Delta t_i .$$

В математике выражения такого рода называют определённым интегралом (от лат. *integralis* – целостный) и записывают символически следующим образом:

$$\Delta \vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt = \int_{v_0}^v d\vec{v} .$$

Такое обозначение выбрано с тем, чтобы отличать предел суммы бесконечно малых величин от обычной суммы конечных величин. Таким образом, конечная скорость \vec{v} вычисляется так:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt .$$

Если $\vec{a} = \text{const}$ и в начальный момент времени $t_1 = 0$, а в конечный момент $t_2 = t$, то \vec{a} можно вынести за знак интеграла (т.е. за знак суммы); в итоге получится, что

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \int_0^t dt = \vec{v}_0 + \vec{a} t ,$$

так как предел суммы бесконечно малых величин dt равен конечному отрезку времени, т.е. $\Delta t = t - 0 = t$.

Аналогично вычисляется радиус-вектор $\vec{r}(t)$ м.т. За промежуток времени dt элементарное приращение радиуса-вектора $d\vec{r} = \vec{v} dt$. Интегрируя это выражение с учётом найденной зависимости $\vec{v}(t)$, определим приращение радиуса-вектора за время от $t=0$ до t :

$$\Delta \vec{r} = \int_0^t d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a} t) dt = \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \vec{a} t dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{a} \int_0^t t dt = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} .$$

Для нахождения самого радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ необходимо знать ещё радиус-вектор \vec{r}_0 положения, в котором находилась м.т. А в начальный момент времени $t = 0$.

Если \vec{r}_0 известен, тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

– это кинематическое уравнение равнопеременного движения.

Рассмотрим, например, движение камня, брошенного под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью \vec{v}_0 . Такое движение тела называется свободным, так как на тело действует только сила тяжести. Если считать, что камень движется с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, то его

положение относительно точки O бросания ($\vec{r}_0 = 0$) определяется радиусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$$

который в данном случае представляет собой сумму векторов, что показано на рис. 3.

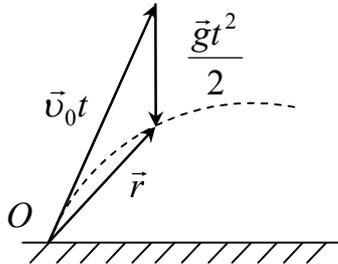


Рис.3. Векторный способ описания движения м.т. в поле силы тяжести

Таким образом, для полного решения задачи о движении м.т. – определения её скорости \vec{v} и положения \vec{r} в зависимости от времени – недостаточно знать зависимость $\vec{a}(t)$, но ещё необходимо знать начальные условия, т.е. скорость \vec{v}_0 и радиус-вектор \vec{r}_0 начального положения точки.

При координатном способе с выбранным телом отсчёта жёстко связывают определённую систему координат, выбор которой определяется симметрией задачи, её постановкой (условиями), а также стремлением упростить самое решение. Выберем декартову (прямоугольную) систему координат x, y, z (рис. 4).

Запишем проекции на оси x, y, z радиуса-вектора $r(t)$, характеризующего положение интересующей нас м.т. относительно начала координат O в момент времени t :

$$r_x = Ox; \quad r_y = Oy; \quad r_z = Oz.$$

Собственно проекции конца вектора \vec{r} на эти же оси представляют собой координаты x, y, z , являющиеся функциями времени, так как м.т. A движется из т. 1 в т. 2 т.е. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Зная зависимость этих координат от времени, т.е. зная закон движения м.т., можно найти положение

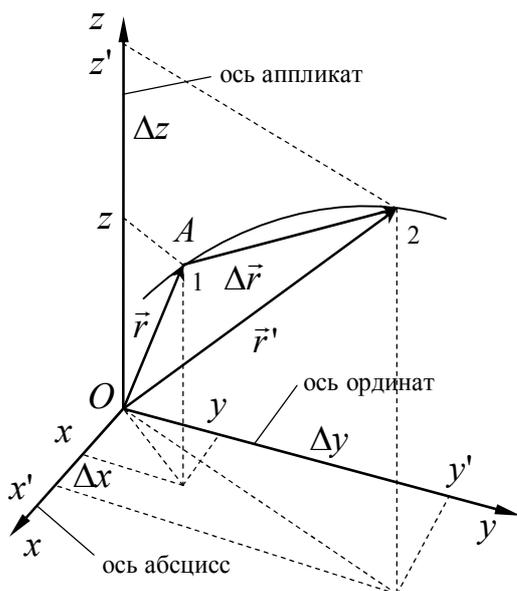


Рис. 4. Координатный способ описания движения м.т.

м.т. в каждый момент времени, её скорость и ускорение.

Действительно, спроецировав вектор перемещения на оси x, y, z , получим:

$$\begin{aligned} \text{пр.}(\Delta \vec{r})_x &= \Delta x; & \text{пр.}(\Delta \vec{r})_y &= \Delta y; \\ \text{пр.}(\Delta \vec{r})_z &= \Delta z. \end{aligned}$$

Тогда, в соответствии с определением скорости движения м.т. для векторного способа получим:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{r})_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Аналогично, для ускорения м.т. получим

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Таким образом, зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ по существу полностью определяют положение м.т. Зная их, можно найти не только положение м.т., но и проекции её скорости и ускорения, и следовательно, модуль и направление векторов \vec{v} и \vec{a} в любой момент времени. Например, модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

направление же вектора \vec{v} задаётся направляющими косинусами углов по формулам

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v},$$

где α , β , γ – углы между вектором \vec{v} и осями x , y , z соответственно. Аналогичными формулами определяются модуль и направление вектора ускорения.

Решение обратной задачи – нахождение скорости и закона движения м.т. по заданному ускорению – проводится, как и в векторном способе, путём интегрирования, в данном случае проекций ускорения и скорости по времени.

«Естественный» способ. Наиболее часто используется в бытовых представлениях. Этот способ применяют тогда, когда траектория движения м.т. известна заранее.

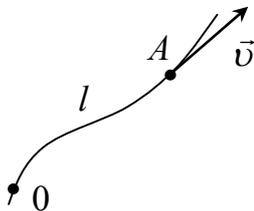


Рис. 5. Движение м.т. по траектории

Положение м.т. A определяют дуговой координатой l , численно равной расстоянию, отсчитанному вдоль траектории от выбранного начала координат O (рис. 5). При этом произвольно устанавливают положительное направление отсчёта координаты l . Движение м.т. определено, если известны её траектория, начало отсчёта O , положительное направление отсчёта координаты l и закон движения $l(t)$.

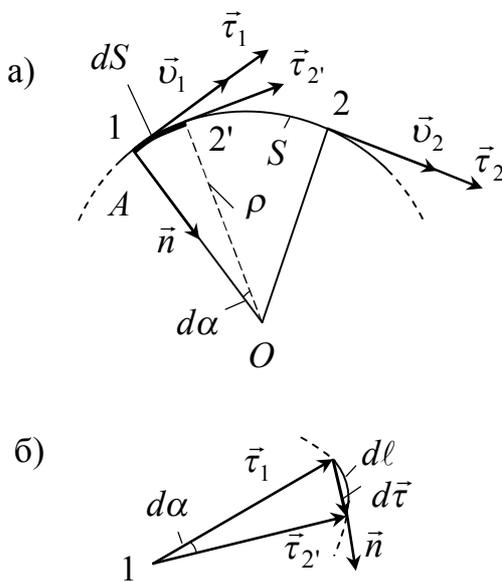
Расстояние, отсчитанное вдоль траектории, называют путём S , тогда модуль вектора скорости вычисляется так:

$$|\vec{v}| = v = \frac{dS}{dt}.$$

§3. Ускорение при криволинейном движении

Найдём ускорение м.т., движущейся по произвольной плоской кривой 1–2 и прошедшей путь величиной S . В соответствии с определением ускорения

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$



Таким образом, необходимо знать функцию $\vec{v}(t)$. Так как вектор $\vec{v}(t)$ меняется и по модулю, и по направлению, то для оценки влияния того и другого представим $\vec{v}(t)$ в виде произведения двух составляющих частей – модульной и векторной. В соответствии с этим воспользуемся единичным вектором (ортом) $\vec{\tau}$ ($|\vec{\tau}|=1$), связанным с движущейся м.т. A и направленным в сторону движения м.т. A (рис.6а) по касательной к траектории. Очевидно, что $\vec{\tau}$ – переменный вектор, поскольку его положение в пространстве зависит от пути S вдоль траектории и непрерывно изменяется. Вектор скорости \vec{v}

также направлен по касательной к траектории, поэтому его можно представить так:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau},$$

где v – модуль вектора \vec{v} ; $v = dS/dt$.

Продифференцируем последнее выражение по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Затем преобразуем последнее слагаемое этого выражения:

$$v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{dS} \underbrace{\frac{dS}{dt}}_{=v} = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{dS}.$$

В результате

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{dS}.$$

Определим приращение вектора $\vec{\tau}$ на участке dS , чтобы вычислить $d\vec{\tau}/dS$. Будем уменьшать промежуток времени $\Delta t \rightarrow 0$, при этом точка 2 будет стремиться к точке 1 и можно считать, что бесконечно малый (элементарный) отрезок 1–2' траектории стремится к дуге окружности с центром в некоторой точке O . Эту точку называют центром кривизны траектории в данной точке пространства, а радиус ρ соответствующей окружности – радиусом кривизны траектории в той же точке пространства (ρ на рис. 6а – радиус кривизны в т. 2').

Из геометрии известно, что длина дуги окружности равна произведению радиуса этой окружности и угла, опирающегося на эту дугу, поэтому

$$dS = \rho d\alpha.$$

Далее определим, что собой представляет вектор $d\vec{\tau}$. Для этого совместим «хвосты» векторов $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, в т. 1 и рассмотрим получившийся треугольник векторов $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ и $d\vec{\tau}$ (рис. 6б). В этом треугольнике угол между векторами $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ равен углу при вершине O (рис. 6а), как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Кроме того, из геометрии также известно, что для бесконечно малого угла $d\alpha$ длина $d\ell$ бесконечно малой дуги равна длине бесконечно малой стягивающей эту дугу хорде $|d\vec{\tau}|$, поэтому из треугольника векторов, где $|\vec{\tau}_1|$ играет роль радиуса бесконечно малой дуги (рис. 6б), следует, что

$$|d\vec{\tau}| = d\ell = |\vec{\tau}_1| d\alpha = 1 \cdot d\alpha,$$

так как $|\vec{\tau}_1| \equiv 1$. Вектор $d\vec{\tau}$ также представим в виде произведения модульной и векторной составляющих

$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \cdot \vec{n} = 1 \cdot d\alpha \cdot \vec{n},$$

где \vec{n} – также единичный вектор (орт), отражающий направление вектора $d\vec{\tau}$. Как видно из рис.6а, вектор \vec{n} направлен к центру кривизны (т. O), так как угол $d\alpha$ бесконечно мал.

Теперь мы можем вычислить отношение $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{|d\vec{\tau}| \cdot \vec{n}}{\rho d\alpha} = \frac{1 \cdot d\alpha \cdot \vec{n}}{\rho d\alpha} = \frac{\vec{n}}{\rho}.$$

Подставив в выражение для вычисления \vec{a} , получим:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}.$$

Здесь первое слагаемое называют тангенциальным ускорением \vec{a}_τ , а второе – нормальным \vec{a}_n :

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}.$$

Вектор \vec{a}_τ тангенциального ускорения направлен по касательной к траектории в той ее точке, где находится м.т., а вектор \vec{a}_n направлен по нормали (перпендикулярно) к вектору \vec{a}_τ в той же точке траектории.

Таким образом, полное ускорение \vec{a} м.т. может быть представлено как векторная сумма тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Такое представление существенно упрощает вычисление полного ускорения в различных физических задачах, так как позволяет предварительно вычислить \vec{a}_τ и \vec{a}_n по отдельности.

Модуль полного ускорения м.т.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

где

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt}.$$

Если м.т. движется по окружности радиуса R (рис. 7), то векторная диаграмма выглядит так:

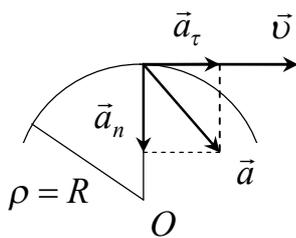


Рис. 7. Составляющие полного ускорения м.т.

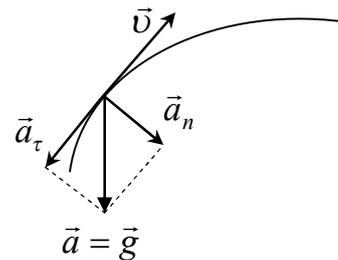


Рис. 8. Разложение вектора ускорения на составляющие при свободном движении м.т.

Если м.т. движется свободно, т.е. под действием только силы тяжести, то $\vec{a} = \vec{g}$, и векторы ускорений в этом случае показаны на рис. 8.

Тема 2. Динамика материальной точки

§4. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта

Первый закон Ньютона (английский физик) формулируется так: всякая м.т. (тело) находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения при отсутствии воздействия на них других тел называется инерцией (от лат. inertia – бездействие). Поэтому первый закон Ньютона называется также законом инерции.

В обоих названных состояниях ускорение тела равно нулю. Тел, не подвергающихся в той или иной степени воздействию других тел, в природе не существует. В наблюдаемых на практике случаях покоя или равномерного прямолинейного движения мы имеем дело с телами, воздействия на которые уравнивают друг друга.

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, так как характер движения м.т. (тела) зависит от выбора системы отсчёта. Рассмотрим две системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой, очевидно, будет двигаться с ускорением. Следовательно, I закон Ньютона не может выполняться одновременно в обеих системах.

Система отсчета, в которой выполняется I закон Ньютона, называется инерциальной, и наоборот, система отсчёта называется неинерциальной, если в ней не выполняется I закон Ньютона. Любая система отсчёта, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы отсчёта прямолинейно и равномерно, также является инерциальной.

Опытным путём установлено, что система отсчета, центр которой совмещён с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звёзды, является инерциальной. Эта система называется гелиоцентрической. Ускорение системы отсчёта, связанной с Землёй, настолько мало, что в большинстве случаев её можно считать практически инерциальной.

§5. Второй закон Ньютона

Во втором законе Ньютона фигурируют, кроме ускорения, две физические величины: сила и масса. Сила (\vec{F}) – это физическая векторная величина, являющаяся мерой взаимодействия м.т. (тел) и физических полей, в результате чего м.т. (тела) получают ускорение или деформируются. В физике вектор считается известным, если заданы его направление, величина и

точка приложения. Масса (m) (от лат. *massa* – глыба) м.т. (тела) – физическая величина, являющаяся мерой инерционных и гравитационных свойств тела. В гелиоцентрической системе отсчета инерционная и гравитационная массы равны друг другу.

Если силы действуют на одну и ту же м.т.* (тело), то её ускорение прямо пропорционально равнодействующей этих сил: $\vec{a} \sim \sum_i \vec{F}_i$, ($m = \text{const}$). Наоборот, при воздействии одной и той же силы на различные м.т., имеющие разные массы m_i , ускорение a_i обратно пропорционально массе м.т.: $a_i \sim \frac{1}{m_i}$, ($\vec{F} = \text{const}$). Объединяя оба выражения и учитывая векторный

характер силы и ускорения, можем записать уравнение второго закона Ньютона:

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m}. \quad \text{В СИ } k = 1, \text{ поэтому } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Формулировка второго закона Ньютона имеет вид: ускорение м.т. прямо пропорционально действующей на неё силе и обратно пропорционально массе м.т.

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчёта. Первый закон Ньютона является частным случаем второго закона: при $\sum_i \vec{F}_i = 0$ $\vec{a} = 0$.

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил, или принцип суперпозиции (наложения, от лат. *super* – над, сверху и *positio* – положение): если на м.т. действуют одновременно несколько сил F_i , то каждая из этих сил сообщает м.т. m_i такое ускорение a_i согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет. Согласно этому принципу силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

§6. Единицы измерения, размерности и названия физических величин

В § 1 мы определили физическую величину как свойство физического объекта (части материи), которое, во-первых, в качественном отношении является общим для многих физических объектов, а во-вторых, в количественном отношении является индивидуальным для каждого физического объекта.

* В дальнейшем будем употреблять только термин «материальная точка» в соответствии с определением

Измерить какую-либо физическую величину означает сравнить её с величиной того же вида, принятой за единицу. Для каждой физической величины можно было бы установить единицу измерения независимо от других. Однако оказывается, что можно ограничиться произвольным выбором единиц для семи величин, принятых за основные, а единицы же измерения всех прочих величин можно установить на основании семи основных, воспользовавшись физическими законами. В этом случае совокупность основных и дополнительных единиц образует систему единиц измерения физических величин.

В СССР, следовательно, в РФ, с 1 января 1981 года введён ГОСТ 8.417-81 – государственный общесоюзный стандарт, устанавливающий применение Международной системы единиц, обозначаемой СИ (SI – Sistem International). Основными единицами СИ являются: единица длины – метр (м); единица массы – килограмм (кг); единица времени – секунда (с); единица величины электрического тока – ампер (А); единица температуры – кельвин (К); единица количества вещества – моль (моль); единица силы света – кандела (кд). Дополнительные единицы измерения: радиан (рад) – единица измерения плоского угла; стерадиан (ср) – единица измерения телесного (объемного) угла.

Единицей физической величины называется величина того же вида, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице.

Например, единицей измерения скорости, или просто единицей скорости является скорость равномерно движущейся м.т., проходящей за одну секунду путь, равный одному метру. «м/с» – название единицы скорости.

Другой пример. Единицей измерения силы на основании второго закона Ньютона является сила, которая сообщает м.т. массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 . Название единицы силы – ньютон: $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$

Размерностью физической величины называют ее выражение в основных единицах. Для обозначения размерности произвольной физической величины используется символ «dim» (от англ. dimensional – размер). Таким образом, размерности скорости, ускорения, силы

$$\dim v = LT^{-1}; \dim a = LT^{-2}; \dim F = MLT^{-2}.$$

Здесь L – размерность длины, T – размерность времени, M – размерность массы.

§7. Третий закон Ньютона. Сила тяжести и вес тела

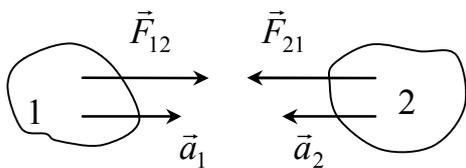


Рис. 9. Векторная диаграмма сил для взаимодействующих тел

Опыт показывает, что всякое действие м.т. друг на друга носит характер взаимного действия: если м.т. 1 действует на м.т. 2 с некоторой силой \vec{F}_{21} , то и м.т. 2 в свою очередь действует на м.т. 1 с силой \vec{F}_{12} (рис. 9).

Соотношение между векторами сил определяется третьим законом Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие м.т., всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти м.т.:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Следует помнить, что \vec{F}_{21} и \vec{F}_{12} приложены к различным м.т. и уравновесить друг друга не могут.

За счет сил гравитации притягиваются друг к другу Земля и любое тело. По третьему закону Ньютона силы притяжения равны, однако на поведении Земли это равенство никак не сказывается. Дело в том, что масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, что неизмеримо больше массы любого материального объекта в земных условиях, поэтому ускорением и перемещением Земли, возникающими в результате ее взаимодействия с другими телами, всегда пренебрегают.

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно Земли ускорением \vec{g} . Это означает, что, по второму закону Ньютона, в системе отсчёта, связанной с Землёй, на всякое тело массой m действует сила

$$\vec{G} = m\vec{g},$$

называемая силой тяжести. Сила тяжести приложена в точке, которая называется центром тяжести тела. Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила тяжести уравновешивается реакцией \vec{N} опоры или подвеса, удерживающих м.т. от падения (рис.10).

Соответственно величина \vec{g} называется ускорением силы тяжести.

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой \vec{P} , равной

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Обусловленная земным притяжением сила, с которой тело действует на связи, ограничивающие его движение (подвес или опору) называется весом тела.

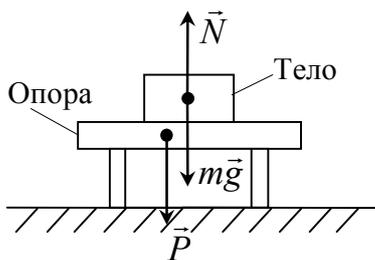


Рис. 10. Реакция опоры \vec{N} и вес тела \vec{P}

1. Рассмотрим покоящееся относительно Земли тело (см. рис.10).

Условие равновесия тела выглядит так:

$$\vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N},$$

следовательно условие равновесия примет вид:

$$-\vec{P} + m\vec{g} = 0, \text{ или } \vec{P} = m\vec{g}.$$

Отсюда следует, что для покоящегося относительно Земли тела его вес численно равен действующей на него силе тяжести.

2. Для тела, движущегося с ускорением относительно Земли, уравнение II закона Ньютона имеет вид (рис. 11):

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}.$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N},$$

поэтому из предыдущего уравнения получим:

$$m\vec{a} = -\vec{P} + m\vec{g}, \text{ или } \vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Если тело движется вверх, то спроецировав последнее уравнение на ось Oy , получим:

$$-P = m[-g - a]; \quad P = m(g + a).$$

Таким образом, если тело движется вверх с ускорением, то его вес превышает вес покоящегося тела.

Если тело движется вниз, тогда в проекции на ось Oy уравнение второго закона Ньютона примет вид:

$$-P = m[-g - (-a)]; \quad P = m(g - a),$$

т.е. вес тела уменьшается. При $|\vec{g}| = |\vec{a}|$ $P = 0$, т.е. наступает невесомость.

Отсюда вытекает различие между весом тела и силой тяжести: сила тяжести приложена к телу, а вес тела – к опоре или подвесу. Сила тяжести неизменна на данной географической широте, а вес тела изменяется в зависимости от характера движения тела. Такое широко известное устройство как весы предназначено для определения массы тел по действующей на них силе тяжести.

§8. Импульс м.т. и системы м.т. Центр масс

При столкновении тел результат столкновения зависит не только от их

скорости, но и от массы. Поэтому должна существовать физическая величина, отражающая это обстоятельство. Определим эту величину следующим образом.

Уравнению второго закона Ньютона можно придать более общий вид. Считая массу м.т. неизменной, запишем уравнение так:

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

В таком виде уравнение второго закона Ньютона справедливо и в механике теории относительности (в релятивистской механике), несмотря на то обстоятельство, что в ней масса м.т. зависит от скорости.

Произведение массы м.т. и её скорости называют импульсом м.т.:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

В соответствии с этим определением уравнение второго закона Ньютона принимает вид, в котором оно называется основным уравнением классической механики:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

и формулируется так: производная импульса м. т. по времени равна действующей на неё силе. В частности, если $\vec{F} = 0$, то $\vec{p} = \text{const}$.

Последнее уравнение позволяет найти приращение импульса м.т. за любой промежуток времени, если известна зависимость силы \vec{F} от времени. Действительно, элементарное приращение импульса м.т. за промежуток времени dt

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt.$$

На основании этой записи русский физик И.В. Мещерский вывел уравнение движения тела переменной массы, которое лежит в основе расчёта параметров ракетных двигателей.

Проинтегрировав это выражение по времени, найдём приращение импульса м.т. за конечный промежуток времени от 0 до t :

$$\int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F}(t)dt; \quad \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}(t)dt.$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения называют импульсом силы. Таким образом, приращение импульса м.т. за любой промежуток времени зависит не только от значения силы, но и от продолжительности её действия. В частности, если $\vec{F} = \text{const}$, то вектор \vec{F} можно вынести из под знака интеграла и тогда

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}(t - 0) = \vec{F}t.$$

Совокупность материальных точек или тел, взаимодействующих между собой, называют системой м.т., или системой тел. М.т., входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с м.т., не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы взаимодействия между м.т. системы называют внутренними, а силы, обусловленные действием других м.т., не входящих в данную систему, – внешними. В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется замкнутой. Понятие замкнутой системы является относительным, так как все реальные объекты находятся в поле тяжести Земли, испытывают трение и т.д. Но систему с большой степенью точности можно считать замкнутой, если, например,

- 1) действие внешних сил на систему уравновешено;
- 2) внешние силы много меньше внутренних.

Рассмотрим систему, состоящую из N м.т. Импульсом системы м.т. \vec{p} называется векторная сумма импульсов м.т., образующих систему:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i.$$

Точка приложения вектора \vec{p} находится в центре масс системы м.т. Центром масс системы м.т. (т. С, рис.12) называется точка пространства, положение которой задаётся радиусом-вектором \vec{r}_c , определяемым так:

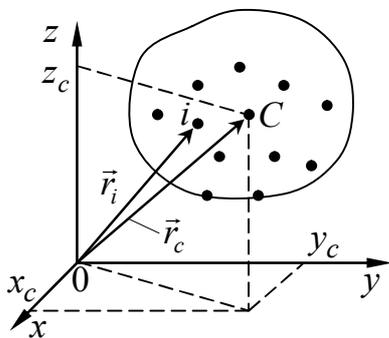


Рис. 12. Определение положения центра масс системы м.т.

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Здесь m_i – масса i -той м.т., \vec{r}_i – радиус-вектор, определяющий положение i -той м.т. в пространстве; m – масса системы м.т. (с.м.т.).

Как видно, определение центра масс характеризует распределение массы этой системы в пространстве: чем больше «густота» м.т. в какой – то области пространства, тем ближе к этой области располагается центр масс.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям \vec{r}_c на координатные оси:

$$np(\vec{r}_c)_x = x_c - 0 = x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m}.$$

Если поле тяготения однородно (неизменно) в пределах данной с.м.т., то её центр масс совпадает с её же центром тяжести, то есть с точкой приложения силы тяжести. Поскольку размеры реальных с.м.т. много меньше

размеров Земли, т.е. с.м.т. находятся в однородном поле, то это совпадение всегда выполняется. Скорость движения центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Так как $m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$, то $\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}$; $\vec{v}_c = \frac{\vec{p}}{m}$; $\vec{p} = m \vec{v}_c$ –

импульс с.м.т. равен произведению массы с.м.т. на скорость движения её центра масс. Если \vec{v}_c равна нулю, то с.м.т. как целое покоится. Скорость \vec{v}_c имеет смысл скорости движения с.м.т. как целого.

Выясним характер движения центра масс с.м.т. Для этого воспользуемся основным уравнением классической механики для с.м.т.:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}_c = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i,$$

где $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$ – результатирующая всех внешних сил, действующих на с.м.т.

Отличие результирующей силы от равнодействующей заключается в том, что равнодействующая сила – это векторная сумма сил, приложенных к одной м.т. (телу), а результирующая сила – это векторная сумма сил, приложенных к различным м.т. системы, т.е. результирующая сила приложена к центру масс с.м.т. Таким образом,

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F} \text{ – уравнение движения центра масс с.м.т.}$$

Согласно этому уравнению центр масс любой с.м.т. движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этом центре и к нему была бы приложена результирующая внешних сил.

§9. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из трёх м.т. 1, 2 и 3 (рис.13). На каждую м.т. действуют внутренние \vec{F}' и внешние \vec{F} силы. В соответствии с III законом Ньютона

$$\vec{F}'_{ik} = -\vec{F}'_{ki}, \text{ т.е., например, } \vec{F}'_{23} = -\vec{F}'_{32}.$$

Здесь \vec{F}'_{ik} – сила, действующая на i -тую м.т. со стороны k -той м.т. Отсюда видно, что $\vec{F}'_{ik} + \vec{F}'_{ki} = 0$.

Запишем основное уравнение классической механики для каждой м.т.:

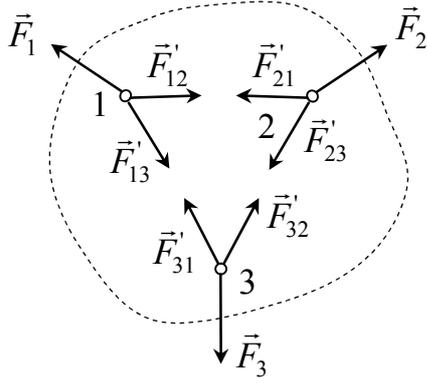


Рис. 13. Взаимодействия в системе из трех м.т.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}'_{12} + \vec{F}'_{13} + \vec{F}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}'_{21} + \vec{F}'_{23} + \vec{F}_2; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}'_{31} + \vec{F}'_{32} + \vec{F}_3, \end{cases}$$

где $\vec{F}_i (i=1,2,3)$ – равнодействующая внешних сил, приложенных к i -той м.т.

Чтобы записать уравнение движения центра масс с.м.т. определим результирующую внешних сил, приложенную в центре масс с.м.т.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i;$$

для этого просуммируем уравнения и получим:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)}_{=\vec{p}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \text{ так как } \vec{F}'_{ik} + \vec{F}'_{ki} = 0.$$

Окончательно получим, что

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}.$$

Если рассматриваемая система из 3-х м.т. замкнута, то $\vec{F} = 0$, т.е.

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0 \text{ и } \vec{p} = const.$$

Обобщим результат на систему, содержащую произвольное число N м.т. Для i -той м.т.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i \neq k} \vec{F}'_{ik} + \vec{F}_i.$$

(Здесь $i \neq k$, так как внутренние силы \vec{F}'_{ii} или \vec{F}'_{kk} не существуют, поскольку м.т. сама на себя не действует).

Складывая эти уравнения с учётом того, что $\vec{F}'_{ik} = -\vec{F}'_{ki}$, получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

т.е. производная по времени вектора импульса с.м.т. равна результирующей внешних сил, приложенных к м.т. системы. Для замкнутой системы $\sum_i \vec{F}_i = 0$, и $\vec{p} = const$. Таким образом, закон сохранения импульса формулируется так:

импульс замкнутой системы м.т. (тел) не изменяется.

В практически важных случаях, когда с.м.т. не является замкнутой, так как результирующая внешних сил не равна нулю, у с.м.т. сохраняется не сам импульс \vec{p} , а его составляющая вдоль некоторой оси, проекция результирующей внешних сил на которую равна нулю. Например, если *пр.* $(\vec{F})_x = F_x = 0$, то составляющая $(\vec{p})_x = \vec{p}_x = const$.

Рассмотрим в качестве примера выстрел снаряда массой m_c из орудия, установленного на неподвижной платформе (рис. 14). Здесь m_{Π} – суммарная масса платформы и орудия.

Из рис.14 видно, что проекция результирующей на ось Ox внешних (вертикальных) сил до выстрела и после выстрела равна нулю, т.е. *пр.* $(\vec{N} + m_{\Pi}\vec{g} + m_c\vec{g})_x = 0$.

Поэтому по закону сохранения импульса

$$\vec{p}_{x1} = \vec{p}_{x2}, \text{ или } 0 = m_{\Pi}\vec{v}_{\Pi x} + m_c\vec{v}_{cx},$$

т.е. получено уравнение, которое позволяет решить задачу.

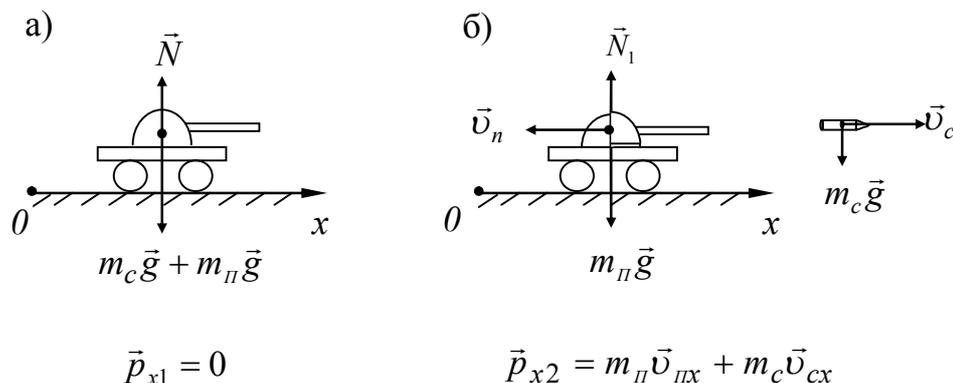


Рис. 14. Взаимодействия в системе «снаряд – орудие на платформе»

Тема 3. Работа и энергия

§10. Работа и мощность силы

Пусть м.т. под действием некоторых сил, в том числе силы \vec{F} совершает перемещение по некоторой траектории 1–2 (рис. 15). М.т. не обязательно

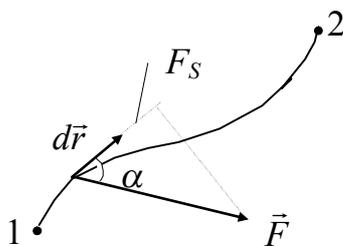


Рис. 15. К определению понятия элементарной работы силы

должна двигаться в направлении \vec{F} , так как на нее могут действовать и другие силы. В общем случае сила \vec{F} в процессе движения м.т. может меняться как по модулю, так и по направлению, но если мы рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$ за время dt , то в его пределах силу \vec{F} можно считать постоянной. Результат действия силы \vec{F} на

элементарном перемещении $d\vec{r}$ характеризуется величиной, называемой элементарной работой силы.

Элементарной работой силы называется величина, равная скалярному произведению силы \vec{F} и перемещения $d\vec{r}$, которое совершила м.т. под действием силы \vec{F} :

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F \cos \alpha dS = F_S dS,$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$, $\alpha = (\vec{F}, \hat{d\vec{r}})$; элементарный путь $dS = |d\vec{r}|$, так как $dt \rightarrow 0$; F_S – проекция вектора \vec{F} на направление вектора $d\vec{r}$. Величина dA – алгебраическая: в зависимости от угла между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$ она может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю. Если $dA < 0$, то это означает, что существуют ещё какие-то силы, действующие на м.т. в другом направлении и превышающие силу \vec{F} .

Интегрируя выражение для работы по всем элементарным участкам пути от t_1 до t_2 , найдём работу силы \vec{F} на данном пути:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_S dS.$$

Эта формула справедлива не только для м.т., но и для с.м.т.. Надо только иметь в виду, что под $d\vec{r}$ (или dS) следует понимать перемещение точки приложения результирующей силы \vec{F} , т.е. перемещение центра масс с.м.т..

Если на с.м.т. действует несколько сил, результирующая которых

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \text{ то } A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 (\sum_i \vec{F}_i)d\vec{r} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i A_i,$$

т.е. работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой из сил в отдельности. Поскольку

$$d\vec{r} = \vec{v}dt, \text{ то } A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{F}\vec{v}dt.$$

Если \vec{F} и \vec{v} не изменяются, то их можно вынести за знак интеграла и

$$A = \vec{F}\vec{v}\Delta t.$$

При $t_0 = 0$, $\Delta t = t - t_0 = t$ и $A = \vec{F}\vec{v}t$. Понятие работы силы в механике отличается от бытового понятия работы человека. Например, если человеком перенесён груз на какое-то расстояние то, с точки зрения физики его работа по преодолению силы тяжести равна нулю, т.к. сила тяжести перпендикулярна перемещению груза.

Название единицы работы установлено в честь английского физика Джоуля – джоуль (Дж): 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Нм).

На практике имеет значение не только величина совершённой силой работы, но и время, в течение которого она совершается, т.е. необходимо характеризовать скорость совершения работы. Учитывающая работу силы и время совершения работы величина называется мощностью силы. Средняя мощность силы N есть физическая величина, равная отношению работы силы ΔA к промежутку времени Δt , за который она совершена:

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Если при $t_0=0$ и $A_0=0$, тогда $\langle N \rangle = \frac{A}{t}$.

Если мощность меняется во времени, то вводится понятие мгновенной мощности силы:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}.$$

Пусть за время dt точка приложения силы получает перемещение $d\vec{r}$. Тогда элементарная работа dA , совершённая за время dt , равна

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad \text{и мощность силы} \quad N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

Название единицы мощности установлено в честь английского физика Ватта – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой сила за время 1 с совершает работу 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с). Рассмотренное понятие мощности используется также для характеристики работоспособности различных устройств (механических, тепловых, электронных и т.д).

§11. Кинетическая и потенциальная энергии

При взаимодействии м.т. происходит их перемещение под действием сил взаимодействия. В этом случае вместо термина работа силы применяется термин: работа, совершаемая одной м.т. над другой м.т., или просто работа м.т. В механике физическая величина, характеризующая способность м.т. или с.м.т. совершать работу, называется энергией (от греч. energeia – деятельность).

Энергия движущейся м.т. называется кинетической энергией. Определим, как вычисляется кинетическая энергия E_k .

Рассмотрим взаимодействие (удар) двух соприкасающихся м.т. (рис.16). Очевидно, что в момент удара скорости тел одинаковы. За время dt точка приложения силы F_{21} получит перемещение $d\vec{r}_2 = \vec{v} dt$, вследствие того, что м.т. 1 совершит над м.т. 2 работу

$$dA_{21} = \vec{F}_{21} d\vec{r}_2 = \vec{F}_{21} \vec{v} dt,$$

причём за бесконечно малое время dt скорость \vec{v} можно считать постоянной и одинаковой (м.т. соприкасаются) для обеих м.т.

М.т. 1 совершает работу над м.т. 2 за счёт запаса кинетической энергии, которой она обладает в силу своего движения. Так как эта энергия убывает, то

$$dE_{K1} < 0, \quad dA_{21} = -dE_{K1}; \quad \vec{F}_{21}\vec{v}dt = -dE_{K1}; \quad \vec{F}_{12}\vec{v}dt = dE_{K1}.$$

Поскольку по третьему закону Ньютона м.т. 2 действует на м.т. 1 с силой $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то скорость м.т. 1 за время dt изменяется на величину $d\vec{v}$ (рис.17). В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{F}_{12} = m\vec{a}_1 = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ отсюда } \vec{F}_{12}dt = md\vec{v}.$$

Подставив полученное выражение в формулу $\vec{F}_{12}\vec{v}dt = dE_{K1}$, получим

$$m\vec{v}d\vec{v} = dE_{K1}, \quad \vec{v}d\vec{v} = v |d\vec{v}| \cos(\vec{v}, d\vec{v}) = v \cdot \overset{\wedge}{np.}(d\vec{v})_{\vec{v}} = v dv,$$

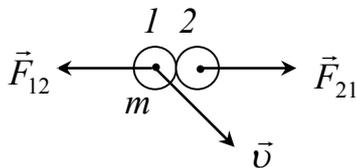


Рис.16. Взаимодействие двух соприкасающихся м.т.

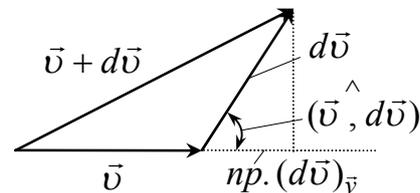


Рис. 17. Диаграмма скоростей м.т.

так как величина $np. |d\vec{v}|_{\vec{v}}$ равна приращению модуля скорости, а при $dt \rightarrow 0$ угол $(\vec{v}, d\vec{v}) \rightarrow 0$, и $\cos(\vec{v}, d\vec{v}) \rightarrow 1$.

Поэтому

$$dE_{K1} = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Отсюда следует, что кинетическая энергия м.т. массой m , движущейся со скоростью \vec{v} , равна

$$E_K = \frac{mv^2}{2}, \text{ или } E_k = \frac{mv^2}{2} \frac{m}{m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Из $dA = -dE_{K1}$ следует, что название единицы измерения энергии то же, что и для работы, т.е. джоуль.

Потенциальной (от лат. potentia – способность) энергией называется энергия системы материальных точек, определяемая либо их взаимным расположением и силами взаимодействия между ними, либо взаимодействием с потенциальным полем сил, в котором находится с.м.т. Например, потенциальной энергией обладает сжатая или растянутая пружина (взаимное расположение витков пружины). Другой пример. Потенциальной энергией обладают м.т. и гравитационное поле Земли, в котором м.т. находит-

ся. Чем больше высота расположения м.т. над поверхностью Земли, тем большая работа была затрачена по преодолению силы тяжести и увеличению расстояния между м.т. и центром масс Земли и тем больше потенциальная энергия системы м.т. – Земля. Понятие потенциальной энергии имеет смысл только в применении к системе м.т., или к системе м.т. (тело) – силовое поле. Говорить, что тело на высоте h над поверхностью Земли обладает потенциальной энергией mgh некорректно, т.к. энергией обладает система тело – Земля, но в сокращённом варианте так часто говорят.

Взаимодействие м.т. может осуществляться посредством таких силовых полей (гравитационных, упругих), работа сил которых при перемещении м.т. из одного положения в другое не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.

Такие поля называют потенциальными, а силы, действующие в них, – консервативными (от лат. *conservo* – сохраняю). Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения м.т. из одной точки пространства в другую, то такие силы называют диссипативными (от лат. *dis-sipatio* – рассеиваю); их примером являются силы трения.

М.т. и потенциальное поле сил, в котором м.т. находится, обладают потенциальной энергией, которая определяется с точностью до некоторой постоянной. Например, если речь идёт о гравитационном поле Земли, то эта постоянная равна потенциальной энергии системы, состоящей из м.т., находящейся на поверхности Земли (на расстоянии R от центра Земли), и самой Земли (рис. 18). Поскольку самопроизвольно м.т. в Землю не углубляется ($R = const$), то эту постоянную принимают равной нулю. В уравнения физических законов входит либо разность значений потенциальных энергий, либо производные от них по координатам. В том и другом случае эта постоянная из расчётов исчезает. Например, для рис.18, где постоянной величиной является mgR

$$A_{12} = E_{П2} - E_{П1} = mg(y_2 + R) - mg(y_1 + R) = mg(y_2 - y_1) = mgh.$$

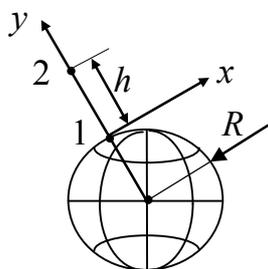


Рис.18.

Перемещение м.т. в гравитационном поле Земли

Потенциальная энергия системы «тело и потенциальное поле» определяется той работой, которую совершают действующие на тело внешние силы, преодолевающие внутренние консервативные силы взаимодействия, перемещая тело из состояния, где потенциальная энергия равна нулю, в данное положение. Наоборот, работа внутренних консервативных сил системы, приложенных к телу, равна уменьшению потенциальной энергии системы «поле – тело», т.е.

$$dE_{П} < 0, \quad dA = -dE_{П},$$

так как положительная работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии. Поскольку работа dA

есть скалярное произведение силы \vec{F} и перемещения $d\vec{r}$, то $\vec{F}d\vec{r} = -dE_{\Pi}$, или $F_s ds = -dE_{\Pi}$ отсюда $F_s = -\frac{dE_{\Pi}}{ds}$.

Таким образом, если известна функция $E_{\Pi}(\vec{r})$, то это выражение полностью определяет силу \vec{F} по модулю и направлению. Если перемещение $d\vec{r}$ рассматривать вдоль осей Ox, Oy, Oz , то, в случае консервативных сил,

$$F_x = -\frac{\partial E_{\Pi}(x)}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_{\Pi}(y)}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_{\Pi}(z)}{\partial z},$$

или в векторной форме

$$\vec{F} = -\text{grad}E_{\Pi},$$

где

$$\text{grad}E_{\Pi} = \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z} \vec{k}.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) осей координат. Последняя запись называется градиентом (от лат. *gradiens* – шагающий) скаляра.

Так как начало отсчёта выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (в отличие от кинетической, которая всегда положительна). Например, потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты глубиной h' , $E_{\Pi} = -mgh'$.

Для замкнутой системы м.т. (тел) равновесным (неизменным во времени) может быть только такое состояние, которое соответствует минимуму потенциальной энергии системы.

§12. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим с.м.т. массами m_1, m_2, \dots, m_N , движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$. Пусть $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_N$ – равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих м.т., а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ – равнодействующие внешних сил. Речь идёт только о консервативных силах, так как действие других сил (диссипативных) приводит к преобразованию механической энергии в тепловую. Этот процесс не является предметом рассмотрения механики. При $v \ll c$ (c – скорость света в вакууме) массы м.т. постоянны и уравнения II закона Ньютона для каждой из м.т. имеют вид:

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}'_i + \vec{F}_i.$$

Пусть все точки за какой-то отрезок времени dt совершают перемещения $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N$ под действием указанных сил, тогда каждая сила совершает над м.т. работу. Чтобы в последних уравнениях появилась работа силы, а затем и механическая энергия, умножим каждое уравнение на со-

ответствующее перемещение $d\vec{r}_i$, перенесем слагаемые, содержащие силы в левую часть и, учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, получим:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt - (\vec{F}_i' + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = 0.$$

Для каждой i -той м.т. работа идёт на увеличение только кинетической энергии, так как потенциальной энергии одной м.т. не существует. Произведём сложение уравнений. Этим мы создаём с.м.т., и тогда часть работы пойдёт на изменение потенциальной энергии системы:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i - \left(\sum_i \vec{F}_i' + \sum_i \vec{F}_i \right) d\vec{r}_i = 0.$$

Если с.м.т. замкнута, то внешние силы отсутствуют, т.е. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \dots = \vec{F}_N = 0$ и $\sum_i \vec{F}_i = 0$. В итоге от суммы уравнений останется

$$\sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i - \sum_i \vec{F}_i' d\vec{r}_i = 0.$$

Здесь $\sum_i \vec{F}_i' d\vec{r}_i = \sum_i dA_i$ – бесконечно малая работа всех действующих в с.м.т. внутренних сил. За счет перемещений $d\vec{r}_i$ изменяется взаимное расположение м.т. таким образом, что приводит к уменьшению потенциальной энергии, численно равному работе внутренних сил, взятой со знаком «-». Последнее выражение можно переписать так:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i - \sum_i dA_i = 0,$$

где

$$m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_{Ki}; \quad dA_i = -dE_{Pi}; \quad dE_{Pi} < 0.$$

Для всей с.м.т.

$$\sum_i dE_{Ki} - \sum_i (-dE_{Pi}) = 0,$$

или

$$dE_K + dE_{\Pi} = 0, \text{ и } d(E_K + E_{\Pi}) = 0.$$

Отсюда следует, $E_K + E_{\Pi} = E = \text{const}$, где E – полная механическая энергия с.м.т. Это выражение представляет собой закон сохранения механической энергии: в замкнутой системе м.т. (тел), между которыми действуют только консервативные силы, механическая энергия не изменяется.

Если замкнутая система тел находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а E_{Π} имеет минимальное значение, то без воздействия внешних сил тела системы не могут прийти в движение, т.е. с.м.т. будет находиться в равновесном состоянии. Если таких сил нет, или они

уравновешены ($F_x = 0$), то $\frac{\partial E_{Пх}}{\partial x} = 0$, т.е. предоставленная самой себе система приходит в состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии (тела падают на Землю, вода течет в низины, шарики скатываются в ямки и т.д.).

Взаимодействие двух тел, образующих замкнутую систему, подразделяют, как правило, на два вида: абсолютно упругий удар и абсолютно неупругий удар. В первом случае при ударе одновременно выполняются два закона: закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса. Во втором случае выполняется только закон сохранения импульса. Объясняется различие тем, что абсолютно неупругий удар сопровождается не только упругими, но и пластическими деформациями, т.е. восстановления первоначальной формы и размеров тел не происходит. Таким образом, часть механической энергии необратимо переходит в другие виды энергии, например, в тепловую; отсюда следует, что закон сохранения механической энергии в этом случае неприменим.

Существуют с.м.т. (системы тел), в которых действуют диссипативные силы, например, силы трения. В такой системе механическая энергия при движении составляющих её тел убывает. Следовательно, закон сохранения механической энергии не выполняется. Однако при уменьшении механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Например, при наличии в системе тел сил трения возникает тепловая энергия. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. Так формируется закон сохранения и превращения энергии для изолированной системы тел.

Впервые он был сформулирован М.В. Ломоносовым в его письме к Майеру (немецкий физик): все перемены, в натуре случающиеся, суть такого состояния, что сколько от одного тела отыметя, столько присовокупится другому.

Тема 4. Кинематика вращательного движения тела

§13. Характеристики вращательного движения тела

Изучив кинематику и динамику м.т. перейдём к изучению кинематики и динамики тела. Составить тело из м.т. невозможно, так как последние не имеют размеров, поэтому в физике существует понятие физического тела. В механике физическим телом называется система взаимодействующих частиц массой Δm_i и объёмом ΔV_i каждая, непрерывно заполняющих объём V тела в целом. Вспомним, что абсолютно твёрдым называется тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. По этой причине каждая из частиц, составляющих такое тело, также не испытывает деформаций.

В отличие от м.т. тело может двигаться поступательно и вращательно. Поступательным называется движение, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению (рис. 19).

Вращательным называется движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения (рис. 20). Ось вращения может находиться и вне тела.

При вращательном движении тела радиус-вектор \vec{R} каждой точки тела (вектор, проведённый из центра соответствующей окружности в данную точку) поворачивается за время Δt на один и тот же угол $\Delta\varphi$ – угол поворота твёрдого тела (см. рис. 20). Из определений поступательного и вращательного движений тела следует, что, в отличие от тела, деление движения

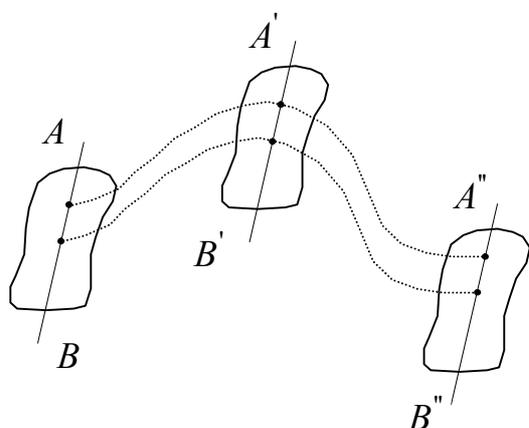


Рис.19. К определению понятия поступательного движения тела

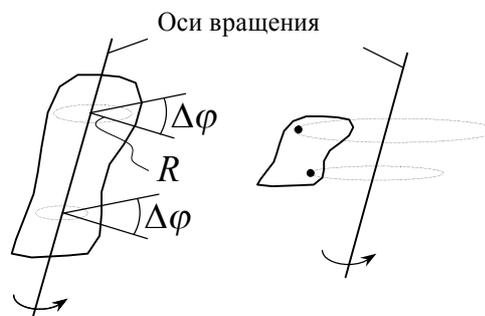


Рис. 20. К определению понятия вращательного движения тела.

м.т. на поступательное и вращательное не имеет смысла, так как м.т. не имеет размеров, и через нее можно провести бесконечное количество прямых и осей вращения. Кроме того, по определению поступательного движения надо иметь две точки тела, которые соединяются прямой.

Чтобы различать вращения тел в противоположных направлениях (по ходу часовой стрелки и против хода) поступают следующим образом. Поворот тела на некоторый угол $d\varphi$ можно задать в виде отрезка, длина которого равна $d\varphi$, а направление совпадает с осью, вокруг которой совершён поворот (рис. 21). Чтобы указать, в какую сторону совершается поворот вокруг данной оси, пользуются правилом правого винта: направление отрезка $d\varphi$ должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него, мы видели поворот тела, совершающийся по ходу часовой стрелки.

Очень малые (элементарные) повороты можно рассматривать как векторные величины. Обозначим угол поворота $d\vec{\varphi}$, тогда угловой скоростью тела называется векторная величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{\omega} \uparrow \uparrow d\vec{\varphi}.$$

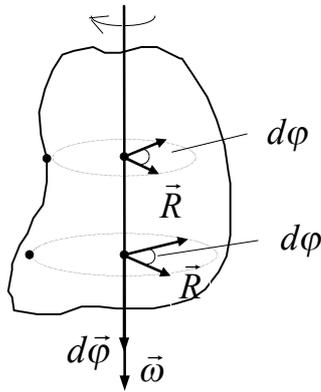


Рис.21. К определению вектора элементарного поворота тела

Модуль вектора угловой скорости равен $\frac{d\varphi}{dt}$. Вращение тела с постоянной угловой скоростью называется равномерным, при этом $\omega = \Delta\varphi / \Delta t$; таким образом, при равномерном вращении величина ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

Единицей измерения угловой скорости является угловая скорость тела, которое при равномерном вращении поворачивается на угол величиной 1 радиан за 1 с (1 рад = 57,3°). Название единицы измерения – 1 рад/с.

Равномерное вращение характеризуется периодом обращения (вращения) T, под которым понимается время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π . Поскольку времени одного оборота $\Delta t = T$ соответствует угол $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

откуда $T = 2\pi / \omega$.

Если N – число оборотов тела за время Δt , то число оборотов ν в единицу времени называют частотой вращения:

$$\nu = \frac{N}{\Delta t} = \frac{N}{NT} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

или $\omega = 2\pi\nu$, где ω часто называется циклической (круговой, от греч. kuklos – круг) частотой вращения тела.

Вектор $\vec{\omega}$ может изменяться как за счёт изменения его модуля (скорости вращения тела вокруг оси), так и за счёт поворота оси вращения в пространстве (изменение по направлению) (рис. 22). Изменение вектора угловой скорости во времени характеризуется угловым ускорением

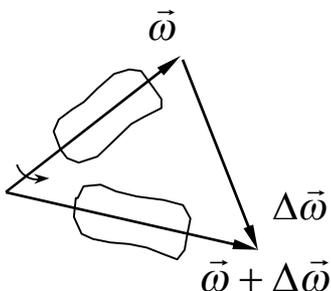


Рис. 22. Приращение вектора угловой скорости вращающегося тела

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Если направление оси вращения постоянно, то $|\Delta \vec{\omega}| = \Delta\omega$. В этом случае выражение для модуля ускорения

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\omega}|}{\Delta t} = \left| \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|.$$

Если под α понимать проекцию вектора α на направление $\vec{\omega}$, то

$$\text{пр.}(\vec{\alpha})_{\vec{\omega}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Видно, что $\alpha > 0$, если $\vec{\alpha}$ и $\vec{\omega}$ коллинеарны; и $\alpha < 0$, если $\vec{\alpha}$ и $\vec{\omega}$ антипараллельны. Если при $t = 0$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$ и $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0$, то $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$ и

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\alpha} t^2}{2}.$$

§14. Связь между векторами \vec{v} и $\vec{\omega}$

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные скорости \vec{v} , которые часто называются линейными, так как точки движутся по линии (по окружности). Величина скорости v определяется угловой скоростью вращения тела ω и расстоянием R от рассматриваемой точки до оси вращения.

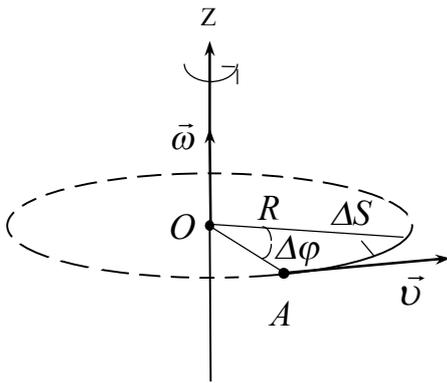


Рис. 23. Связь между кинематическими величинами для м.т. и тела

Если использовать естественный способ описания движения, то точка A , принадлежащая телу, проходит путь (рис. 23)

$$\Delta S = R \Delta \varphi.$$

Линейная скорость точки A

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Выразим через ω нормальное и тангенциальное ускорения точки A тела:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

$$a_\tau = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \right| = R\alpha.$$

В векторной форме связь задаётся следующим образом. Пусть тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Из анализа векторной диаграммы (рис. 24) видно, что:

1. $\vec{v} \perp \text{пл.}(\vec{\omega}, \vec{r})$.
2. Кратчайшее вращение от $\vec{\omega}$ к \vec{r} происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с окончания вектора \vec{v} .
3. $v = \omega R = \omega r \cdot \sin \beta$.

Совокупность этих трёх признаков векторов является определением векторного произведения двух векторов:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{R}$, то

$$[\vec{\omega}, \vec{r}] = [\vec{\omega}, (\vec{r}_z + \vec{R})] = \underbrace{[\vec{\omega}, \vec{r}_z]}_{=0, \vec{\omega} \parallel \vec{r}_z} + [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

В результате можно записать: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Таким образом, для определения положения тела в пространстве при вращательном движении необходимо задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

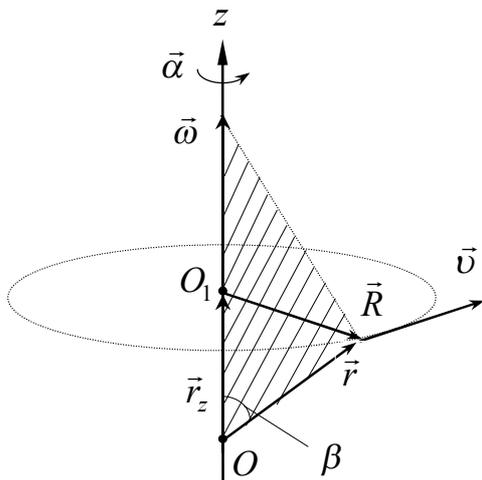


Рис. 24. Векторная диаграмма для вращательного движения

§15. Плоское движение тела

При поступательном движении тела достаточно определить движение одной из точек тела, например его центра масс, чтобы полностью охарактеризовать движение всего тела.

При вращательном движении тела необходимо задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

Опыт показывает, что любое движение абсолютно твёрдого тела может быть представлено как суперпозиция (наложение) двух указанных видов движения.

Наиболее распространённым движением тела в природе и технике является плоское движение. Это такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях (рис. 25). Произвольное перемещение тела из положения I в положение II можно представить как сумму двух перемещений – поступательного движения из положения I в положение I' и поворота вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка.

Очевидно, что такое перемещение можно разбить на два вида бесчисленным множеством способов, однако в любом случае поворот производится на один и тот же угол φ .

Примером плоского движения является качение цилиндра по плоскости без скольжения (рис. 26). Его можно представить как суперпозицию поступательного движения со скоростью \vec{v}_0 и одновременного вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ около оси O , или как совокупность последовательных вращений около оси O_2 , проходящий через движущуюся точку касания цилиндра и плоскости. Такой график называется эпюрой скоростей (от франц. epure – чертеж).

Считая систему отсчёта O_1 неподвижной, можно рассматривать плоское движение тела как вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ в системе отсчёта

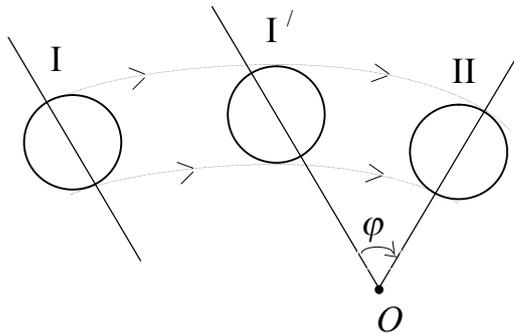


Рис.25. Плоское движение тела

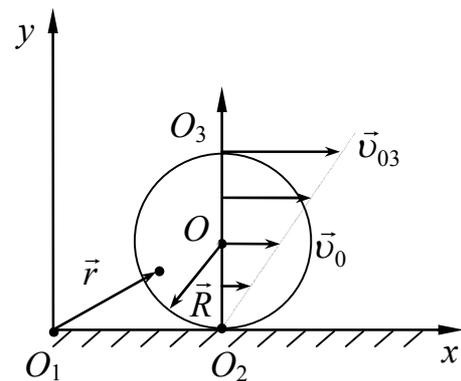


Рис. 26. Эпюра скоростей при качении цилиндра по плоскости

O , которая движется со скоростью \vec{v}_0 относительно системы O_1 .

Тогда скорость \vec{v} любой точки тела может быть представлена в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор от начала отсчёта O_1 до рассматриваемой точки тела. Существуют такие точки тела (они могут лежать либо в пределах тела, либо вне его), которые, участвуя в обоих движениях тела – поступательном и вращательном – будут неподвижны в системе координат O_1 в данный момент времени.

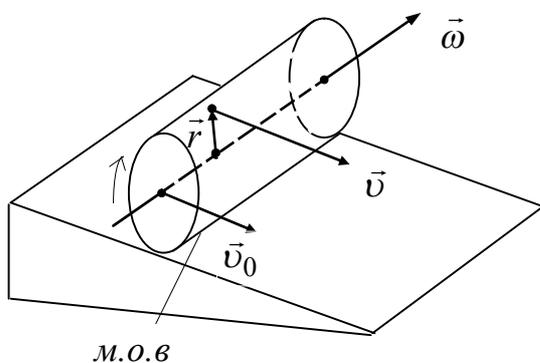


Рис.27. Вращение цилиндра около мгновенной оси вращения

В этом случае

$$\vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] = 0, \text{ или } \vec{v}_0 = -[\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Геометрическое место точек, отвечающее этому соотношению, называется мгновенной осью вращения тела. В случае катящегося цилиндра (рис. 27), мгновенная ось вращения совпадает с линией касания цилиндра и плоскости. Соответственно существуют два способа расчёта скоростей движения тела:

- 1) основанный на суперпозиции движений;
- 2) основанный на непрерывном вращении тела вокруг мгновенной оси вращения.

Тема 5. Динамика поступательного и вращательного движений тела

§16. Движение центра масс абсолютно твёрдого тела при поступательном движении

В соответствии с определением, физическое тело состоит из частиц массой Δm_i , каждая из которых находится под воздействием как внутренних сил, обусловленных взаимодействием частиц между собой, так и под действием внешних сил. Рассмотрим поступательное движение этого тела. Запишем для каждой частицы уравнение II закона Ньютона:

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}'_{ik} + \vec{F}_i,$$

где \vec{F}'_{ik} – равнодействующая приложенных к частице внутренних сил, а \vec{F}_i – равнодействующая всех внешних сил. Перейдём к телу в целом, для этого просуммируем уравнения

$$\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i = \sum_{i,k} \vec{F}'_{ik} + \sum_i \vec{F}_i.$$

В соответствии с III законом Ньютона $\sum_{i,k} \vec{F}'_{ik} = 0$, поэтому

$$\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i.$$

Поскольку $\vec{a}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$, то $\sum_i \Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i$.

Центр масс тела определяется также, как и для с.м.т.:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Вычислив вторую производную по времени радиуса-вектора \vec{r}_c , получим

$$\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}, \text{ или } m \vec{a}_c = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i.$$

Окончательно можно записать

$$m \vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i,$$

т.е. при поступательном движении абсолютно твёрдого тела центр масс тела движется так, как двигалась бы расположенная в центре масс м.т. массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил. Та-

ким образом, для описания поведения тела при поступательном движении надо использовать три закона Ньютона и два закона сохранения – импульса и механической энергии, т.е. так же, как и для м.т.

§17. Динамика вращательного движения тела. Момент силы и момент импульса относительно оси

Установив закономерности поведения тел при поступательном движении, изучим поведение тел при вращательном движении. Чтобы определить, по какому закону динамики вращаются тела, выясним, что такое момент силы и момент импульса. Свойство силы вращать тело характеризуется моментом силы. Рассмотрим тело, вращающееся около оси Oz под действием приложенной силы \vec{F} (рис.28). Моментом силы \vec{F} относительно оси Oz называется векторная величина \vec{M}_z , определяемая выражением

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z.$$

Из определения видно, что \vec{M}_z – это составляющая вдоль оси Oz векторного произведения векторов \vec{r} и \vec{F} . Определим составляющие вектора \vec{M}_z , непосредственно вызывающие вращение тела. Для этого представим вектор \vec{r} в виде двух составляющих $\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{R}$ ($\vec{r}_z \parallel Oz$ и $\vec{R} \perp Oz$), а вектор \vec{F} – в виде трёх составляющих $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_R + \vec{F}_{\tau}$, причём $\vec{F}_{\parallel} \parallel Oz$, $\vec{F}_R \parallel \vec{R}$ и $\vec{F}_{\tau} \perp \text{пл.}(Oz, \vec{R})$ (рис. 29).

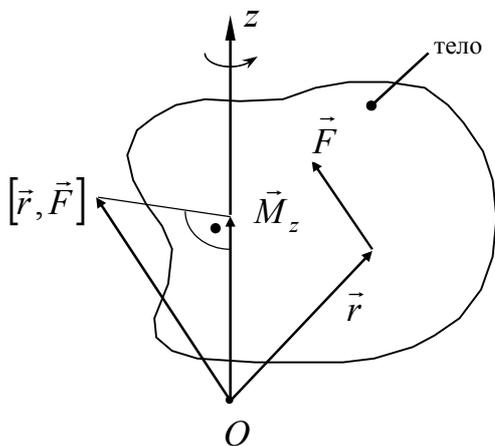


Рис. 28. Векторная диаграмма для момента силы

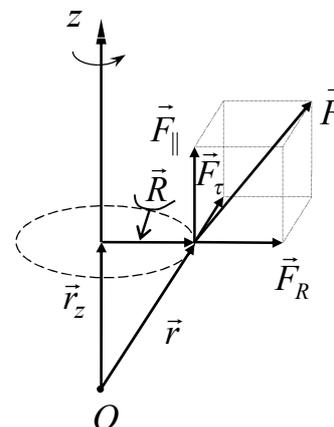


Рис. 29. К определению вектора момента силы

Тогда

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z = [(\vec{r}_z + \vec{R}), \vec{F}]_z = \underbrace{[\vec{r}_z, \vec{F}]_z}_{=0, \perp Oz} + [\vec{R}, \vec{F}]_z.$$

Далее определим составляющую вектора $[\vec{R}, \vec{F}]$ вдоль Oz :

$$[\vec{R}, \vec{F}]_z = [\vec{R}, (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau)]_z = \underbrace{[\vec{R}, \vec{F}_{\parallel}]_z}_{=0} + \underbrace{[\vec{R}, \vec{F}_R]_z}_{=0} + \underbrace{[\vec{R}, \vec{F}_\tau]_z}_{\parallel Oz}.$$

Первое и второе слагаемое равны нулю, так как силы, параллельные и перпендикулярные оси Oz , не могут вызвать вращения тела. Векторное произведение $[\vec{R}, \vec{F}_\tau] \parallel Oz$, поэтому индекс «z» далее не пишется. В итоге получается, что

$$\vec{M}_z = [\vec{R}, \vec{F}_\tau].$$

где $\vec{R} \perp \vec{F}_\tau$, поэтому $|M_z| = RF_\tau$. Величину R называют плечом силы. Таким образом, вращение тела вызывает только сила \vec{F}_τ , плечо которой равно R . Название единицы измерения момента силы – ньютон на метр (Н м).

Взаимодействие вращающихся тел, составляющих какую-либо систему, характеризуется моментом импульса этой системы относительно оси.

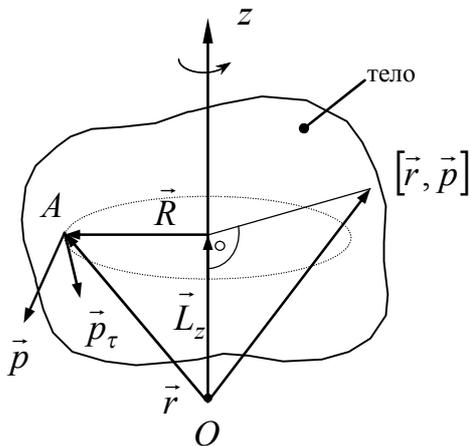


Рис. 30. К определению момента импульса м.т.

Предварительно рассмотрим одно тело, вращающееся около оси Oz в результате удара м.т., импульс которой $\vec{p} = m\vec{v}$, в геометрическую точку A тела, находящуюся на расстоянии \vec{r} от начала отсчета O . При таком взаимодействии свойство импульса \vec{p} приводить тело во вращение характеризуется моментом импульса (рис.30.). Моментом импульса м.т. относительно оси Oz называется векторная величина, определяемая выражением,

$$\vec{L}_z = [\vec{r}, \vec{p}]_z.$$

Разложив векторы \vec{r} и $\vec{p} = m\vec{v}$ на составляющие так, как это было сделано для момента силы относительно оси Oz ($\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{R}$, $\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_R + \vec{p}_\tau$), получим

$$\vec{L}_z = [\vec{R}, \vec{p}_\tau] = [\vec{R}, m\vec{v}_\tau] = m[\vec{R}, \vec{v}_\tau].$$

Поскольку $\vec{R} \perp \vec{v}_\tau$ и $\sin(\vec{R}, \vec{v}_\tau) = 1$, то $\vec{L}_z = mR\vec{v}_\tau$. Соответствующая этой записи векторная диаграмма представлена на рис. 31. Название единицы измерения момента импульса – кгм²/с.

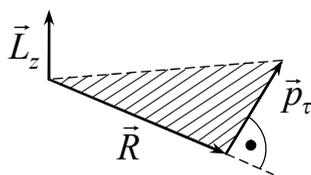


Рис. 31. Пространственное соотношение между векторами \vec{L}_z, \vec{R} и \vec{p}_τ

§18. Момент инерции тела

При поступательном движении тела мерой его инертности является масса. Вращательное движение тела носит принципиально иной характер, поэтому мерой инертности тела при вращательном движении должна быть иная величина. Для ее определения вычислим сначала момент импульса системы м.т., которая вращается около оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Рассмотрим i -тую м.т. массой m_i расположенную на расстоянии \vec{r}_i от начала координат O (рис. 32), и которая вместе с системой вращается около оси Oz . Вычислим момент импульса этой м.т.:

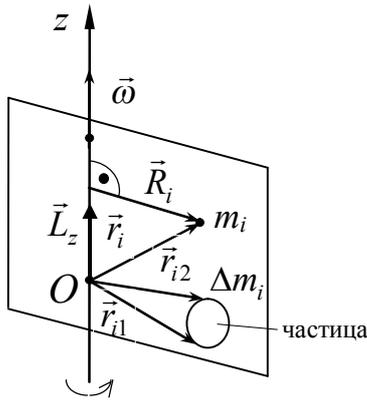


Рис. 32. К определению момента импульса системы

$$\vec{L}_{zi} = m_i [\vec{R}_i, \vec{v}_{ti}] = m_i [\vec{R}_i, [\vec{\omega}, \vec{R}_i]].$$

Здесь $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения радиуса-вектора \vec{R}_i от оси вращения до м.т. Из векторной алгебры известно, что последняя формула суть двойное векторное произведение, вычислив которое получим:

$$\vec{L}_{zi} = m_i \vec{R}_i^2 \vec{\omega}.$$

Перейдём к системе м.т.. Произведём суммирование с учетом того, что $\vec{R}_i^2 = R_i^2$:

$$\vec{L}_z = \sum_i \vec{L}_{zi} = \sum_i m_i R_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_i m_i R_i^2.$$

Обозначим сумму $\sum_i m_i R_i^2 = J_z$, тогда

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}. \text{ (Сравнить с } \vec{p} = m\vec{v} \text{). Для одной м.т. (} i=1 \text{) } J_z = mR^2.$$

Физическая величина, равная сумме произведений масс м.т. и квадратов их расстояний до оси Oz называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси Oz . Он характеризует не только массу системы, но и распределение м.т. m_i относительно оси Oz , т.е. учитывает форму с.м.т..

Перейдём от с.м.т. к абсолютно твёрдому телу, т.е. к системе абсолютно твердых частиц массой Δm_i каждая (см. рис. 32). Тогда

$$J_z \cong \sum_i \Delta m_i r_i^2.$$

Знак приближённого равенства означает, что в отличие от м.т., частица обладает размерами и r_i является усреднённой величиной. Чтобы учесть распределение Δm_i относительно Oz , т.е. учесть форму тела, перейдём к объёму частицы ΔV_i :

$$\Delta m_i = \rho \Delta V_i,$$

где $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V'} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ – объёмная плотность вещества; $\Delta V'$ – физически бесконечно малый объём, который одновременно удовлетворяет двум условиям:

1) он достаточно мал, чтобы в его пределах плотность вещества не изменялась, т.е. $\rho = \text{const}$.

2) он достаточно велик, чтобы в его пределах не проявлялось атомарное строение вещества. Таким образом, частица – это часть тела, соизмеримая с физически бесконечно малым объёмом тела. Размеры частицы в любом направлении измерения составляют для кристаллического тела примерно сто межатомных расстояний.

Тогда

$$J_z \cong \sum_i \rho r_i^2 \Delta V_i.$$

Чтобы найти точное равенство, необходимо совершить предельный переход

$$J_z = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V'} \sum_i \rho r_i^2 \Delta V_i = \int_0^V \rho r^2 dV.$$

Эта формула – определение момента инерции тела в математической форме.

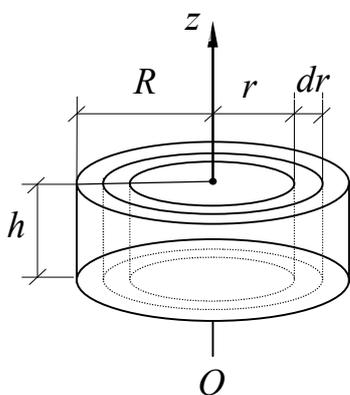


Рис. 33. К расчету момента инерции

для интегрирования форме. Для этого в данном случае разобьём диск мысленно на кольцевые слои бесконечно малой толщины dr . Все точки одного слоя находятся на одинаковом расстоянии от оси, равном r . Объём такого слоя

$$dV = h2\pi r \cdot dr.$$

Поскольку диск однороден, то

$$J_z = \rho \int_0^V r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 h 2\pi r dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi h \rho R^4.$$

Поскольку масса диска $m = \pi R^2 h \rho$, то $J_z = \frac{mR^2}{2}$.

Момент инерции тела относительно произвольной оси определяется с помощью формулы Штейнера (немецкий математик)

$$J_z = J_c + ma^2$$

– момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной произвольной оси и произведения массы тела и квадрата расстояния между осями. Например, для диска (рис. 34).

$$J_z = J_c + ma^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Моменты инерции различных тел приведены в таблицах. Название единицы измерения момента инерции – кг·м².

§19. Уравнение динамики вращательного движения тела

Основное уравнение классической механики для поступательного движения тела нам известно:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Как выглядит аналогичное уравнение при вращательном движении?

Рассмотрим систему частиц, которая вращается около оси Oz . С одной стороны, момент импульса i -той частицы в соответствии с определением равен:

$$\vec{L}_{zi} = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]_z.$$

Для системы частиц, т.е. для а.т.т.

$$\vec{L}_z = \sum_i \vec{L}_{zi}.$$

Определим зависимость \vec{L}_z от времени. Для этого вычислим первую производную от \vec{L}_z по времени. В результате получим, что

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_{zi}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]_z = \sum_i \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i \right]_z + \sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]_z.$$

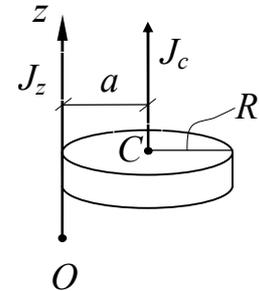


Рис. 34.
Иллюстрация
формулы
Штейнера

В этом уравнении первая сумма равна нулю, так как $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$, а векторное произведение $[\vec{v}_i, \vec{p}_i]_z = 0$, так как $\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$. Во второй сумме

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(p)},$$

где $\vec{F}_i^{(p)}$ – равнодействующая внешних \vec{F}_i и внутренних \vec{F}'_{ik} сил, приложенных к i -той частице абсолютно твердого тела. В результате

$$\sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]_z = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{(p)} \right]_z = \sum_i \vec{M}_{zi}^{(p)}.$$

Здесь $\vec{M}_{zi}^{(p)}$ – равнодействующий момент внешних и внутренних сил, приложенных к i -той частице, т.е.

$$\vec{M}_{zi}^{(p)} = \vec{M}_{zi} + \vec{M}'_{zi}.$$

Рассмотрим взаимодействие двух частиц, принадлежащих а.т.т. Внутренние силы, с которыми взаимодействует две любые частицы тела, лежат на одной прямой (рис. 35). Их моменты относительно оси, проходящей через т. O и перпендикулярной плоскости рисунка равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и векторная сумма моментов всех внутренних сил для любого тела всегда равна нулю:

$$\vec{M}'_{ik} + \vec{M}'_{ki} = 0 \text{ и } \sum_{i \neq k} \vec{M}'_{ik} = 0.$$

Таким образом, для а.т.т.

$$\sum_i \vec{M}_{zi}^{(p)} = \sum_i \vec{M}_{zi} = \vec{M}_z,$$

где \vec{M}_z – результирующий момент внешних сил, приложенных к а.т.т. В результате получается, что

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z.$$

Это уравнение и есть уравнение динамики вращательного движения тела.

Сравним с основным уравнением классической механики:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

С другой стороны, момент импульса а.т.т.

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}.$$

Так же продифференцировав это выражение по времени, получим

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_z = \frac{d}{dt} J_z \vec{\omega} = J_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J_z \vec{\alpha}.$$

Приравнивая правую часть уравнения динамики вращательного движения и правую часть последнего уравнения, получим, что

$$\vec{M}_z = J_z \vec{\alpha}.$$

Это уравнение аналогично уравнению II закона Ньютона для поступательного вращения тела:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Из уравнения

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}_z}{J_z}$$

видно, что угловое ускорение вращающегося а.т.т. прямо пропорционально результирующему моменту внешних сил, действующих на тело и обратно пропорционально моменту инерции тела.

Отсюда следует физический смысл момента инерции. Это мера инертности тела при вращательном движении. Однако, чтобы обладать моментом инерции телу не обязательно вращаться. Аналогии характеристик поступательного и вращательного движений тела представлены в таблице.

Таблица

Аналогии характеристик поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	Вращательное движение
\vec{v} – линейная скорость	$\vec{\omega}$ – угловая скорость
\vec{a} – линейное ускорение	$\vec{\alpha}$ – угловое ускорение
m – масса	J_z – момент инерции
\vec{F} – сила	\vec{M}_z – момент силы
\vec{p} – импульс	\vec{L}_z – момент импульса
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}$
$\vec{a} = \vec{F} / m$	$\vec{\alpha} = \vec{M}_z / J_z$
$d\vec{p} / dt = \vec{F}$	$d\vec{L}_z / dt = \vec{M}_z$

§20. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему из N абсолютно твёрдых тел (а.т.т.), на которые действуют внутренние и внешние силы и моменты сил. Равнодействующий момент внутренних сил, действующих на i -тое тело обозначим \vec{M}'_i , равнодействующий момент внешних сил, действующих на то же тело обозначим \vec{M}_i . Тогда для i -того тела из уравнения динамики вращательного движения тела относительно произвольной оси (без индекса «z»)

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}'_i + \vec{M}_i.$$

Сложим соответствующие части этих уравнений для N а.т.т., чтобы перейти к системе тел:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}'_i + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i.$$

Величина $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$ – есть момент импульса системы а.т.т. Векторная сумма моментов внутренних сил системы равна нулю, поэтому остается

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M},$$

где \vec{M} – суммарный момент внешних сил, приложенных к системе. Для замкнутой системы тел $\vec{M} = 0$, так как внешние силы по определению отсутствуют, поэтому

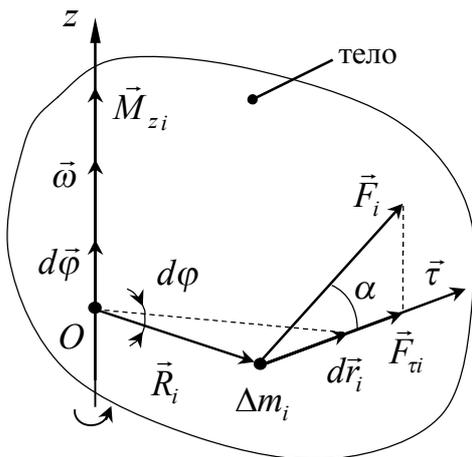
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ и } \vec{L} = \text{const.}$$

Таким образом, момент импульса замкнутой системы тел не изменяется – это закон сохранения момента импульса. Если система не замкнута, но равна нулю проекция M_z вектора \vec{M} на некоторую ось, например ось Oz , то составляющая \vec{L}_z момента импульса вдоль этой же оси не изменяется:

$$\vec{L}_z = \text{const}, \text{ или } J_z \vec{\omega} = \text{const.}$$

§21. Работа внешних сил и кинетическая энергия тела при вращательном и плоском движениях

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 36) с угловой скоростью $\vec{\omega}$; \vec{F}_i – внешняя сила, приложенная к частице массой Δm_i . Работа силы \vec{F}_i за время dt



работы $dA_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = F_i dr_i \cos \alpha = F_{ti} dS_i$, т.к. $|d\vec{r}_i| = dS_i$. За время dt частица, двигаясь по окружности, проходит путь

$$dS_i = R_i d\varphi.$$

Тогда работа dA_i вычисляется так:

$$dA_i = F_{ti} R_i d\varphi = M_{zi} d\varphi.$$

В векторной форме $dA_i = \vec{M}_{zi} \cdot d\vec{\varphi}$.

(Сравним с $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ для поступательного движения тела).

Рис. 36. Вращение тела вокруг неподвижной оси

В целом для вращающегося тела, на которое действует несколько моментов \vec{M}_i

$$dA = \sum_i dA_i = \sum_i \vec{M}_{zi} d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi} \sum_i \vec{M}_{zi} = \vec{M}_z d\vec{\varphi} = \vec{M}_z \vec{\omega} dt.$$

По этой формуле вычисляется работа внешних сил при вращательном движении тела. Мгновенная мощность моментов внешних сил, приложенных к вращающемуся телу, вычисляется так:

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{M}_z \vec{\omega}.$$

Сравним с формулой для поступательного движения тела: $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Вычислим кинетическую энергию тела, вращающегося около неподвижной оси Oz . Кинетическая энергия i -той частицы

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \omega^2 R_i^2}{2}.$$

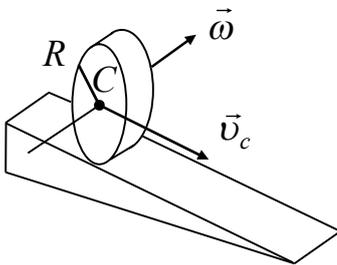
Кинетическая энергия тела в целом

$$E_k = \sum_i \Delta E_{ki} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Сравним с аналогичной формулой для поступательного движения тела:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Если тело участвует в плоском движении, которое можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений (рис. 37), то



$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где v_c – линейная скорость центра масс, J_c – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

Рис. 37. Плоское движение диска

Таким образом, кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения тела со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения тела около оси, проходящей через центр масс тела. Например, для катящегося диска

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} = \frac{m}{2} (\omega R)^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \omega^2 = \frac{mR^2}{2} \omega^2 + \frac{mR^2}{2} \frac{\omega^2}{2} = \\ &= \frac{mR^2}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 = \frac{3}{2} J_c \omega^2 = \frac{3}{4} mv_c^2. \end{aligned}$$

Мы изучили физические основы механики. Далее, в курсах теоретической механики и сопротивления материалов будут изучены расчетные методы определения свойств механических систем.

ГЛАВА II. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Тема 6. Гармонические колебания

§22. Свободные гармонические колебания

Колебаниями называют движения объектов или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени физических величин, описывающих эти движения или процессы. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электро-механические, электромагнитные и т.д. В зависимости от воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему тел, различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными называют колебания, совершаемые системой тел за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на систему.

Вынужденными называют такие колебания системы тел, в процессе которых колеблющаяся система подвергается периодически изменяющемуся внешнему воздействию.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на систему тел внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой системой. Например, маятник часов.

При параметрических (от греч. parametron – отмеривающий) колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы тел. Например, человек на качелях совершает параметрические колебания, при этом меняющимся параметром является расстояние от точки подвеса до центра масс человека.

С точки зрения математического описания простейшими являются гармонические колебания (от греч. harmoso – приводить в порядок), при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Изучение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, близки к гармоническим; 2) различные непериодические процессы (например, импульсные) можно представить как суперпозицию гармонических колебаний (теорема Фурье). Гармонические колебания некоторой величины x описываются уравнением типа

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A – амплитуда (от лат. amplitude – величина) колебаний; это максимальное значение колеблющейся величины ($A \geq 0$); $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза (от греч.

phasis – проявление) колебаний; ω_0 – круговая (циклическая) частота; φ – начальная фаза колебаний, т.е. фаза колебаний в момент времени $t = 0$. Так как косинус угла изменяется в пределах от +1 до -1, то x может принимать значения от $+A$ до $-A$. Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T , называемый периодом колебаний. За период фаза (аргумент косинуса) получает приращение 2π , т.е. период – это время одного полного колебания:

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, одним из главных признаков колебаний является периодичность.

Величина, равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени, называется частотой колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

или

$$\omega_0 = 2\pi\nu,$$

т.е. ω_0 – число колебаний за 2π секунд. В честь немецкого физика Герца выбрано название единицы частоты – герц (Гц): 1 Гц – частота гармонических колебаний, при которых за 1 с совершается одно полное колебание.

Зададим конкретный физический смысл величины x . Пусть материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси координат Ox около положения равновесия, совпадающего с началом координат, тогда величина x есть не что иное, как координата м.т.:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Скорость v колеблющейся точки, называемая колебательной скоростью

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \dot{x}.$$

Ускорение a колеблющейся точки

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = \ddot{x}.$$

Таким образом, в результате дифференцирования получают уравнения гармонических колебаний той же циклической частоты. Амплитуды скорости и ускорения соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$ (рис. 38 для $\varphi=0$). Фаза скорости отличается от фазы координаты x на $\pi/2$, а фаза ускорения отличается от фазы координаты x на π , т.е. имеет противоположную фазу.

Следовательно, в моменты времени, когда $x=0$, \dot{x} приобретает наибольшие значения, когда же x достигает максимального отрицательного

значения, то \ddot{x} приобретает наибольшее положительное значение. Из выражения для \dot{x} следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний. В самом деле

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \underbrace{A \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{=x} = -\omega_0^2 x,$$

отсюда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний. Решением дифференциальных уравнений являются функции. В частности, решение этого дифференциального уравнения выглядит так:

$$x = ae^{-i\omega_0 t} + be^{i\omega_0 t}.$$

Для сокращения математических действий подобное выражение переводят в комплексную форму по формуле Эйлера для комплексных чисел

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, поэтому решение дифференциального уравнения свободных гармонических колебаний можно записать так

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

Здесь символ « \sim » (тильда) означает, что решение уравнения переведено в комплексную форму.

Далее выполняют необходимые математические операции и из комплексной формы математические выражения возвращают в исходную форму. Такой прием существенно сокращает число математических операций, поскольку над показателями степеней производятся только арифметические действия.

Возвращение в исходную форму заключается в выделении из комплексной формы вещественной (реальной) части:

$$\operatorname{Re}(\tilde{x}) = x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Это выражение называется уравнением движения м.т., совершающей свободные гармонические колебания.

Сила $F = ma$, действующая на материальную точку массой m ,

$$F = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x.$$

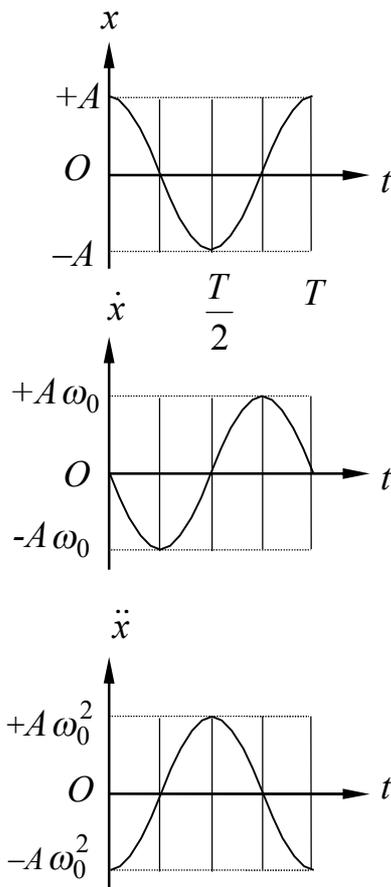


Рис. 38. Графики гармонических колебаний координаты, скорости и ускорения м.т. ($\varphi = 0$)

Следовательно, сила пропорциональна координате м.т., взятой с противоположным знаком.

Кинетическая энергия м.т., совершающей гармонические колебания,

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)].$$

Здесь переход от квадрата синуса к косинусу в первой степени осуществлён с целью построения графиков.

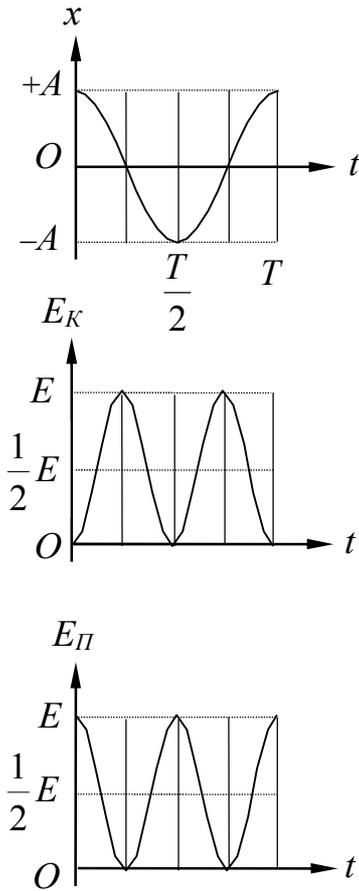


Рис. 39. Графики гармонических колебаний координаты, кинетической и потенциальной энергии м.т. ($\varphi = 0$)

Потенциальная энергия м.т., совершающей гармонические колебания под действием силы $F = -m\omega_0^2 x$, находится из

выражения $F = -\frac{dE_П}{dx}$, откуда

$dE_П = -Fdx$ и

$$\begin{aligned} E_П &= -\int_0^x Fdx = -\int_0^x (-m\omega_0^2)x dx = \\ &= \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \end{aligned}$$

Сложив формулы для E_K и $E_П$ получим, во-первых, что

$$\begin{aligned} E_K + E_П &= E = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \underbrace{[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]}_{=1} = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \end{aligned}$$

А во-вторых, из формул следует, что E_K и $E_П$ изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. с частотой, которая в 2 раза превышает частоту гармонического колебания. На

рис.39. представлены графики зависимости x , E_K и $E_П$ от времени. Так как

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2},$$

то нетрудно видеть, что

$$\langle E_K \rangle = \langle E_П \rangle = \frac{1}{2} E.$$

§23. Гармонический осциллятор. Маятники

В природе и технике существует множество колебательных систем, описываемых одной физической моделью, называемой гармоническим осциллятором. Гармонический осциллятор (от лат. *oscillo* – качаюсь) – это система тел, движение которой описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Поведение гармонического осциллятора является важным примером периодического движения и служит точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Модели гармонического осциллятора простираются от орбитального момента импульса электрона и атома в кристаллической решетке до пружинного и других маятников.

1. Пружинный маятник. На примере поступательного движения рассмотрим систему, состоящую из шарика массой m , подвешенного на пружине (рис. 40 а) в отсутствие сил сопротивления движению. В состоянии равновесия сила тяжести $m\vec{g}$ уравнивается упругой силой \vec{F}_1 , действующей на шарик со стороны пружины. Из условия равновесия для состояния а):

$$\vec{F}_1 + m\vec{g} = 0.$$

Здесь $F_1 = k\Delta l_1$ в соответствии с законом Гука (английский физик), где k – коэффициент жесткости пружины ($k = F_1$ при $\Delta l_1 = 1$ м).

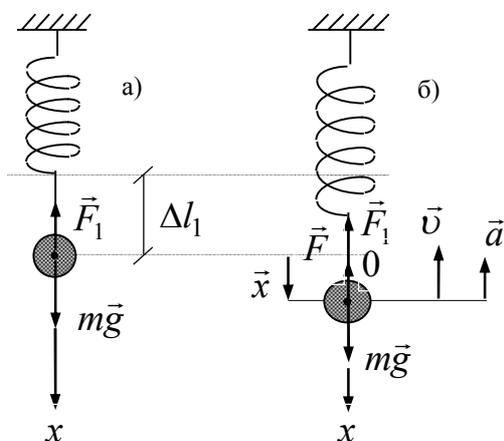


Рис. 40. Пружинный маятник

Отклонение шарика от положения равновесия характеризуется вектором смещения \vec{x} (рис. 40 б). Модуль вектора численно равен длине отрезка, заключенного между началом координат (положение равновесия) и координатой положения шарика в данный момент, а направление – направление от начала координат до положения шарика. Сила, возвращающая шарик в положение равновесия всегда направлена противоположно вектору \vec{x} , и по этому же закону Гука соотношение между ними имеет вид:

$$\vec{F} = -k\vec{x}.$$

Следует помнить, что, несмотря на последнее равенство величина $k\vec{x}$ не является силой, а есть лишь способ ее вычисления.

Если вывести шарик из положения равновесия и отпустить его, то он будет совершать колебательное движение вдоль Ox с ускорением \vec{a} :

$$m\vec{a} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{F}_1}_{=0} + \vec{F},$$

отсюда

$$m\vec{a} - \vec{F} = 0, \text{ или } m\vec{a} + k\vec{x} = 0.$$

Направление векторов видны из рис. 39, поэтому перепишем последнее уравнение для модулей этих векторов. В результате получим, что

$$m\ddot{x} + kx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2} x = 0.$$

В результате получилось не что иное, как дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

т.е. колебания шарика на пружине являются свободными гармоническими. Решение этого уравнения нам известно – это уравнение движения м.т., совершающей свободные гармонические колебания:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Период колебаний маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия пружинного маятника

$$E_{\text{П}} = \frac{m}{2} \omega_0^2 \underbrace{A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}_{=x^2} = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 = \frac{kx^2}{2}.$$

2. Физический маятник. На примере вращательного движения рассмотрим а.т.т., совершающее под действием силы тяжести колебания около неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела. В положении равновесия центр масс C маятника расположим ниже точки подвеса O маятника на одной вертикали с ней (рис. 40). Колебания такого маятника можно рассматривать как совокупность вращений около оси, проходящей через точку O , при этом угол φ отклонения прямой OC от вертикали представляет собой угловое смещение маятника от положения равновесия. Если отклонить маятник от положения равновесия на некоторый угол φ и отпустить его, то возникает вращающий момент \vec{M} возвращающей силы \vec{F}_τ , который возвращает маятник в положение равновесия. В соответствии с уравнением динамики вращательного движения получим, что

$$J\vec{\alpha} = \vec{M}.$$

Так как маятник отклонён от положения равновесия против хода часовой стрелки, то по правилу правого винта вектор углового смещения $\vec{\varphi}$ направлен противоположно оси Oz , и, следовательно, противоположен вектору \vec{M} (см. рис. 41):

$$\vec{M} = -b\vec{\varphi},$$

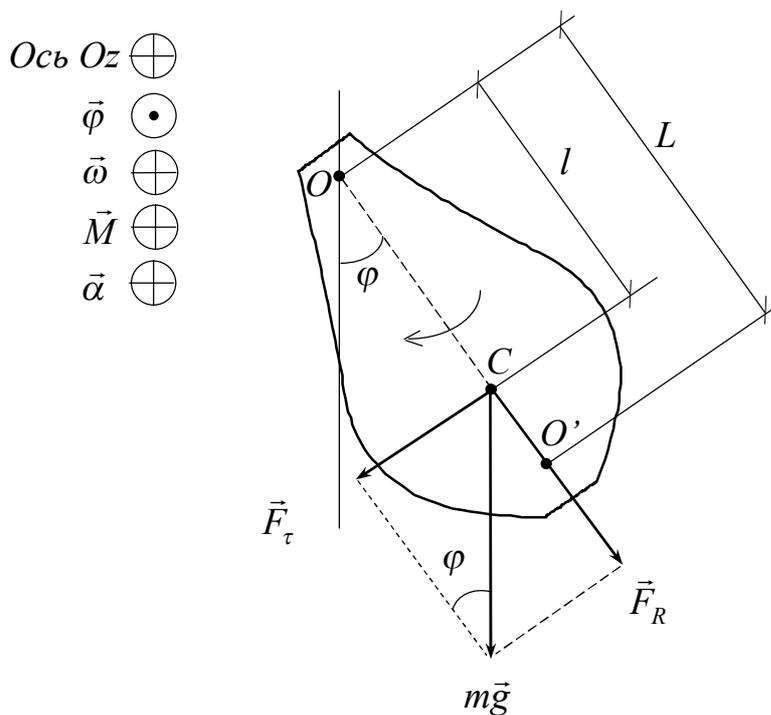


Рис. 41. Физический маятник

где b – коэффициент, учитывающий свойства маятника: расстояние l и массу m . Сравним с соответствующим выражением для пружинного маятника $\vec{F} = -k\vec{x}$. В итоге уравнение динамики вращательного движения примет вид:

$$J\vec{\alpha} = -b\vec{\varphi},$$

или

$$J\vec{\alpha} + b\vec{\varphi} = 0.$$

Установив векторные соотношения, перепишем последнее уравнение для модулей векторов. По определению момента силы его

модуль равен

$$|\vec{M}| = F_{\tau}l = mg \sin \varphi \cdot l.$$

Для простоты расчетов рассматриваем малые углы ($\leq 5^\circ$), в этом случае $\sin \varphi = \approx \text{tg} \varphi = \varphi$ (в рад). Такие колебания называются малыми. С учетом этого для малых колебаний

$$M = mgl\varphi, \text{ т.е. } b = mgl.$$

Таким образом

$$J\ddot{\varphi} + mgl \cdot \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{mgl}{J}}_{=\omega_0^2} \varphi = 0.$$

Окончательно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Сравним с уравнением свободных гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение этого уравнения нам известно. В рассматриваемом случае

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \beta).$$

Отсюда следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания циклической частотой ω_0 и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где $L = J/ml$ – приведенная длина физического маятника, а $J = J_c + ml^2$ в соответствии с формулой Штейнера.

Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины L , называется центром качаний маятника. Точка подвеса O и центр качаний O' обладают свойством взаимозаменяемости: если ось подвеса сделать проходящей через центр качаний, то т. O прежней оси подвеса станет новым центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится. На этом свойстве взаимности основано определение ускорения силы тяжести на любой географической широте с помощью оборотного маятника (рис. 42).

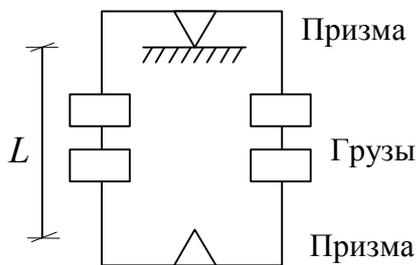


Рис. 42. *Оборотный маятник*

Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными призмами равно L . Измерив период T и приведенную длину L можно по формуле для периода вычислить g .

3. Математический маятник. Это идеализированная система тел, состоящая из м.т. массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити и колеблющаяся под дей-

ствием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Момент инерции математического маятника как м.т.

$$J = ml^2,$$

где l – длина маятника. Так как математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся масса физического маятника сосредоточена в одной точке – центре масс, то, подставив $J = ml^2$ в формулу $T = 2\pi \sqrt{J/(mgl)}$, получим известное выражение для малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

– формула Гюйгенса (голландский физик).

Сравнивая формулы для периодов колебаний физического маятника и математического маятника видим, что если $L = l$, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, L – это длина такого математического маятника,

период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

§24. Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

В теории колебаний часто используется так называемый метод векторных диаграмм, в котором гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды (рис. 43). Такое представление колебаний дает возможность математически просто решить ряд задач, например, задачу о сложении колебаний.

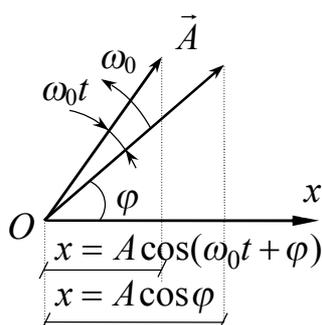


Рис. 43. Метод векторных диаграмм

Графическое представление колебаний осуществляется следующим образом. Из произвольной т. O , выбранной на оси Ox , под углом φ , равным начальной фазе колебаний, направляется вектор \vec{A} , модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания. Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция окончания вектора будет перемещаться по оси Ox и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина — координата x будет изменяться со временем по закону $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Здесь ω_0 из угловой скорости превратилась в циклическую (круговую) частоту. Отсюда термин «круговая».

Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды \vec{A} , отложенного из произвольной точки под углом φ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. На рис. 44 изображена физическая модель системы, колебания которой являются результатом сложения двух колебаний одного направления. Сложим колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 45). Так как векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной. Из диаграммы очевидно, что результирующее колебание описывается уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

В этом выражении амплитуда A вычисляется по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

так как

$$\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Соответственно начальная фаза колебаний φ определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

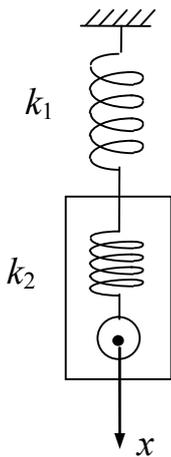


Рис. 44. Колебания тела на двух пружинах

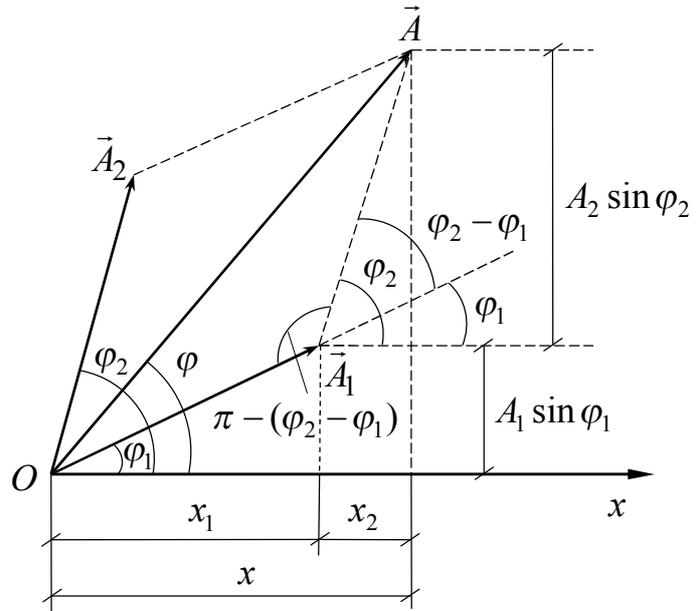


Рис. 45. Векторная диаграмма колебаний одного направления

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание по тому же направлению и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ складываемых колебаний.

Проанализируем полученные выражения в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ с учетом того, что $2m$ – всегда четное число, а $(2m + 1)$ – всегда нечетное число:

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний, а при $A_1 = A_2$ результирующая амплитуда $A = 0$, т.е. изображенное

на рис. 44 тело будет покоится, так как если одна пружина растягивается, то другая пружина на такую же величину сжимается.

§25. Биения

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Биениями называют гармонические изменения амплитуды результирующего колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами. Биения возникают вследствие того обстоятельства, что разность фаз двух складываемых колебаний изменяется таким образом, при котором колебания оказываются в какой-то момент времени в одинаковой фазе, а в другой момент времени – в противофазе и так далее.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A \cos \omega t, \\ x_2 &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned} \right\}$$

Произведя сложение по формуле

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

получим

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

Здесь учтено, что во втором сомножителе $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$ и $\frac{\Delta\omega}{2} t \ll \omega t$. Получившееся выражение есть произведение уравнений двух колебаний. Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то сомножитель, стоящий в скобках, почти не изменится, в то время как другой сомножитель $\cos \omega t$ совершит несколько полных колебаний. Поэтому результирующее колебание x можно рассматривать как гармоническое частотой ω , амплитуда A^* которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$x = A^* \cos \omega t.$$

Соответственно

$$A^* = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|.$$

Таким образом, биения представляют собой один из вариантов колебаний, амплитуда которых модулируется (от лат. modulatio – мерность) во времени, т.е. это амплитудно-модулированные (АМ) колебания.

Период биений

$$T^* = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

График зависимости $x = x(t)$ при биениях показан на рис. 46, где сплошные линии изображают график результирующего колебания, а их огибающая изображает график медленно меняющейся амплитуды.

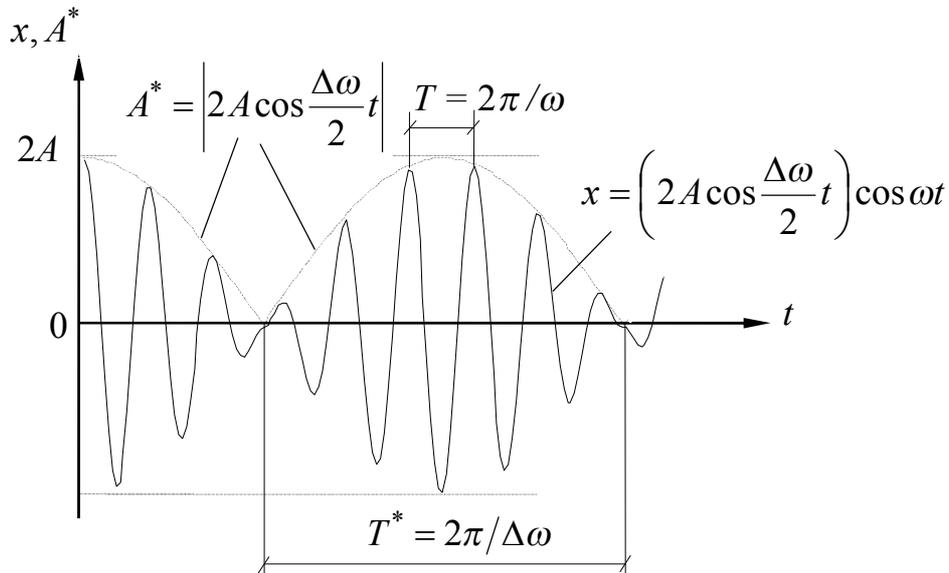


Рис. 46. График колебаний м.т. при биениях

Определение частоты биений при наложении измеряемого и эталонного колебаний – один из наиболее точных методов измерения частоты неизвестного колебания, так как T^* – большая величина и ее легко измерить с наименьшей погрешностью.

§26. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей Ox и Oy . Например, колебания пружинного качающегося маятника (рис. 47) представляют собой суперпозицию колебаний математического и пружинного маятников, для которых периоды колебаний равны, соответственно

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T_{np} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В этом случае результирующее колебание будет также гармоническим. Для простоты расчетов начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A \cos \omega t,$$

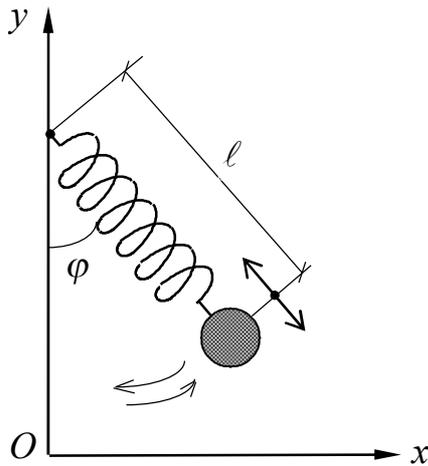


Рис. 47. Модель системы, совершающей взаимно перпендикулярные колебания

$$y = B \cos(\omega t + \varphi).$$

Разность фаз обоих колебаний равна φ , A и B – амплитуды складываемых колебаний. Уравнения записаны в так называемой параметрической форме, где параметром является общая для обоих уравнений переменная – время t . Задачей расчета является получение уравнения, непосредственно связывающего величины x и y . Уравнение траектории результирующего колебания находится путем исключения из выражений параметра t . Перепишем уравнения следующим образом, чтобы избавиться от параметра t :

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t;$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi.$$

Используем основное тригонометрическое тождество; тогда

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Результат подставим в выражение для $\frac{y}{B}$:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi;$$

Далее выполним простые преобразования

$$\begin{aligned} \frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi &= -\sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}; \\ \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi &= \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi; \\ \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi + \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi &= \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

В этом выражении

$$\frac{x^2}{A^2} (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_{=1}) = \frac{x^2}{A^2}.$$

В результате получим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

В итоге получается уравнение эллипса (от греч. *ellipsis* – выделяю), оси которого произвольно ориентированы относительно координатных осей (рис. 48). Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются эллиптически поляризованными (от греч. *polos* – ось). Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд и разности фаз φ складываемых колебаний.

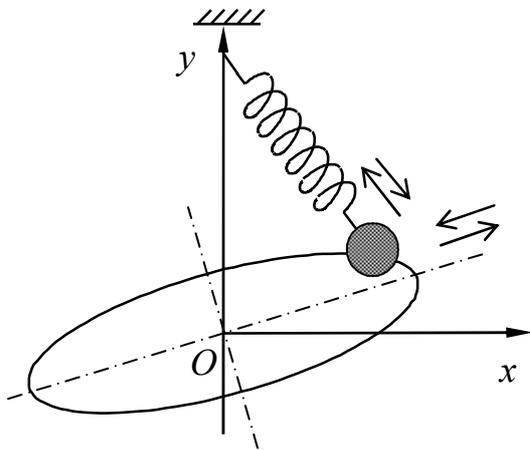


Рис. 48. Траектория пружинного качающегося маятника

Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

$$1) \varphi = \pm 2m \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

тогда

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \quad \text{и} \quad y = \pm \frac{B}{A} x.$$

Результирующие колебания являются гармоническими частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, совершающимися вдоль прямой, составляющей с осью Ox угол $\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A} \cos 2m \frac{\pi}{2}\right)$

(рис. 49). Такие колебания называются линейно поляризованными. В этом случае расстояние колеблющейся точки от начала координат равно:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{или для } \varphi = 0, \quad l = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t.$$

$$2) \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ тогда}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 50).

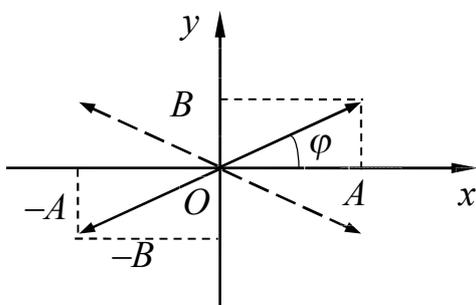


Рис. 49. Линейно поляризованные колебания

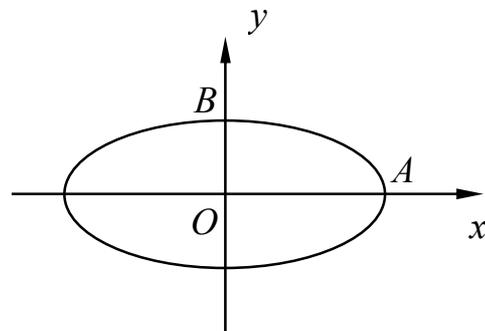


Рис. 50. Эллиптически поляризованные колебания

Кроме того, если $A = B = R$, то эллипс вырождается в окружность, уравнение которой $x^2 + y^2 = R^2$. Такие колебания называют поляризованными по кругу.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна.

Замкнутые траектории, создаваемые точкой, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу (французский физик).

Анализ этих фигур – широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний. Поэтому они находят широкое применение в измерительной технике.

Тема 7. Затухающие и вынужденные колебания

§27. Свободные затухающие колебания

В любой реальной колебательной системе всегда имеются силы сопротивления движению, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается, называют затухающими.

Рассмотрим модель системы, совершающей свободные затухающие колебания (рис. 51). В рассматриваемый момент времени шарик массой m и объемом V движется вниз со скоростью \vec{v} . Поскольку сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\rho_{жс}\vec{g}V$ в создании колебательного процесса не участвуют, то их изображать не будем.

Уравнение движения тела запишем в виде:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_r.$$

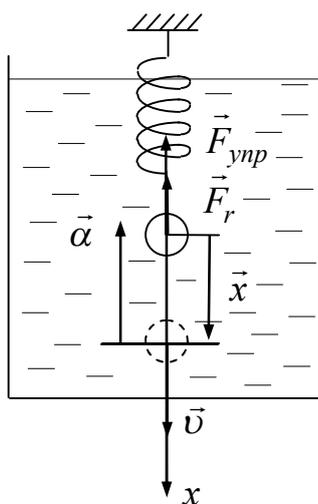


Рис. 51. Свободные затухающие колебания пружинного маятника

Здесь $\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$ – сила упругости пружины, возвращающая систему тел в исходное положение; $\vec{F}_r = -r\vec{v} = -r\dot{\vec{x}}$ – сила сопротивления движению шарика, направленная противоположно скорости шарика \vec{v} , r – коэффициент сопротивления

С учетом зависимостей сил от координаты и скорости получим, что

$$m\vec{a} + k\vec{x} + r\vec{v} = 0.$$

Направления сил видны из рис. 51, поэтому запишем последнее уравнение для модулей сил:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0.$$

Разделив левую и правую часть этого уравнения на массу шарика m и используя обозначения

$$2\delta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

перепишем уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний. Здесь δ – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебаний системы, т.е. частота, с которой совершались бы колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при $\delta = r = 0$.

При условии, что $\delta \ll \omega_0$ (затухание мало), уравнение решается наиболее просто и его решение имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; A_0 – начальная амплитуда. Это уравнение есть уравнение движения м.т., совершающей свободные затухающие гармонические колебания, график которых представлен на рис. 52. Характеристиками затухающих колебаний являются время релаксации τ (от лат. relaxatio – ослабление) и логарифмический декремент затухания θ (от лат. decrementum – уменьшение).

Найдем время τ , за которое амплитуда уменьшится в « e » раз (это и есть время релаксации)

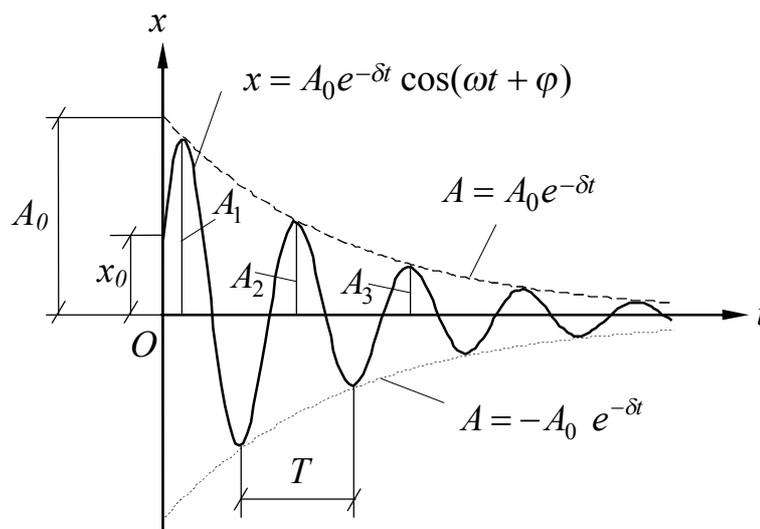


Рис. 52. График затухающих гармонических колебаний

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\delta\tau}} = e; \quad e^{\delta\tau} = e^1; \quad \delta\tau = 1; \quad \delta = \frac{1}{\tau}.$$

Видно, что коэффициент затухания обратен времени релаксации.

Затухание нарушает периодичность колебаний, так как не воспроизводятся значения амплитуд смещений, скоростей и ускорений (они уменьшаются), поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако, если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутком времени между последовательными максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины. Тогда период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (\delta \ll \omega_0).$$

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$$

называется декрементом затухания, а натуральный логарифм этого выражения

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e},$$

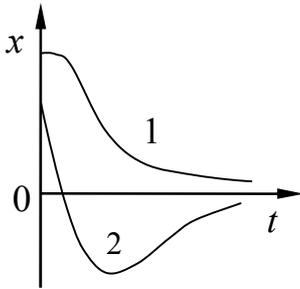


Рис. 53. График затухающих колебаний для среды с большим сопротивлением

называется логарифмическим декрементом затухания, где N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в « e » раз.

При $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$ (кривая 1 на рис. 53) период колебаний обращается в бесконечность, то есть движение перестает быть периодическим. При $\omega_0^2 - \delta^2 \leq 0$ (кривая 2 на рис. 53) движение носит апериодический характер: выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний либо по кривой 1, либо по кривой 2. Такие колебания, например, совершает кузов автомобиля при неисправных амортизаторах (кривая 2).

§28. Вынужденные гармонические колебания. Механический резонанс

Вынужденными называют колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы

(вынуждающей силы). Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна при наличии вынуждающей силы, меняющейся, например, по гармоническому закону. Тогда уравнение движения системы тел, например, пружинного маятника запишется в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Здесь $F_0 \cos \omega t$ – вынуждающая сила, которая входит в уравнение с положительным знаком, так как она сонаправлена с ускорением колеблющегося тела.

С учетом уже введенных нами обозначений получим уравнение:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{(F_0 / m)}_{=x_0} \cos \omega t.$$

Это – дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний. Из теории дифференциальных уравнений решение такого уравнения хорошо известно. В частности, для моментов времени, когда влияние затухания становится пренебрежимо малым ($\delta \ll \omega_0$), оно имеет вид

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Это уравнение движения м.т., совершающей вынужденные гармонические колебания. Из последнего выражения следует, что при $\omega = 0$ (неизменная вынуждающая сила) амплитуда

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0}{\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}.$$

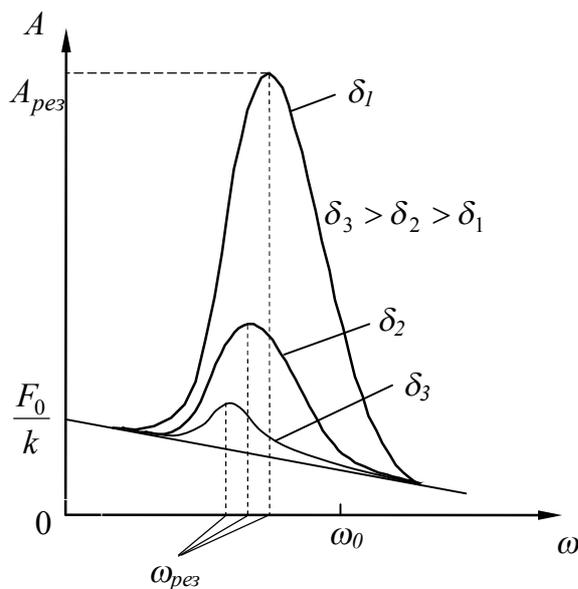


Рис. 54. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (резонансные кривые)

Из решения дифференциального уравнения видно, что колебания совершаются с частотой, равной частоте вынуждающей силы, при этом амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Особый интерес представляет то обстоятельство, что при данных ω_0 и δ амплитуда колебаний зависит от частоты ω вынуждающей силы. Эта зависимость означает, что при некоторой определенной для данной системы частоте, называемой резонансной (от лат. *resono* – откликаюсь), амплитуда колебаний достигает максимального

значения (рис. 54), и чем меньше коэффициент затухания δ , тем ближе $\omega_{рез}$ к ω_0 .

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте $\omega_{рез}$ системы называется механическим резонансом. При $\omega = \omega_0$ и $\delta \rightarrow 0$ амплитуда $A \rightarrow \infty$, что вызывает разрушение механических систем, поэтому необходимо знать $\omega_{рез}$. Вычислим, чему равна $\omega_{рез}$.

Чтобы определить $\omega_{рез}$, необходимо определить минимум выражения, стоящего под знаком корня в знаменателе выражения для смещения x . Это выражение для математического удобства обозначим как z :

$$z = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2.$$

При $\omega = \omega_{рез}$, т.е. когда $A = A_{max}$ (условие максимума функции)

$$\left. \frac{dz}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{рез}} = 0;$$

Далее вычислим первую производную:

$$\frac{dz}{d\omega} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4\delta^2 \cdot 2\omega = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\delta^2$$

и приравняем ее нулю (при $\omega = \omega_{рез}$):

$$4\omega_{рез} [2\delta^2 - (\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)] = 0.$$

Уравнение имеет три решения. 1) $\omega_{рез1} = 0$, 2,3) $\omega_{рез2,3} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. $\omega_{рез1}$ соответствует максимуму знаменателя и $A = A_{min}$, а не A_{max} ; $\omega_{рез3} < 0$ не имеет физического смысла. Таким образом, для резонансной частоты остается одно значение

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Вычислим знаменатель в выражении для амплитуды при $\omega = \omega_{рез}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{z_{рез}} &= \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)} = \sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4} = \\ &= \sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^2 \cdot \delta^2} = \sqrt{4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \end{aligned}$$

Тогда резонансную амплитуду можно вычислить так:

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Из рис. 54 видно, что с уменьшением δ максимум кривых возрастает и смещается в сторону больших частот, так как $\omega_{рез}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые выходят к одному и тому же, отличному от нуля значению F_0/k , которое называется статическим отклонением. Если $\omega \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Изображенные на рис. 54 кривые

называются резонансными кривыми. Резонансные свойства колебательной системы характеризуются физической величиной, называемой добротностью. При малом затухании ($\omega_0^2 \gg \delta^2$) добротность вычисляется так:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

Тогда

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2}.$$

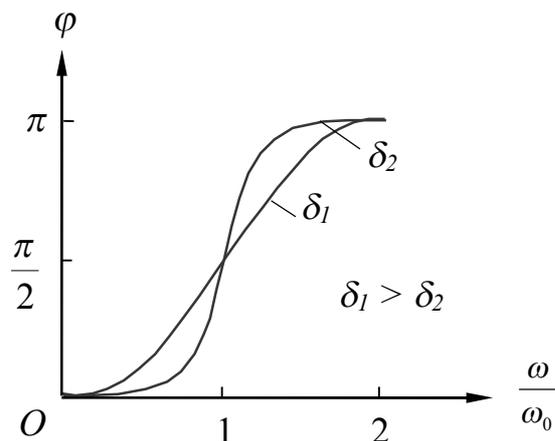


Рис. 55. Фазовые резонансные кривые

Таким образом, чем больше добротность колебательной системы, тем больше $A_{рез}$. В этом заключается физический смысл добротности. Для механических систем $Q = 10^2 \dots 10^4$ ед.

На рис. 55 показаны фазовые резонансные кривые, из которых следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз между фазами колебаний и вынуждающей силы. Вынуждающая сила меняется по закону $F = F_0 \cos \omega t$, а уравнение движения м.т., совершающей вынужденные

гармонические колебания имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где φ – сдвиг фаз между силой F и смещением x .

При $\omega = 0$ и $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ независимо от значения δ сдвиг фаз $\varphi = \pi/2$, т.е. вынуждающая сила опережает по фазе смещение м.т. от положения равновесия на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе вынуждающей силы.

Тема 8. Механические волны

§29. Механические (упругие) волны и их характеристики

Изучение физических основ механики мы начали с помощью понятия материальной точки. Далее, чтобы изучить механику тела, мы определили, что такое частица и абсолютно твердое тело. Для изучения механических волн нам понадобится еще одно понятие, а именно – понятие упругой среды. Упругой называется среда, которой присуще свойство упругости, т.е. способность любой части среды или тела в целом восстанавливать свои форму и объем (твердые тела) или только объем (жидкости и газы) после прекра-

щения действий внешних сил. Если же твердое тело деформируется необратимо, то это его свойство называется пластичностью. В обоих случаях не учитывается атомарное или молекулярное строение вещества, и она считается сплошной, т.е. непрерывно заполняющей часть пространства.

Колебания, возбуждаемые в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной) распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной частицы среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Распространение в среде периодических во времени и пространстве изменений состояния среды называется волной. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии без переноса вещества.

В зависимости от природы источника волн и среды распространения различают упругие и электромагнитные волны. Упругой волной называют распространение в упругой среде механических возмущений (отклонение частицы от положения равновесия, изменение давления, или механического напряжения).

Упругие волны подразделяют на продольные и поперечные. В продольной волне частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в поперечной – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные волны могут распространяться в той среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т.е. при смещении друг относительно друга противоположных граней прямоугольной частицы, поэтому их часто называют сдвиговыми волнами. Очевидно, что они могут распространяться лишь в упругих твердых телах. Продольные волны характеризуются деформациями сжатия-растяжения, поэтому могут рас-

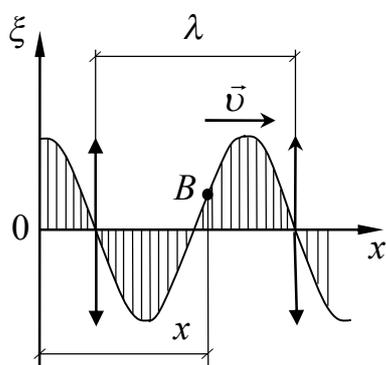


Рис. 56. Мгновенная «фотография» гармонической поперечной волны

пространяться в твердых, жидких и газообразных средах. В обоих случаях упругие силы возвращают частицу в положение равновесия.

Упругая волна называется гармонической (синусоидальной), если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 56 представлена мгновенная фотография гармонической поперечной волны, распространяющейся со скоростью \vec{v} вдоль оси Ox , т.е. приведена зависимость смещений ξ частиц от их положений равновесия и расстояний x этих частиц (например, для

частицы B) от источника колебаний O для какого-то фиксированного момента времени t . Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, т.е. одинаковым образом, называют длиной волны. Длина волны – расстояние, на которое распространяется волна за период, т.е., по физическому смыслу

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

где v – скорость волны, ν – ее частота, равная частоте источника (генератора) колебаний в среде (от лат. generator – создатель), в которой они распространяются.

Колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси Ox , а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме. Таким образом, волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек среды, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется волновым фронтом. Геометрическое место центров масс частиц, колеблющихся в одинаковой фазе, называют волновой поверхностью.

Волновых поверхностей существует бесчисленное множество, а волновой фронт один в каждый момент времени. Волновые поверхности не движутся в пространстве, а волновой фронт перемещается. Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскостей или сфер. Соответственно, волна в этих случаях называется плоской или сферической.

§30. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость волны

Упругие волны составляют предмет изучения раздела механики под названием акустика (от греч. akustikos – слышимый), которая различает бегущие и стоячие волны.

Бегущей называется волна, которая переносит в упругой среде энергию. Перенос энергии в волнах характеризуется вектором Умова (русский физик) \vec{S} , или вектором плотности потока энергии. Поток энергии – это физическая величина, численно равная количеству энергии, переносимой волной в единицу времени сквозь некоторую поверхность. Если эта поверхность представляет собой единичную (в СИ 1 м^2) плоскую площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии, то в этом случае переносимое волной количество энергии называется плотностью потока энергии. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен плотности потока энергии, т.е.

$$\vec{S} = \frac{dE}{dt \cdot dS} \vec{v}.$$

Уравнением волны называется выражение, которое определяет смещение ξ колеблющейся частицы от положения равновесия как функцию ее координат и времени

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и относительно координат. Периодичность по t следует из того, что ξ описывает колебания частицы с конкретными координатами, например, x , y , z , т.е. одно и то же значение смещения в данной точке среды воспроизводится через одинаковое время. Периодичность по координатам вытекает из того обстоятельства, что частицы, отстоящие друг от друга на одном и том же расстоянии λ , колеблются одинаковым образом, т.е. синфазно (от греч. *syn* – одинаковый), как показано на рис. 56.

Для вывода уравнения бегущей волны – зависимости смещения колеблющейся частицы от координат и времени – рассмотрим плоскую синусоидальную волну, предполагая, что ось Ox совпадает с направлением распространения волны (рис. 57). В данном случае, волновые поверхности перпендикулярны Ox , а так как все частицы волновой поверхности колеблются в одной фазе (одинаково), то смещение ξ будет зависеть только от x и t , т.е. $\xi = \xi(x, t)$.

Пусть колебания частиц, лежащих в плоскости $x = 0$ описываются функцией

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t.$$

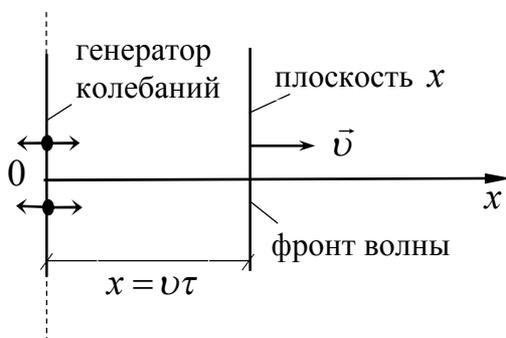


Рис.57. Схема распространения плоской гармонической волны

Тогда колебания частиц в плоскости x будут совершаться по такому же закону и с той же частотой, но их колебания будут отставать по времени от колебаний генератора на время τ , так как для прохождения волной расстояния x требуется время

$$\tau = \frac{x}{v},$$

где v – скорость волны. Поэтому уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \cdot (t - \tau) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right).$$

В общем случае уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox в среде, не рассеивающей энергию, имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0 \right),$$

где A – амплитуда волны, ω – круговая частота, φ_0 – начальная фаза колебаний, определяемая выбором начала отсчета x и t , $\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0 \right)$ – фаза волны.

Для характеристики гармонической волны используется волновое число

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot T} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогда

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Это уравнение плоской бегущей гармонической волны. Направление распространения волны математически задается с помощью волнового вектора \vec{k} . Его модуль равен волновому числу k , а направлен он в сторону распространения волны.

Основываясь на уравнении Эйлера, уравнение плоской гармонической волны можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A^{i(\omega t - kx + \varphi_0)},$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть $\text{Re}(\xi) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Выясним, что означает понятие «скорость волны». Для этого вычислим конкретное значение фазы волны для конкретных величин t и x . Пусть получится, например, $\omega t - kx_\phi + \varphi_0 = \text{const} = 0,5\pi$. Проследим за частицами, которые будут иметь указанное значение фазы, и мы увидим, что это значение фазы как бы перемещается в пространстве вместе с волной. Найдем скорость перемещения конкретного значения фазы волны:

$$\omega \left(t - \frac{x_\phi}{v} \right) + \varphi_0 = \text{const}.$$

Для этого возьмем полные дифференциалы от левой и правой частей этого выражения и получим при условии, что $\omega = \text{const}$, т.е. волна монохроматическая (от греч. monos – один, chroma – цвет):

$$\omega \left(dt - \frac{1}{v} dx_\phi \right) = 0$$

или

$$v = \frac{dx_\phi}{dt}.$$

Следовательно, скорость v волны в этом уравнении есть не что иное, как скорость перемещения фазы волны, и ее называют фазовой скоростью.

Из выражения $k = \omega/v$ следует, что $v = \omega/k$, т. е. фазовая скорость гармонических волн зависит от их частоты. Это явление называют дисперсией волн, а среда, в которой имеет место дисперсия, называется диспергирующей (от лат. dispersion – рассеяние).

Аналогичным образом можно получить уравнение сферической гармонической волны. Всякий реальный источник волн обладает конечными размерами. Если рассматривать колебания частиц среды на расстояниях, превышающих размеры источника, то его можно считать точечным. Считая, что фазовая скорость распространения волны по всем направлениям одна и та же, видим, что волновые поверхности будут сферическими. Тогда время τ , необходимое для прохождения расстояния r до какой-то частицы среды равно $\tau = r/v$. В случае сферической волны даже в среде, не рассеивающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1/r$. Связано это убывание с тем, что с удалением от источника сферической волны число частиц, вовлекаемых в волновой процесс, увеличивается, поэтому энергия волны делится на все большее количество частиц и амплитуда их колебаний уменьшается (вспомним, что амплитуда колебаний $A \sim \sqrt{E}$, E – полная энергия колебаний).

В итоге этих рассуждений можно записать, что

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где A_0 – величина, равная амплитуде волны в точках среды, расположенных от источника колебаний на расстоянии, равном единице длины.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается волновым уравнением – дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где v – фазовая скорость, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Реше-

нием этого уравнения является уравнение любой волны. Среда называется изотропной (от греч. isos – одинаковый, tropos – направление), если ей присуще свойство изотропии, т.е. независимости свойств среды от направления, в котором измеряются эти свойства.

Скорость упругих волн связана с упругими и инерционными характеристиками среды. Для твердой упругой среды скорости продольных и поперечных волн вычисляются так:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где ρ – объемная плотность среды, E – модуль Юнга (английский физик), G – модуль сдвига. Энергия плоской гармонической волны вычисляется следующим образом:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где w – объемная плотность энергии, т.е. энергия единицы объема среды, Дж/м³.

§31. Интерференция упругих волн

Если среда, в которой распространяется сразу несколько волн, линейна, т.е. ее свойства не изменяются в результате прохождения волн, то к ней применим принцип суперпозиции волн. При распространении в среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно векторной сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом волновом процессе в отдельности. Следовательно, волны накладываются друг на друга, не возмущая одна другую: волна 1 тождественна волне 1'; волна 2 тождественна волне 2' (рис. 58).

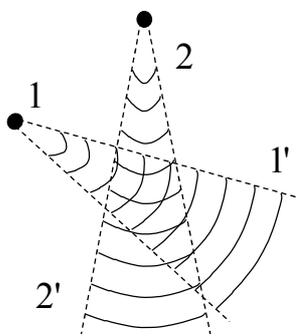


Рис. 58. Независимое распространение (наложение) волн

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов называют когерентностью.

Волны называют когерентными (от лат. *cohaerens* – согласованность), если разность их фаз остается постоянной во времени. Отсюда следует, что когерентные волны, как правило, обладают одинаковой частотой.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 , колеблющимися с одинаковой амплитудой A_0 , частотой ω и постоянной разностью

фаз Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$):

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - \underbrace{kr_1 + \varphi_1}_{=\Phi_1}),$$

$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - \underbrace{kr_2 + \varphi_2}_{=\Phi_2}),$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки B , k – волновое число, φ_1 и φ_2 – начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн (рис. 59).

При условии, что расстояние l между источниками много меньше расстояния L от источников до т. B , можно воспользоваться формулой сложения колебаний, происходящих по одному направлению:

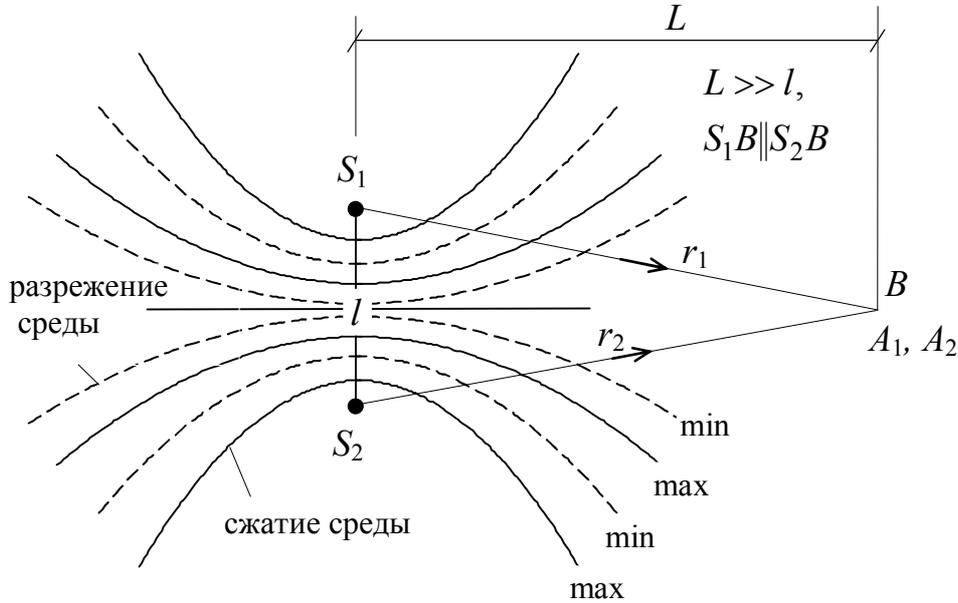


Рис. 59. Наложение двух когерентных сферических волн

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1),$$

или

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{A_0}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{r_2}\right)^2 + 2\frac{A_0}{r_1}\frac{A_0}{r_2} \cos[\omega t - kr_2 + \varphi_2 - \omega t + kr_1 - \varphi_1] = \\ &= A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}. \end{aligned}$$

Так как для когерентных источников разность фаз $(\Phi_1 - \Phi_2) = \text{const}$, то результат наложения волн в различных точках зависит от величины $\Delta = r_1 - r_2$, называемой разностью хода волн. Для простоты далее будем рассматривать волны, разность начальных фаз которых равна нулю ($\varphi_1 - \varphi_2 = 0$). Если $\cos k(r_1 - r_2) = +1$, произойдет усиление волн, если $\cos k(r_1 - r_2) = -1$ произойдет ослабление. Явление взаимного усиления или ослабления волн, возникающее при наложении в пространстве двух или более когерентных волн называют интерференцией волн (от лат. inter – взаимно, ferio – ударяю).

Таким образом, в точках, где

$$1. k(r_1 - r_2) = \pm 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

наблюдается интерференционный максимум: амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд интерферирующих волн:

$$A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2} = A_1 + A_2.$$

В точках, где

$$2. \quad k(r_1 - r_2) = \pm (2m + 1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

наблюдается интерференционный минимум: амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд интерферирующих волн:

$$A = \left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right| = |A_1 - A_2|.$$

При $A_1 = A_2$ колебания в этих точках среды отсутствуют. Теперь вычислим разность хода волн $\Delta r = r_1 - r_2$.

Так как $k = 2\pi / \lambda$, то, в первом случае при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$:

$$k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \pm 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$r_1 - r_2 = \pm m\lambda = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2,$$

что соответствует четному числу полудлин волн и максимуму результирующей амплитуды.

Во втором случае при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$:

$$k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \pm 2(m + 1)\pi,$$

или

$$r_1 - r_2 = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

что соответствует нечетному числу полудлин волн и минимуму результирующей амплитуды.

Оба условия сводятся к тому, что разность хода

$$r_1 - r_2 = \text{const}.$$

Уравнение в полярных координатах

$$r_1 - r_2 = \text{const}$$

есть уравнение гиперболы с фокусами в точках S_1 и S_2 . Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания представляет собой семейство гипербол, отвечающих условию $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (см. рис. 58). Между двумя соседними интерференционными максимумами находится интерференционный минимум и наоборот.

§32. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны. Стоячей называется волна, которая образуется при наложении двух бегущих гармонических волн одинаковых частот и амплитуд, распространяющихся навстречу друг другу. Практически стоячие волны образуются при отражении от преград, когда падающая и отраженная волны накладываются друг на друга.

Для вывода уравнения стоячей волны начало координат оси Ox выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда фазы обеих волн равны нулю. Запишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

Произведем сложение этих уравнений с помощью формулы

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

В результате получим, что

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \cos \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = \\ &= 2A \cos \omega t \cos kx = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t. \end{aligned}$$

Это уравнение стоячей волны, из которого видно, что в каждой точке координатой x стоячей волны происходят колебания той же частоты ω и амплитудой

$$A_{cm} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|.$$

В точках среды, где

$$2\pi x / \lambda = \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ т.е. } \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1,$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения, равного $2A$. В точках, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m + \frac{1}{2})\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ т.е. } \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0,$$

амплитуда стоячей волны обращается в нуль (рис. 60). Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны максимальна ($A_{cm} = 2A$), называют пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда стоячей волны равна нулю ($A_{cm} = 0$), называют узлами стоячей волны. Из этих выражений получаются координаты пучностей

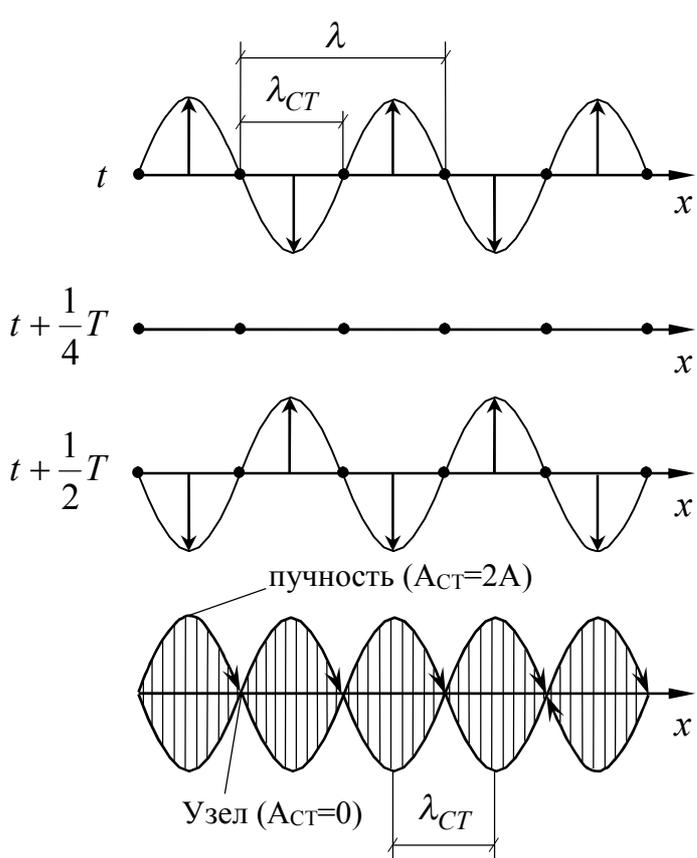


Рис. 60. Колебания частиц среды в стоячей волне

$$x_{\text{пуч}} = \pm m \frac{\lambda}{2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

и узлов

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

Из формул следует, что расстояния между двумя соседними пучностями или двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$. В отличие от бегущей волны, все частицы которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе, все частицы стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными ам-

плитудами, но с одинаковыми фазами. При переходе через узел множитель $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π , т.е. частицы, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями называют длиной стоячей волны $\lambda_{\text{ст}}$. Очевидно, что $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$, так как

$$x_{\text{пуч}}^{(m+1)} - x_{\text{пуч}}^{(m)} = (m+1) \frac{\lambda}{2} - m \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

В бегущей волне в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В стоячей же волне переноса энергии нет, так как падающая и отраженная волны несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Образование стоячих волн происходит обычно при интерференции бегущей и отраженных волн. Наличие узла или пучности на границе отражающей среды зависит от соотношения плотностей сред. Если отражающая

среда менее плотная, то в местах отражения получается пучность, если более плотная – узел. Образование узла объясняется тем, что при отражении бегущей волны от более плотной среды происходит смена фазы волны на противоположную. В результате на границе отражающей среды складываются колебания противоположных направлений. Например, если рассмотреть колебания веревки, один конец которой закреплен в стене, а другой человеком приводится в колебательное движение, то легко заметить, что закрепленный конец веревки колебаний не совершает, так как масса и плотность стены гораздо больше, чем масса и плотность веревки. Раз колебаний нет (их амплитуда равна нулю), значит в месте крепления происходит наложение двух колебаний, фазы которых противоположны. Следовательно, фаза колебаний отраженной волны противоположна фазе колебаний падающей волны. При отражении бегущей волны от среды менее плотной изменение фазы волны не происходит, поэтому на границе отражающей среды складываются колебания одинаковых направлений и в результате возникает пучность стоячей волны.

ГЛАВА III. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Тема 9. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

§33. Основные понятия и определения молекулярной физики

Молекулярная физика – это раздел физики, изучающий строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном движении. Под словом «тело» в молекулярной физике понимается газ, жидкость, твердое тело. Тела, содержащие большое (порядка числа Авогадро) количество молекул или атомов называют макроскопическими (от греч. macros – большой) телами или системами. Свойства макроскопических тел или систем изучаются с помощью статистического метода. Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы подчиняются статистическим закономерностям. Например, большинство молекул обладают величинами скоростей, импульса и энергии, близкими к некоторым, вполне определенным величинам, называемым наиболее вероятными.

Термодинамика (от греч. therme – тепло) – раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических тел (систем), находящихся в состояниях термодинамического равновесия и процессы перехода между этими состояниями. Совокупность макроскопических тел, обменивающихся энергией как между собой, так и с другими телами образуют термодинамическую систему. Физические величины, характеризующие состояние термодинамической системы, называются термодинамическими параметрами. Обычно в качестве таких параметров выбирают температуру, давление и удельный объем.

Макроскопическая система тел находится в термодинамическом равновесии, если ее состояние, определяемое параметрами, с течением времени не меняется. При этом считается, что параметры внешней среды также не изменяются. В основе термодинамического метода лежат два закона, или начала, установленных в результате обобщения многовекового опыта наблюдения человечества за природой, которые позволяют с количественной стороны изучить превращение одного вида энергии в другой. При этом нет необходимости иметь сведения о микроскопическом (от греч. micros – малый) строении вещества.

Температура T (от лат. temperature – нормальное состояние) – это физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Температура отражает степень нагре-

тости тела. Название единице измерения температуры дано в честь английского физика У. Томсона (лорда Кельвина) – кельвин (К). 1К равен $1/273,15$ части термодинамической температуры тройной точки воды – температуры, при которой лед, вода и насыщающий пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии. Соответственно, кельвин является единицей для термодинамической шкалы температур. Кельвин равен градусу Цельсия (шведский физик); °С, который является единицей для практической шкалы температур. Соотношение между термодинамической (T) и практической (t) температурами таково:

$$T = 273,15 + t.$$

Удельный объем ν – величина, равная отношению объема V тела к его массе. Когда тело однородно, то есть плотность $\rho = \text{const}$, то $\nu = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$.

Название единицы измерения удельного объема – м³/кг. Так как при постоянной массе удельный объем пропорционален общему объему, то макроскопические свойства однородного тела можно характеризовать общим объемом тела.

Давлением p называется физическая величина, равная отношению силы, действующей по нормали на некоторую площадку, к величине этой площадки:

$$p = \frac{dF_n}{dS}.$$

Если давление неизменно в пределах площади S , то $p = \frac{F_n}{S}$. Название единице давления дано в честь французского физика Паскаля – паскаль (Па): 1 Па – это такое давление, которое создает сила величиной 1Н, равномерно распределенная по нормальной к силе поверхности площадью 1 м² ($1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$).

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется термодинамическим процессом. Количество вещества в термодинамике измеряется в молях (от лат. moles – масса). 1 моль – это количество вещества, содержащего столько структурных единиц (атомов, молекул), сколько их содержится в изотопе углерода $^{12}_6\text{C}$ массой 0,012 кг. Моль имеет преимущество перед 1 кг в том, что в моле любого вещества содержится одинаковое количество молекул или атомов, равное числу Авогадро (итальянский физик), т.е. $6,022 \cdot 10^{23}$ ед.

§34. Законы идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются моделью идеального газа, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) суммарный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, но не равен нулю, т.е. каждая молекула обладает хоть и малыми, но не нулевыми размерами (не является м.т.);
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими, т.е. справедливы законы сохранения импульса и механической энергии.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как последние в условиях, близких к нормальным ($p = 1,013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273,15$ К), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу.

Опытным путем, задолго до появления молекулярно-кинетической теории, были открыты законы, описывающие поведение идеальных газов. Поскольку в этих законах используется объем газа, а не удельный объем, то в формулировках законов добавляется оговорка «для данной массы газа».

Закон Бойля–Мариотта (английский и французский физики): для данной массы газа, находящегося при постоянной температуре, произведение давления газа и его объема есть величина постоянная:

$$pV = \text{const при } (T, m) = \text{const.}$$

Закон Гей-Люссака (французский физик): объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ при } (p, m) = \text{const.}$$

Закон Шарля (французский физик): давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ при } (V, m) = \text{const.}$$

В этих уравнениях t – температура по шкале Цельсия, p_0 и V_0 – давление и объем при 0°C , коэффициент $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}$. Используя термодинамическую шкалу температур законы можно переписать так:

$$V = V_0 \alpha T, \quad p = p_0 \alpha T.$$

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен

$$22,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

По определению, в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемых числом Авогадро:

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Закон Дальтона (английский химик): давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений газов, образующих эту смесь:

$$p = \sum_i p_i,$$

где p_i – парциальное (частичное) давление i -того газа (от англ. partial – частичный). Это давление, которое оказывал бы i -ый газ, если бы один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

§35. Уравнение Менделеева–Клапейрона

Состояние данной массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением p , объемом V данной массы газа и температурой T . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая уравнением состояния, которое в общем виде дается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других. Французский физик Клапейрон объединил законы Бойля–Мариотта и Шарля следующим образом.

Пусть данная масса газа занимает объем V_1 , имеет давление p_1 и находится при температуре T_1 (рис. 61). Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами p_2 , V_2 , T_2 . Переход из состояния 1 в состояние 2 осуществляется в виде двух процессов: 1) изотермического (изотерма 1–1'), 2) изохорного (изохора 1'–2; от греч. *choza* – вместимость).

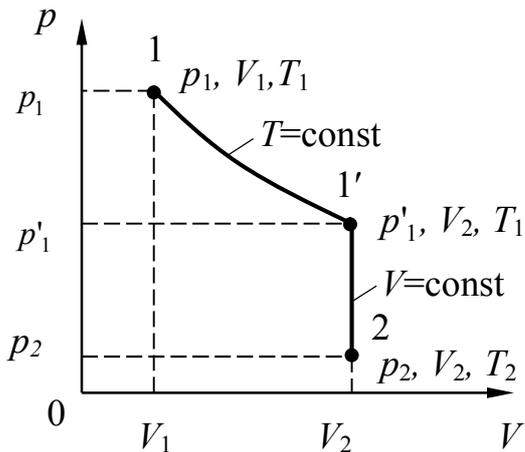


Рис. 61. Графическое представление двух последовательных термодинамических процессов

В соответствии с законами Бойля–Мариотта и Шарля запишем: для процесса 1–1': $p_1 V_1 = p_1' V_2$;
для процесса 1'–2:

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad p_1' = p_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Исключив из уравнений p_1' , получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина $\frac{pV}{T}$ остается постоянной, т. е.

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const} \text{ – уравнение Клапейрона.}$$

Здесь B – газовая постоянная, различная для разных газов, поэтому получается, что для каждого газа надо записывать свое уравнение.

Российский химик Д.И. Менделеев объединил это уравнение с законом Авогадро, заменив объем V данной массы газа объемом одного моля, или молярным объемом V_M . В этом случае, при одинаковых p и T моли всех газов занимают одинаковый молярный объем V_M и левая часть уравнения Клапейрона станет одинаковой для всех газов и равной некоторой постоянной, обозначаемой R и называемой универсальной газовой постоянной:

$$\frac{pV_M}{T} = R, \text{ или } pV_M = RT, R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Полученное уравнение называется уравнением Менделеева–Клапейрона, или уравнением состояния идеального газа для одного моля газа.

Если при некоторых давлении и температуре один моль газа занимает молярный объем V_M , то при тех же условиях произвольная масса m газа займет объем $V = \frac{m}{M} V_M$, где M – молярная масса газа. Это величина, равная отношению массы m газа к числу молей, которое в нем содержится, то есть масса одного моля. Название единицы измерения молярной массы – килограмм на моль (кг/моль). В этом случае уравнение Менделеева–Клапейрона для произвольной массы m газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT,$$

где ν – число молей.

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, применяя постоянную Больцмана (австрийский физик):

$$k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Исходя из этого, уравнение состояния идеального газа для 1 моля запишем в виде

$$p = RT/V_M = kN_A T/V_M = kn_0 T,$$

где $\frac{N_A}{V_M} = n_0$ – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Таким образом, из уравнения

$$p = kn_0 T$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул, или плотности газа.

§36. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул, то есть устанавливает зависимость между давлением газа, его объемом и кинетической энергией поступательного движения его молекул.

Для вывода уравнения рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что N молекул газа движутся хаотически. При хаотическом движении молекул все направления их движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул. Число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда; соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие, т.е. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$ (рис. 62). Пусть площадь какой-то из стенок сосуда, перпендикулярной оси Ox , равна S . Вычислим давление, оказываемое газом на эту стенку с учетом двух допущений: 1) всем молекулам приписывается одинаковая скорость v ; 2) в каждом из 6-и взаимно перпендикулярных направлений движется одинаковое число молекул.

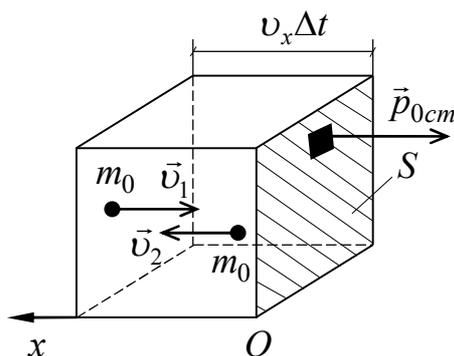


Рис. 62. Элементарный объём идеального газа

Точно такое же давление, по закону Паскаля, газ будет оказывать и на другие стенки сосуда. В соответствии с определением давления

$$p = \frac{F}{S},$$

где F – сила давления газа на стенку сосуда. Величину этой силы вычислим с помощью основного уравнения классической механики для одной молекулы:

$$F_0 \Delta t = \Delta p_0, \quad F_0 = \frac{\Delta p_0}{\Delta t},$$

и далее перейдем ко всем молекулам газа. При каждом соударении молекула массой m_0 передает стенке сосуда импульс

$$\vec{p}_{0cm} = \Delta \vec{p}_0 = m_0 \vec{v}_2 - m_0 \vec{v}_1,$$

где \vec{v}_1 – скорость молекулы газа до соударения, \vec{v}_2 – после соударения.

В проекции на ось Ox :

$$\Delta p_{0x} = m_0 v_{2x} - (-m_0 v_{1x}) = 2m_0 v_x,$$

так как $v_1 = v_2$. Необходимо учитывать, что реально молекулы движутся к площадке S под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяем движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени

вдоль каждого из них движется $1/3$ молекул, причем половина молекул ($1/6$) движется вдоль данного направления в одну сторону (например влево), половина – в противоположную (вправо). За время Δt площадки S достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме прямоугольного параллелепипеда с основанием S и длиной $v_x \Delta t$. Число этих молекул $N = n_0 S v_x \Delta t$ (n_0 – число молекул в единице объема).

Поскольку число ударов молекул равно числу молекул, движущихся перпендикулярно площадке S , то число ударов N_x молекул, движущихся в направлении Ox о площадку S будет равно $N_x = \frac{1}{6} N = \frac{1}{6} n_0 S v_x \Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс (за время Δt)

$$p_{cmx} = \Delta p_x = 2m_0 v_x \cdot \frac{1}{6} n_0 S v_x \Delta t = \frac{1}{3} n_0 m_0 v_x^2 S \Delta t.$$

В результате давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p_x = \frac{F_x}{S} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t S} = \frac{1}{3} n_0 m_0 v_x^2.$$

Эта формула справедлива для молекул, имеющих только одно значение скорости, равное v_x . На самом же деле скорости молекул могут принимать любые значения от нуля до бесконечности. Чтобы учесть это обстоятельство и характеризовать совокупность всех молекул откажемся от первого допущения и заменим величину v_x^2 на так называемую среднюю квадратичную скорость. Таким образом, если газ в объеме V содержит N молекул, движущихся со скоростями $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$, то целесообразно рассматривать среднюю квадратичную скорость

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2},$$

так как, во-первых давление p_x выражается через квадрат скорости, т.е. через v_x^2 , а не через среднее арифметическое значение $\langle v_x \rangle$, а во-вторых, средняя квадратичная величина характеризует всю совокупность молекул газа. Кроме того, если известна средняя квадратичная скорость движения молекул, то легко найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы, так как в формулу для вычисления этой энергии входит квадрат скорости.

Тогда выражение для вычисления давления, оказываемого на любую стенку сосуда примет вид

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \langle v_{кв} \rangle^2.$$

Учитывая, что $n_0 = \frac{N}{V}$, получим

$$pV = \frac{1}{3}Nm_0\langle v_{кв} \rangle^2.$$

Умножив и разделив последнее выражение на два, получим:

$$pV = \frac{2}{3}N\left(\frac{m_0\langle v_{кв} \rangle^2}{2}\right) = \frac{2}{3}N\langle \varepsilon_0 \rangle_{II} = \frac{2}{3}E_{кII},$$

где $\langle \varepsilon_0 \rangle_{II}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, $E_{кII}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Так как размеры молекул не равны нулю, то для них понятие поступательного движения имеет смысл в отличие от м.т. Последнее выражение называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

Вычислим среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$. Так как масса газа $m = Nm_0$, то предпоследнее уравнение можно переписать так:

$$pV = \frac{1}{3}Nm_0\langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3}m\langle v_{кв} \rangle^2.$$

Для произвольной массы газа $m = \nu M$ (M – молярная масса), поэтому

$$pV = \frac{1}{3}\nu M\langle v_{кв} \rangle^2,$$

С другой стороны, по уравнению Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$. Таким образом, приравнивая правые части уравнений, получим

$$\frac{1}{3}\nu M\langle v_{кв} \rangle^2 = \nu RT,$$

откуда

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Переходя к массе одной молекулы по формулам $M = m_0N_A$, где m_0 – масса одной молекулы, а N_A – число Авогадро, получим

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $k = \frac{R}{N_A}$ – постоянная Больцмана. Вычисления показывают, что при

комнатной температуре молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода 1900 м/с. При температуре жидкого гелия (4 К) те же скорости будут соответственно равны 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle_{II} = \frac{E_{кП}}{N} = \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

и пропорциональна только абсолютной (термодинамической) температуре. Из этого уравнения следует, что при $T = 0$ энергия $\langle \varepsilon_0 \rangle_{II} = 0$, то есть при 0 К прекращается поступательное движение молекул идеального газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа и последняя формула раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

Так как для данной массы газа $N = \text{const}$ и при $T = \text{const}$ средняя квадратичная скорость молекул $\langle v_{кв} \rangle = \text{const}$, то из выражения $pV = \frac{2}{3} E_{кП}$ следует, что для данной массы газа и постоянной температуры

$$pV = \text{const},$$

т.е. получается уравнение закона Бойля–Мариотта. Этим доказывается справедливость основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

§37. Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов считалось, что молекулы имеют различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т. е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул. Иначе обстоит дело с численными значениями скоростей молекул, которые не могут быть равновероятными. Нетрудно заметить, что очень малые и очень большие величины скоростей по сравнению со средним значением скорости маловероятны, причем число значений этих скоростей стремится к нулю как для $v \rightarrow 0$, так и для $v \rightarrow \infty$ (рис. 63). Отсюда следует, что скорости молекул группируются, в основном, вблизи некоторого, наиболее вероятного значения.

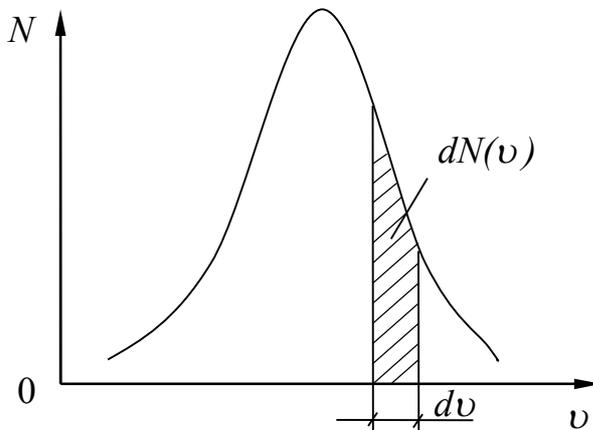


Рис. 63. График зависимости числа молекул от их скорости

По молекулярно-кинетической теории газов, как бы не изменялись скорости молекул при столк-

новениях, средняя квадратичная скорость молекул массой m_0 в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, остается постоянной и равной

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Объяснение состоит в том, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен шотландским физиком Максвеллом.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре.

Предполагалось также, что силовые поля, действующие на газ, отсутствуют. Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой функцией распределения молекул по скоростям. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, заключенную в интервале dv (см. рис. 63).

Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, т.е.

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}.$$

$f(v)$ должна быть нормированной (делённой) на N , чтобы не зависеть от числа молекул газа, и на dv , чтобы не зависеть от величины dv . Таким образом, если задаться вопросом, какая доля (процент) молекул обладают скоростями, значения которых лежат в интервале 1000...1100 м/с, то функция Максвелла даёт ответ на этот вопрос, например 12%.

Применяя методы теории вероятностей Максвелл нашел функцию $f(v)$ — закон распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2kT} = A(T) v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right).$$

Из полученного выражения видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния системы (от температуры T). График функции распределения приведен на рис. 64. Относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, находится как площадь заштрихованной полоски.

Из графика следует, что функция распределения стремится к нулю при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$ и проходит через максимум при некоторой скорости $v_{\text{вер}}$, называемой наиболее вероятной скоростью, причем этой скоростью и

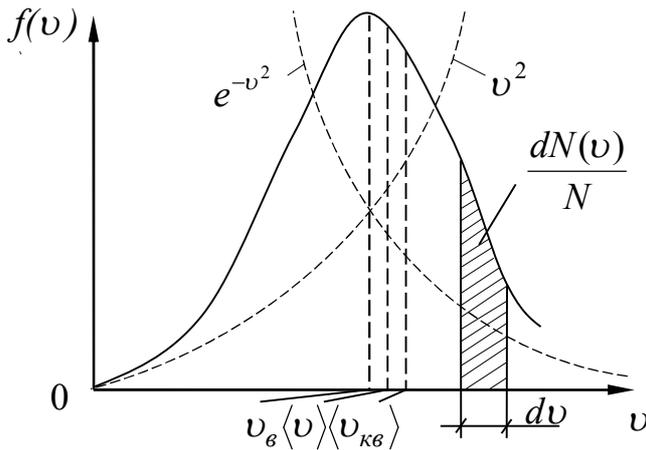


Рис. 64. График функции распределения молекул по скоростям

близкой к ней обладает наибольшее число молекул. Кривая несимметрична относительно $v_{вер}$.

Значение наиболее вероятной скорости можно найти, продифференцировав выражение для $f(v)$ по аргументу v и приравняв результат нулю при $v = v_{вер}$ т.е., используя условие для максимума выражения $f(v)$:

$$\left. \frac{d}{dv} f(v) \right|_{v = v_{вер}} = 0,$$

получим

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \Big|_{v = v_{вер}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$v_1 = 0, v_2 \rightarrow \infty, v_3 = v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}},$$

или

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

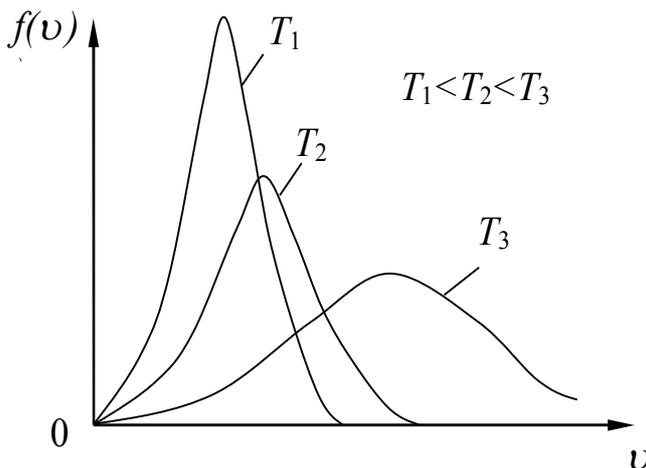


Рис. 65. Влияние температуры на распределение молекул по скоростям

Из этой формулы видно, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям смещается в сторону больших значений скоростей (рис. 65). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, так как число молекул газа постоянно и не зависит от температуры. Поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям опускается и становится более пологой.

Для оценки значений скоростей молекул пользуются средней арифметической скоростью $\langle v \rangle$ поступательного движения молекул идеального газа, вычисляемой также из закона распределения Максвелла:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Знание средней арифметической скорости $\langle v \rangle$ необходимо для вычисления среднего арифметического значения импульса молекул газа. Значения $v_{вер}$, $\langle v \rangle$, $\langle v_{кв} \rangle$ представлены на рис. 63, причем $\langle v \rangle = 1,13 v_{вер}$, $\langle v_{кв} \rangle = 1,22 v_{вер}$.

Распределение молекул идеального газа по энергиям определяет долю $dN(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетические энергии $\varepsilon = m_0 v^2 / 2$, заключенные в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$f(\varepsilon) = B(T) \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right),$$

где $f(\varepsilon)$ – функция распределения молекул по энергиям. Определим по правилам математической статистики в качестве примера среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекулы идеального газа:

$$\langle \varepsilon_0 \rangle_{II} = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2} kT.$$

Результат получается точно такой же, что и при вычислении аналогичной величины с помощью основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

§38. Закон равнораспределения энергии молекул по степеням их свободы

Как рассчитать энергию молекулы, которая может одновременно участвовать и в поступательном, и во вращательном движениях, и как математически отобразить это обстоятельство? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к видам движения материальной точки (м.т.) и абсолютно твердого тела (а.т.т.).

Число независимых координат, полностью определяющих положение м.т. в пространстве, называется числом её степеней свободы. М.т., произвольно движущаяся в пространстве, обладает числом независимых координат, равным трем, например x , y , z . Таким образом, м.т. обладает тремя степенями свободы. Если рассматривать движение м.т. во времени, то, с точки зрения физики, в этом случае м.т. обладает тремя степенями свободы движения: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. М.т., движущаяся по поверхности, обладает двумя степенями свободы, а движущаяся вдоль

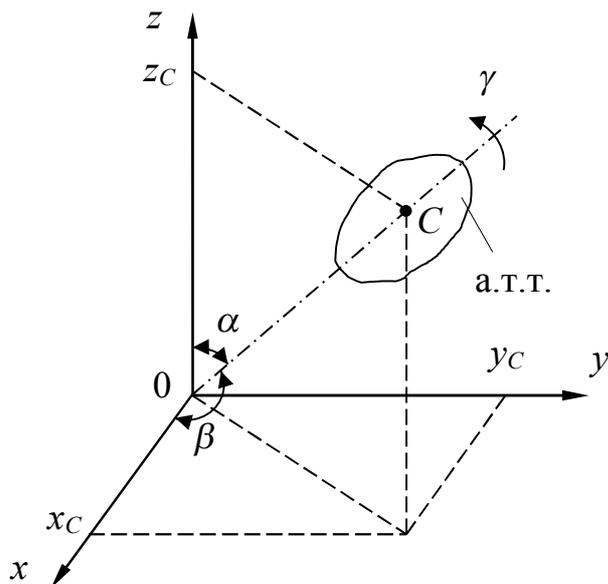


Рис. 66. К определению положения а.т.т. в пространстве

(рис. 66). Следовательно, а.т.т. обладает тремя степенями свободы поступательного и тремя степенями свободы вращательного движения ($i = 6$).

Если тело не абсолютно твердое, и его части могут смещаться друг относительно друга, например, совершать колебания, то необходимо вводить еще дополнительные степени свободы колебательного движения.

Ранее мы отмечали, что молекулу идеального газа в общем случае нельзя считать м.т., так как она обладает хоть и маленькими, но конечными размерами, поэтому для нее имеет смысл деление движения на поступательное и вращательное. Сейчас мы уточним это суждение для различного типа молекул.

Молекулу одноатомного идеального газа можно считать м.т., которая обладает тремя степенями свободы поступательного движения. При этом понятие вращательного движения теряет смысл, так как радиус молекулы $r \rightarrow 0$, $J = mr^2 \rightarrow 0$ и кинетическая энергия вращательного движения $E_{\text{квр}} = J\omega^2 / 2 \rightarrow 0$. В итоге число $i = 3$.

Молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух м.т. – атомов, жестко связанных недеформированной химической связью. Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения около осей $O_1 - O_1$ и $O_2 - O_2$ (рис. 67). Вращение около третьей оси ($O - O$) не учитывается, так как $r \rightarrow 0$ и $J \rightarrow 0$ и $E_{\text{квр}} \rightarrow 0$. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ($i = 5$).

линии – одной. Число степеней свободы движения м.т. обозначается буквой i , поэтому для м.т., произвольно движущейся в пространстве $i = 3$. Далее определим число степеней свободы а.т.т.

Для определения его положения в пространстве нужно задать три координаты центра масс а.т.т., две угловые координаты α и β , определяющие положение в пространстве определенной оси, проходящей через центр масс и начало координат, и, наконец, угол поворота γ около этой оси по отношению к некоторому первоначальному положению

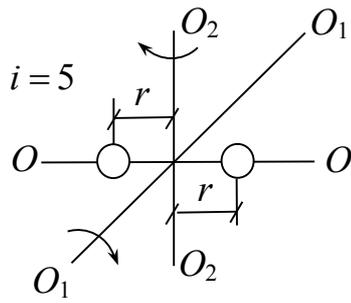


Рис. 67. Определение числа степеней свободы двухатомной молекулы

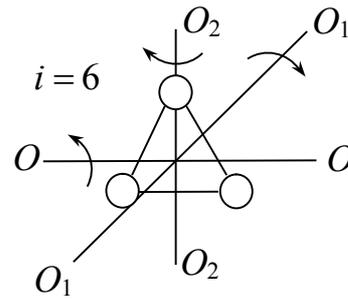


Рис. 68. Определение числа степеней свободы трехатомной молекулы

Трехатомная и многоатомные нелинейные (атомы не расположены на одной линии) молекулы имеют шесть степеней свободы – три поступательных и три вращательных ($i = 6$, рис. 68). Для реальных молекул необходимо также учитывать степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $1/3$ значения средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle_{\text{П}}}{3} = \frac{1}{3} \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{m_0}{2} \frac{3kT}{m_0} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике существует закон Больцмана о равномерном распределении энергии молекул по степеням свободы: в термодинамической системе, находящейся в состоянии равновесия, на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – одинаковая в среднем энергия kT . Колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная энергия, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы.

Таким образом, средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}.$$

§39. Явления переноса в газах. Средняя длина свободного пробега молекул в газах

Рассмотрим в качестве термодинамической системы идеальный газ. Если в газе существует пространственная неоднородность плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев газа, то такая термодинамическая система называется неравновесной. Под упорядоченным в данном случае понимают движение, при котором всегда существует неизменная по направлению составляющая скорости слоя. Таким образом, каждая молекула одновременно участвует в двух движениях – упорядоченном вместе со слоем газа и хаотическом. Движение молекул выравнивает эти неоднородности, при этом в газе возникают особые необратимые процессы, называемые явлениями переноса. Сюда относится внутреннее трение (вязкость), теплопроводность, диффузия. Математически эти явления описываются с помощью физической величины, получившей название средняя длина свободного пробега молекул.

Двигаясь хаотически, молекулы непрерывно соударяются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями каждая i -тая молекула движется равномерно и прямолинейно, проходя путь l_i , который называется длиной свободного пробега. Поскольку молекул в газе очень много ($\sim 10^{23}$ шт.), то для характеристики газа в целом вводится понятие средней длины свободного пробега $\langle l \rangle$. Будем считать, что молекулы газа представляют собой шарики определенного диаметра d ($\sim 10^{-10}$ м), зависящего от химической природы газа.

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$, и если $\langle z \rangle$ – среднее число соударений молекулы газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}.$$

Определим среднее число столкновений $\langle z \rangle$, которое испытывает молекула однородного ($d = \text{const}$) газа в единицу времени.

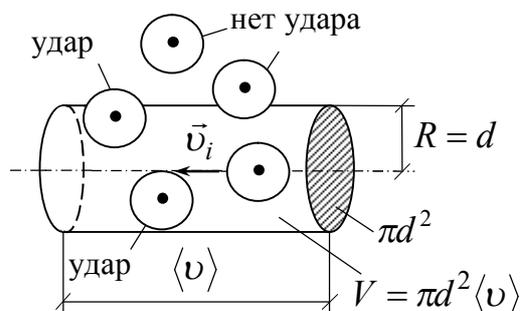


Рис. 69. К расчету величины $\langle z \rangle$

При своем движении молекула будет сталкиваться со всеми молекулами газа, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояниях, меньших или равных диаметру молекул (рис. 69). За единицу времени рассматриваемая молекула столкнется с другими молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра длиной $\langle v \rangle$ и радиусом основания d . Если n_0 – число

молекул в единице объема газа, то среднее число столкновений с неподвижными молекулами за единицу времени (1 с)

$$\langle z \rangle = n_0 \pi d^2 \langle v \rangle.$$

В действительности все молекулы движутся. Поэтому число соударений определяется средней скоростью движения молекул по отношению друг к другу. Как показывает соответствующий расчет средняя скорость относительного движения молекул в $\sqrt{2}$ раз больше, поэтому с учетом движения других молекул

$$\langle z \rangle = n_0 \pi d^2 \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

Окончательно получим

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{2} n_0 \pi d^2 \langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \pi d^2}.$$

Выясним, как связана $\langle l \rangle$ с параметрами состояния газа, например с давлением газа

$$p = n_0 k T, \quad n_0 = \frac{p}{k T}.$$

Из выражения для $\langle l \rangle$ видно, что

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \langle l \rangle}.$$

Приравнявая правые части полученных выражений, видим, что

$$\frac{p}{k T} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \langle l \rangle}, \quad p \langle l \rangle = \frac{k T}{\sqrt{2} \pi d^2}, \quad \text{т.е. } \langle l_1 \rangle p_1 = \langle l_2 \rangle p_2 = \text{const}.$$

Видно, что при $T = \text{const}$ произведение средней длины свободного пробега и давления данного газа есть величина постоянная.

При $p = 1 \cdot 10^5$ Па $\langle l \rangle = 6,5 \cdot 10^{-8}$ м для кислорода O_2 ; для азота N_2 $\langle l \rangle = 5,9 \cdot 10^{-8}$ м.

§40. Внутреннее трение (вязкость)

Это явление связано с возникновением сил трения между слоями жидкости или газа, перемещающимися параллельно друг другу с различными

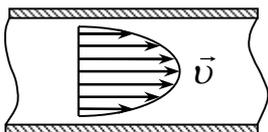


Рис. 70. Этюра скоростей движения слоев газа

скоростями (рис. 70). Быстрый слой газа действует с ускоряющей силой на медленный слой; наоборот медленный слой тормозит быстрый. Сила внутреннего трения – это сила, с которой медленный слой газа или жидкости действует на быстрый, т.е. тормозит его. Сила внутреннего трения направлена по касательной к поверхности соприкасающихся слоев и

определяется эмпирической (полученной опытным путем) формулой Ньютона

$$F = -\eta \frac{dv}{dz} S.$$

Здесь η – коэффициент вязкости, или коэффициент внутреннего трения, dv/dz – градиент скорости, т.е. величина, показывающая, как быстро изменяется скорость v упорядоченного движения слоя в направлении Oz , S – величина поверхности, разделяющей слои (рис. 71). Знак минус означает, что если, например, $\frac{dv}{dz} > 0$, т.е. в направлении Oz скорость слоя возрастает, то сила внутреннего трения должна быть направлена противоположно скорости движения этого слоя, и наоборот.

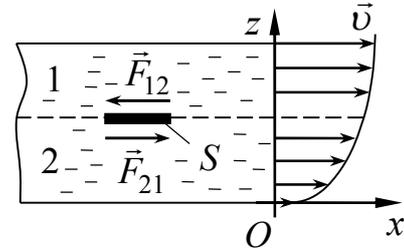


Рис.71. Движение слоев газа в декартовой системе координат

В отличие от известной из механики силы внешнего трения видно, что сила внутреннего трения зависит от S . Такие жидкости называются ньютоновскими.

Рассмотрим явление внутреннего трения с теоретических позиций. Пусть слои обладают импульсами p_1 и p_2 (рис. 72). Из-за хаотического теплового движения молекул, проходящего со скоростью $\langle v \rangle$ имеет место

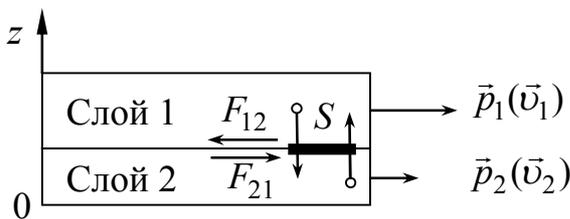


Рис. 72. Взаимодействие слоев газа

обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс быстрого слоя уменьшается, а медленного увеличивается. За время Δt сквозь поверхность S переходит в обоих направлениях одинаковое число молекул, равное

$$\Delta N = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle S \Delta t.$$

Из слоя 1 за время Δt молекулами уносится импульс, равный

$$\Delta p_1' = \Delta N m_0 v_1,$$

а привносится импульс

$$\Delta p_1'' = \Delta N m_0 v_2.$$

Здесь m_0 – масса молекулы, \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – составляющие скоростей молекул в направлении движения слоя, $\Delta N m_0$ – масса слоя.

В итоге импульс слоя 1 получает приращение (отрицательное, так как $v_2 < v_1$)

$$\Delta p_1 = \Delta p_1'' - \Delta p_1' = \Delta N m_0 (v_2 - v_1) = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle m_0 (v_2 - v_1) S \Delta t.$$

Очевидно, что для слоя 2

$$\Delta p_2 = -\Delta p_1.$$

В соответствии с основным уравнением классической механики сила, действующая на слой 1 со стороны слоя 2

$$F_{12} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle m_0 (v_2 - v_1) S.$$

Соответственно, для слоя 2

$$F_{21} = -F_{12}.$$

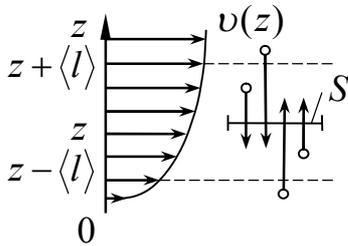


Рис. 73. К расчету коэффициента вязкости

Далее учтем, что скорость слоев меняется не скачком на границе между ними, а непрерывно в направлении, перпендикулярном границе между слоями (рис. 73). В среднем последнее соударение между молекулами слоёв, расположенных по разные стороны от площадки S , происходит на расстоянии от S , равном $\langle l \rangle$, которая очень мала, поэтому в соответствии с разложением функции в ряд

$$v(z + \langle l \rangle) = v(z) + \frac{dv}{dz} \langle l \rangle = v_1;$$

$$v(z - \langle l \rangle) = v(z) - \frac{dv}{dz} \langle l \rangle = v_2.$$

Тогда разность

$$v_2 - v_1 = v(z) - \frac{dv}{dz} \langle l \rangle - v(z) - \frac{dv}{dz} \langle l \rangle = -2 \frac{dv}{dz} \langle l \rangle.$$

В результате сила внутреннего трения, действующая на слой 1 со стороны слоя 2

$$F_{12} = -\frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle m_0 \cdot 2 \frac{dv}{dz} \langle l \rangle S = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle m_0 \langle l \rangle \frac{dv}{dz} S.$$

Так как $n_0 m_0 = \rho$ – плотность газа, то

$$F_{12} = -\frac{1}{3} \underbrace{\rho \langle v \rangle \langle l \rangle}_{=\eta} \frac{dv}{dz} S = -\eta \frac{dv}{dz} S,$$

т.е. теоретически получена формула Ньютона. Поскольку

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad \langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 \cdot n_0}, \quad \text{то } \eta = \frac{1}{3} \frac{n_0 m_0 \sqrt{8kT}}{\sqrt{\pi m_0} \cdot \sqrt{2\pi} d^2 n_0} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{m_0 kT}}{\pi^{3/2} d^2} \sim \sqrt{m_0 T}.$$

Поэтому η не зависит от n_0 , и при $T = const$ не зависит от давления p ($p = n_0 kT$). Причина – при уменьшении n_0 увеличивается $\langle l \rangle$, т.е. происходит компенсация уменьшения n_0 за счет увеличения $\langle l \rangle$ и наоборот.

§41. Теплопроводность газов

Опытным путем установлено, что если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е. происходит выравнивание температур. Теплопроводность – это перенос энергии от более нагретых участков тела к менее нагретым в результате теплового движения и взаимодействия микрочастиц. Если вдоль направления, например Oz , температура не остается постоянной, то вдоль этого направления устанавливается поток тепловой энергии, величина которого определяется формулой, выражающей закон теплопроводности Фурье (французский физик):

$$q = -\lambda \frac{dT}{dz} S.$$

Здесь q – тепловой поток, т.е. количество тепловой энергии, которое переносится в единицу времени сквозь площадку S , расположенную перпендикулярно оси Oz , $\frac{dT}{dz}$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности. Знак « \rightarrow » означает, что направление, в котором течет тепловой поток, и направление, в котором возрастает температура, противоположны (рис. 74).

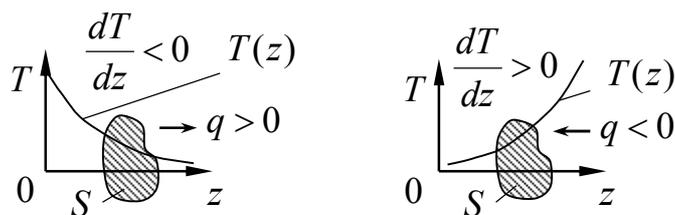


Рис. 74. Иллюстрация закона теплопроводности Фурье

Количество тепловой энергии за время $\Delta t = t - 0 = t$:

$$Q = qt = -\lambda \frac{dT}{dz} St.$$

Вычислим поток тепловой энергии в газе. Если температура газа в различных точках различна, то и средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул также различна. Перемещаясь в различных направлениях, молекулы переносят запасенную ими энергию. Количество молекул, пролетающих сквозь площадку S , мы вычислили в предыдущем параграфе:

$$dN = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle S dt.$$

Количество энергии, переносимое молекулами за 1 с сквозь площадку S в положительном направлении оси Oz равно (рис. 75):

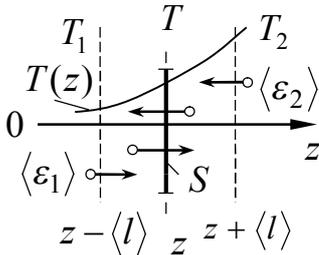
$$q = (\langle \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_2 \rangle) \frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle S \left(\frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2).$$

Здесь

$$T_1 = T - \frac{dT}{dz} \langle l \rangle; \quad T_2 = T + \frac{dT}{dz} \langle l \rangle,$$

где T – температура газа в сечении S . Разность температур

$$T_1 - T_2 = -2 \frac{dT}{dz} \langle l \rangle.$$



Тогда

$$q = -\frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle S \frac{i}{2} k 2 \frac{dT}{dz} \langle l \rangle,$$

или, умножив и разделив на произведение $m_0 N_A$, видим, что

$$q = -\frac{1}{6} m_0 n_0 \langle v \rangle S \underbrace{\frac{i k N_A}{2 m_0 N_A}}_{=M} \cdot 2 \frac{dT}{dz} \langle l \rangle.$$

Рис. 75. Перенос тепловой энергии молекулами

Здесь $m_0 n_0 = \rho$; $\frac{i k N_A}{2 m_0 N_A} = \frac{i R}{2 M} = c_V$ – удельная теплоемкость при

$V = \text{const}$.

В результате тепловой поток

$$q = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_V \frac{dT}{dz} S = -\lambda \frac{dT}{dz} S \text{ – закон Фурье.}$$

Соответственно, коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_V = \eta c_V.$$

Подставляя сюда формулу для η , получим ($\eta \sim \sqrt{m_0 T}$, $c_V \sim \frac{1}{m_0}$):

$$\lambda \sim \frac{\sqrt{m_0 T}}{m_0} = \sqrt{\frac{T}{m_0}}.$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности не зависит от давления и возрастает с температурой как \sqrt{T} .

§42. Диффузия в газах

Диффузией (от лат. diffusion – распространение) называют взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц вещества. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему. Полное число молекул, а следовательно и давление в процессе диффузии не изменяется. Происходит лишь перераспределение молекул различных сортов.

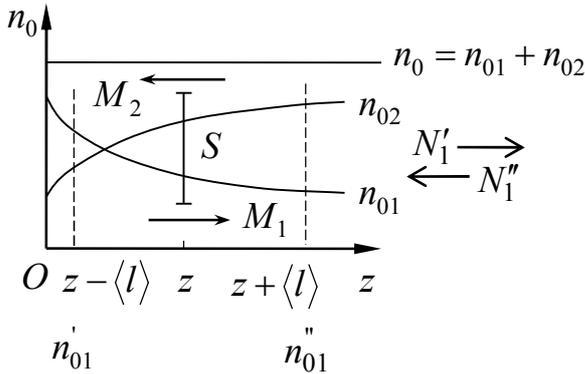


Рис. 76. Диффузия молекул двух сортов газа

Предположим, что в некотором объеме каким-то образом поддерживается не изменяющийся со временем градиент концентрации dn_0/dz двух газов или двух компонентов (от лат. components – составляющий) смеси газов (рис. 76). Давление во всем объеме одинаково, следовательно сумма $n_{01} + n_{02}$ в каждом сечении одинакова. Здесь сквозь перпендикулярную Oz площадку S

имеется преимущественный поток массы молекул газа сорта 1 (или первого компонента) слева направо, который можно охарактеризовать величиной массы M_1 , переносимой сквозь S за 1 с. Опыт дает для этой величины

$$M_1 = -D \frac{d\rho_1}{dz} S.$$

Это выражение суть экспериментальный закон Фика (немецкий физик).

Здесь D – коэффициент диффузии, $\frac{d\rho}{dz}$ – градиент плотности газа. Знак «—» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности $\rho_1 = n_{01}m_{01}$.

За время $\Delta t = t - 0 = t$ сквозь площадку S переносится масса

$$m_1 = M_1 t = -D \frac{d\rho_1}{dz} S t; \quad m_2 = M_2 t = -D \frac{d\rho_2}{dz} S t.$$

Выведем закон Фика теоретически. Для простоты положим, что $m_{01} \cong m_{02} \cong m_0$; $d_1 \cong d_2 \cong d$. Тогда будут одинаковы $\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$.

Обозначим количество молекул компонента газа 1, пролетающих за 1с сквозь площадку S в направлении Oz как N_1' , а для направления, противоположного Oz – как N_1'' . Тогда поток массы M_1

$$M_1 = (N_1' - N_1'')m_0.$$

Площадку S пересекают молекулы, отстоящие от нее в среднем на расстоянии $\langle l \rangle$, поэтому число молекул, пролетающих сквозь S в направлении Oz , будет определяться значением числа молекул в единице объема n'_{01} , находящихся в среднем на расстоянии от S , равном $\langle l \rangle$, т.е. в сечении $z - \langle l \rangle$, а в противоположном направлении $-n''_{01}$, соответствующее сечению $z + \langle l \rangle$. Тогда за 1 с:

$$N'_1 = \frac{1}{6} n'_{01} \langle v \rangle S; \quad N''_1 = \frac{1}{6} n''_{01} \langle v \rangle S,$$

или

$$N'_1 - N''_1 = \frac{1}{6} \langle v \rangle S (n'_{01} - n''_{01}),$$

при этом

$$n'_{01} = n_{01}(z) - \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle; \quad n''_{01} = n_{01}(z) + \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle,$$

и $n'_{01} - n''_{01} = n_{01}(z) - \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle - n_{01}(z) - \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle = -2 \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle$.

Здесь также использовано разложение функции в ряд. В результате

$$M_1 = -\frac{1}{6} m_0 \langle v \rangle S 2 \frac{dn_{01}}{dz} \langle l \rangle = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{d\rho_1}{dz} S = -D \frac{d\rho_1}{dz} S.$$

Здесь учтено, что $n_{01} m_0 = \rho_1$ и $d(n_{01} m_0) = d\rho_1$.

Сравнивая с экспериментальным законом Фика, получим, что

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Сравнивая с коэффициентом вязкости, видим, что

$$\eta = \rho D.$$

Подставив в выражение для M_1 формулы для $\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ видим, что

$$D = \frac{\eta}{\rho} \sim \frac{\sqrt{m_0 T}}{m_0 n_0} = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{T}{m_0}},$$

т.е. в отличие от η и λ коэффициент диффузии обратно пропорционален числу молекул в единице объема n_0 , а, следовательно, давлению $p = n_0 kT$:

$$D \sim \frac{1}{p}.$$

Тема 10. Основы термодинамики

§43. Внутренняя энергия термодинамической системы. Теплота и работа

Важной характеристикой термодинамической системы является ее внутренняя энергия U – энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.) и энергия взаимодействия этих микрочастиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы, если она находится во внешних полях. В состав внутренней энергии газообразного тела входят:

- 1) кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекул;
- 2) потенциальная энергия молекул, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия;
- 3) кинетическая и потенциальная энергия колебательного движения атомов в молекулах;
- 4) энергия электронных оболочек атомов и ионов;
- 5) внутриядерная энергия.

Для идеального газа, в котором нет сил межмолекулярного взаимодействия, внутренняя энергия равна сумме энергий теплового движения всех молекул, т.е. внутренняя энергия исчерпывается только пунктом 1. Таким образом, внутренняя энергия одного моля идеального газа будет равна суммарной кинетической энергии молекул, число которых N_A :

$$U_M = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T.$$

Если имеем ν молей газа ($\nu = \frac{m}{M}$), то его внутренняя энергия

$$U = \nu U_M = \nu \frac{i}{2} R T = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T,$$

где m – масса газа, M – молярная масса газа.

Отличительными чертами внутренней энергии являются следующие:

- 1) внутренняя энергия является однозначной функцией состояния (но не функцией процесса) термодинамической системы. Ее значение не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Таким образом, если в результате какого-либо процесса система возвращается в исходное состояние, то изменение ее внутренней энергии равно нулю;
- 2) внутренняя энергия 1 моля системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, зависит только от ее температуры;
- 3) конкретное значение внутренней энергии термодинамической систе-

мы зависит от выбора начала отсчета, т.е. выбора состояния, для которого значение внутренней энергии принимается равным нулю. В результате в выражении для внутренней энергии другого состояния может появиться постоянное слагаемое U_0 .

Однако это не существенно, так как в термодинамических расчетах нужно определять не абсолютные значения внутренней энергии системы, а ее изменение ΔU ;

4) по этой же причине под внутренней энергией реального газа обычно понимают только те её составляющие, которые изменяются в рассматриваемых термодинамических процессах. Понятно, что энергия электронных оболочек, а также внутриядерная энергия не изменяются в тех процессах, которые подчиняются законам реального газа. Поэтому под внутренней энергией реального газа понимается только энергия теплового движения молекул (поступательное, вращательное, колебательное) и потенциальная энергия их взаимодействия.

В отличие от внутренней энергии, работа и теплота являются характеристиками не отдельного состояния системы, а характеристиками совершаемого системой процесса. Теплота – это форма хаотического движения образующих тело микрочастиц. Теплота является энергетической характеристикой процесса теплообмена.

Возможны два различных способа изменения энергии термодинамической системы при ее взаимодействии с внешней средой: путем совершения работы и путем теплообмена. Под теплообменом понимается самопроизвольный необратимый процесс переноса теплоты от более нагретых тел (или участков тел) к менее нагретым. Соответственно, количество энергии, переданной системе в форме работы, называется работой, а количество энергии, переданной системе в форме теплоты, называется теплотой, которая, как и энергия, измеряется в джоулях. Первый способ реализуется при силовом воздействии внешней среды на систему, а второй – в результате теплообмена между системой и внешней средой. Теплообмен обусловлен различием температур системы и среды и происходит в виде конвекции, теплопроводности, излучения.

Общим в понятиях теплоты и работы есть то, что они являются формами передачи одной и той же физической величины – энергии. Различие проявляется в том, что совершение работы над системой, например силовое воздействие на систему, приводит к упорядоченному перемещению ее частей (движение поршня в цилиндре под действием внешней силы) и может привести к изменению любого вида полной энергии системы – потенциальной, кинетической и внутренней. Передача же энергии в форме теплоты приводит к увеличению энергии только хаотического движения частиц системы (молекул, атомов), т.е. идет на увеличение только внутренней энергии.

Термодинамическая система называется изолированной, если отсутствует всякий обмен энергией между ней и внешней средой. Для изолированной системы выполняется закон сохранения и превращения энергии: полная энергия изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Для изолированной системы справедлива уже известная нам формулировка М.В. Ломоносова: «все перемены, в натуре случающиеся, суть тако-го состояния, что сколько от одного тела отыметя, столько присовокупитя другому». Она является исторически первой формулировкой закона.

§44. Первый закон термодинамики

Если система не изолирована, то ее полная энергия может изменяться либо при одновременном изменении энергии тел внешней среды на такую же величину, либо за счет изменения энергии взаимодействия системы с этими телами. Внутренняя энергия может изменяться за счёт совершения над системой работы A и сообщения ей количества теплоты Q . Указанные изменения энергии подчиняются первому закону термодинамики, который является результатом многовекового опыта наблюдения человечества за окружающей природой: количество теплоты, сообщенной системе, расходуется на увеличение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A.$$

Из сравнения первого закона термодинамики и закона сохранения и превращения энергии видно, что первый описывает термодинамические процессы, а второй – состояния термодинамической системы.

Для малого изменения состояния системы уравнение первого закона термодинамики примет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты, dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы, δA – бесконечно малая работа. В этом выражении dU – полный дифференциал, $\oint_L dU \equiv 0$, так как U не зависит от пути процесса. δQ и δA не являются полными дифференциалами, так как зависят от пути процесса.

Из этих формул следует, что количество теплоты измеряется в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в исходное состояние, то изменение ее внутренней энергии за период $\Delta U = 0$. Тогда, согласно первому закону термодинамики,

$$Q = A,$$

т.е. нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем количество сообщенной ему извне энер-

гии. Иными словами вечный двигатель первого рода невозможен. Общее количество теплоты, сообщенное системе в процессе $1 \rightarrow 2$, равно алгебраической сумме теплот δQ , сообщаемых системе на всех малых участках процесса (при этом принято, что $\delta Q > 0$ при получении системой теплоты):

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q.$$

Если при малом изменении состояния системы она совершает работу против внешних сил, т. е. отдает внешней среде энергию в форме работы, то $\delta A > 0$.

На некотором участке $1 \rightarrow 2$ любого термодинамического процесса

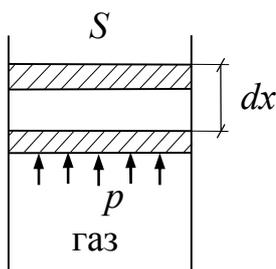


Рис. 77. Газ в цилиндре под поршнем

В этом случае первый закон термодинамики можно записать следующим образом:

$$\delta Q = dU + pdV.$$

Полная работа, совершаемая газом, вычисляется так:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Это выражение справедливо при любых термодинамических процессах, сопровождающихся изменением объема твердых, жидких и газообразных тел.

Термодинамические процессы можно изобразить графически (рис. 78) в результате решения уравнения состояния данной массы газа:

$$f(p, V, T) = 0.$$

Работа δA изображается заштрихованной полоской; соответственно полная работа изображается площадью фигуры V_112V_2 с помощью графического истолкования интеграла

$$A = \int_{V_2}^{V_1} pdV.$$

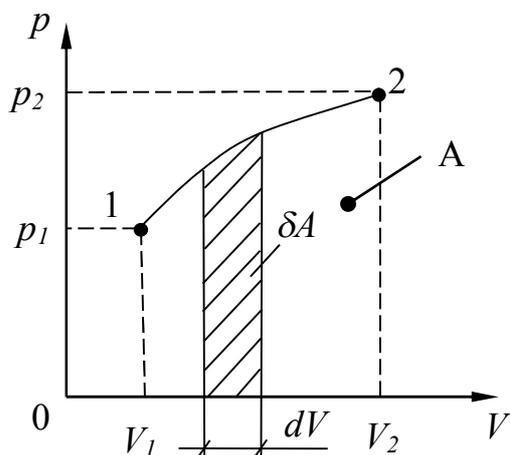


Рис. 78. Графическое представление термодинамического процесса

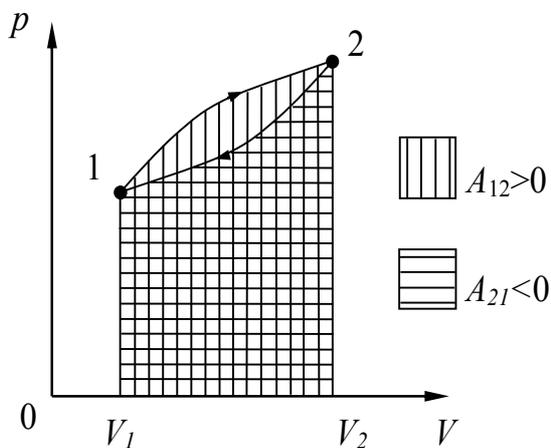


Рис. 79. Графическое представление работы при круговом процессе

Зная значения p_1 , V_1 , всегда можно вычислить T_1 .

Графически можно изображать только равновесные процессы, т.е. такие, при которых параметры системы во всех ее частях одинаковы в любой момент времени.

Все реальные процессы неравновесны, однако, решение вопроса о равновесности системы является относительным.

Например, при сжатии газа поршнем процесс можно считать равновесным, если скорость движения поршня много меньше скорости звука в этом газе, т.е. меньше скорости распространения давления в газе. В этом случае давление и температура газа успевают выравниваться по всему объему, так как их выравнивание происходит со скоростью, равной скорости звука в данном газе. Из рис. 78 видно, что работа зависит от пути процесса на диаграмме, построенной в координатах p, V ; V, T или p, T , по которому осуществляется этот процесс. Если процесс изображается замкнутой кривой (рис. 79), то результирующая работа системы не равна нулю в отличие от внутренней энергии.

§45. Теплоемкость вещества. Уравнение Майера

В зависимости от вида термодинамического процесса различают простую, удельную и молярную теплоемкости. Теплоемкостью вещества (термодинамического тела) называется физическая величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания вещества на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \text{ Дж/К.}$$

Удельная теплоемкость – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}, \text{ Дж/(кг К).}$$

Молярная теплоемкость – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_M = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \text{ Дж/(моль К)},$$

где ν – число молей вещества. Поскольку $\nu = \frac{m}{M}$, то

$$C_M = \frac{M\delta Q}{m dT} = cM,$$

где M – молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества поддерживаются постоянными соответственно объем или давление.

С учетом понятия теплоемкости запишем выражение первого закона термодинамики для одного моля газа ($\nu = 1$):

$$\delta Q_M = C_M dT = dU_M + p dV_M.$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю, так как $dV_M = 0$, и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии, поэтому уравнение первого закона термодинамики выглядит так:

$$\delta Q_M = C_V dT = dU_M.$$

Здесь C_V – молярная теплоемкость газа при $V = \text{const}$.

Следовательно

$$C_V = \frac{dU_M}{dT},$$

т.е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V равна изменению внутренней энергии 1 моля газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле для вычисления внутренней энергии

$$dU_M = \frac{i}{2} R dT,$$

тогда

$$C_V = \frac{i}{2} \frac{R dT}{dT} = \frac{i}{2} R.$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то уравнение первого закона термодинамики можно записать так:

$$\delta Q_M = C_p dT = dU_M + p dV_M.$$

Здесь C_p – молярная теплоемкость газа при $p = \text{const}$. Далее видно, что

$$C_p = \frac{dU_M}{dT} + p \frac{dV_M}{dT} = C_V + \frac{p dV_M}{dT}.$$

Продифференцировав уравнение Менделеева–Клапейрона по T , полу-

чим (при $p = \text{const}$)

$$\frac{d}{dT} pV_M = \frac{d}{dT} RT; \quad p \frac{dV_M}{dT} = R \frac{dT}{dT} = R.$$

Подставив полученный результат в выражение для C_p , видим, что

$$C_p = C_V + R.$$

Это выражение называется уравнением Майера (немецкий врач). Оно показывает, что C_p всегда больше C_V на величину молярной газовой постоянной R . Объяснение состоит в том, что при нагревании газа при $p = \text{const}$ требуется дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

Последнее обстоятельство видно так же из сравнения математических выражений первого закона термодинамики для $V = \text{const}$ и $p = \text{const}$:

$$V = \text{const}, \quad \delta Q_M = C_V dT = dU_M; \\ p = \text{const}, \quad \delta Q_M = C_p dT = dU_M + pdV_M.$$

Поскольку $C_V = iR/2$, то из уравнения Майера получается:

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R.$$

Важной характеристикой идеального газа является отношение теплоемкостей

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2}R \frac{2}{iR} = \frac{i+2}{i}.$$

§46. Изопроецессы идеального газа

Среди равновесных процессов, совершаемых термодинамическими системами, выделяются изопроецессы, при которых один из основных параметров сохраняется постоянным.

Изохорный процесс (от греческого hora – занимаемое место), $V = \text{const}$. График этого процесса (изохора) в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси ординат, где процесс 1→2 есть изохорное нагревание, а 1→3 – изохорное охлаждение (рис. 80). При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, поэтому, для одного моля

$$\delta A_M = pdV_M = 0.$$

Тогда из первого закона термодинамики

$$\delta Q_M = dU_M + \delta A_M$$

следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q_M = dU_M.$$

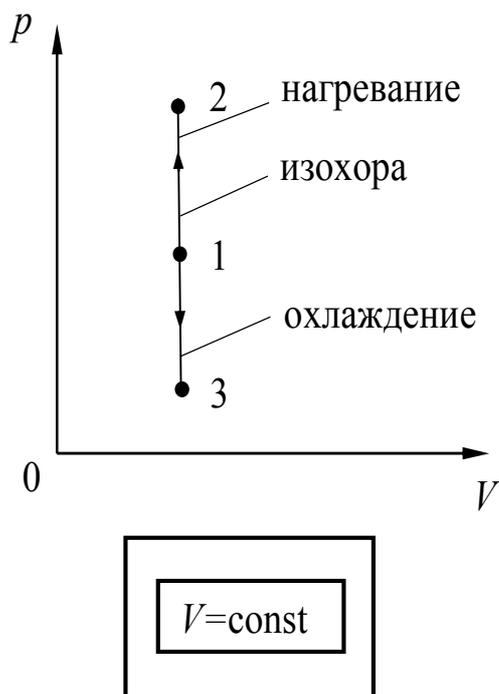


Рис. 80. График изохорного процесса

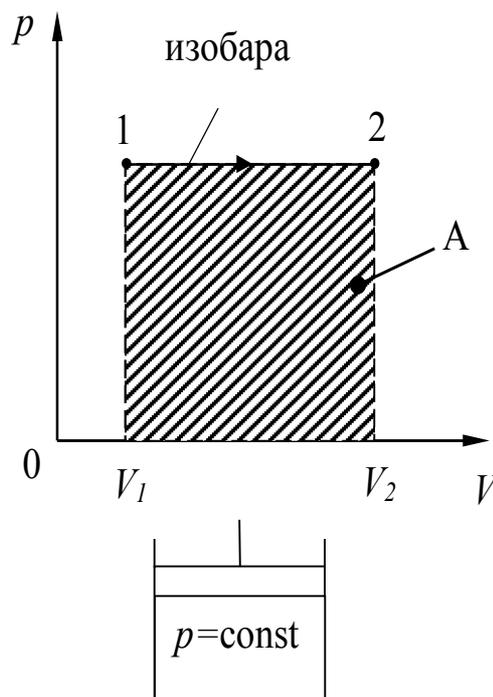


Рис. 81. График изобарного процесса

При $V = \text{const}$ для одного моля идеального газа

$$dU_M = C_V dT, \quad \delta Q_M = C_V dT,$$

поэтому для произвольной массы газа получим

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

В идеальном газе отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия, и внутренняя энергия представляет собой лишь кинетическую энергию теплового движения молекул, которое имеет место при любых процессах поэтому в случае идеального газа последняя формула справедлива для любого процесса. Кроме того, внутренняя энергия одного моля идеального газа зависит только от его теплоемкости C_V и температуры.

Изобарный процесс (от греч. baros – тяжесть), $p = \text{const}$. Изобарный процесс совершает газ, заключенный в цилиндр со свободно перемещающимся поршнем. Диаграмма этого процесса (изобара) в координатах p, V изображается прямой 1–2, параллельной оси V (рис. 81). При изобарном процессе работа газа при расширении от объема V_1 до V_2 вычисляется так:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника. Если использовать уравнение Менделеева–Клапейрона для указанных двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда

$$p(V_2 - V_1) = A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Нетрудно видеть, что универсальная газовая постоянная

$$R = \frac{A}{\frac{m}{M}(T_2 - T_1)}.$$

Отсюда вытекает физический смысл универсальной газовой постоянной:

$$R = A \quad \text{при} \quad \frac{m}{M} = 1 \text{ моль и } T_2 - T_1 = 1\text{К},$$

т.е. R численно равна работе изобарного расширения одного моля идеального газа при нагревании его на один кельвин.

В изобарном процессе при сообщении газу массой m количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M}C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину

$$dU = \frac{m}{M}C_v dT.$$

При этом газ совершает работу $dA = \frac{m}{M}RdT = pdV$ и первый закон термодинамики выглядит так:

$$\frac{m}{M}C_p dT = \frac{m}{M}C_v dT + pdV.$$

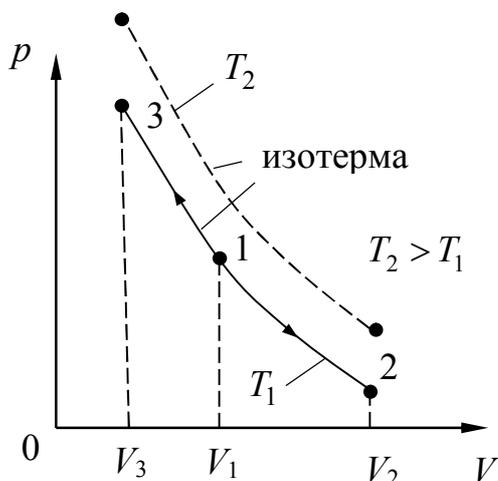


Рис. 82. График изотермического процесса

Изотермический процесс, $T = \text{const}$. Уравнением изотермического процесса является уравнение закона Бойля–Мариотта:

$$pV = \text{const}.$$

Диаграмма этого процесса (изотерма) в координатах p, V представляет собой гиперболу, расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура (рис. 82). Вычислим работу газа в изотермическом процессе:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}.$$

Здесь учтено, что из уравнения Менделеева–Клапейрона давление газа

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}.$$

Выполнив интегрирование получим, что

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Из первого закона термодинамики: $\delta Q = dU + \delta A$ следует для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A,$$

так как при $T = \text{const}$ в идеальном газе его внутренняя энергия не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0,$$

а все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Следовательно, для того, чтобы при работе расширения газа его температура не уменьшалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное работе расширения газа, совершаемой против внешних сил.

§47. Адиабатический процесс

Адиабатическим (от греч. *adiabatos* – непреходимый) называется процесс, при котором отсутствует теплообмен ($\delta Q = 0$) между термодинамической системой и окружающей средой. Близкими к адиабатическим являются все быстро протекающие процессы, при которых указанный теплообмен не успевает пройти. Например, адиабатическим можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны (или давления) настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатические процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие топливной смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т.д.

Из первого закона термодинамики для адиабатического процесса ($\delta Q = 0$)

$$\delta Q = dU + \delta A = 0$$

следует, что

$$\delta A = -dU.$$

Так как работа против внешних сил $\delta A > 0$, то $dU < 0$ и работа против внешних сил совершается за счет уменьшения внутренней энергии системы. Таким образом, адиабатический процесс противоположен изотермическому, так как в последнем работа совершается за счет притока извне эквивалентного количества теплоты, а при адиабатическом притока теплоты нет.

Выведем уравнение адиабатического процесса для переменных p и V . Для произвольной массы газа первый закон термодинамики для адиабатического процесса можно записать так:

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_V dT + p dV = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p dV = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Продифференцировав уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

получим:

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT.$$

Разделим последнее уравнение на уравнение $p dV = -\frac{m}{M} C_V dT$, чтобы избавиться от переменной T :

$$\frac{p dV + V dp}{p dV} = \frac{\frac{m}{M} R dT}{-\frac{m}{M} C_V dT} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V} = -\frac{C_p}{C_V} + 1.$$

Разделим переменные:

$$1 + \frac{V dp}{p dV} = -\gamma + 1; \quad V dp = -\gamma p dV.$$

Здесь учтено, что $\gamma = C_p / C_V$.

Разделив это уравнение на произведение pV , видим, что

$$\begin{aligned} \frac{V dp}{pV} &= -\gamma \frac{p dV}{pV}; & \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} &= -\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}; & \ln \frac{p_2}{p_1} &= -\gamma \ln \frac{V_2}{V_1}; \\ \ln \frac{p_2}{p_1} &= \gamma \ln \frac{V_1}{V_2}; & \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; & p_1 (V_1)^\gamma &= p_2 (V_2)^\gamma = p_3 (V_3)^\gamma = \dots \end{aligned}$$

Так как состояния 1, 2, 3 выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Это уравнение называется уравнением газового состояния для адиабатического процесса, или уравнением Пуассона (французский физик).

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона уравнению Пуассона можно придать вид

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \text{ либо } T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

В этих уравнениях безразмерная величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

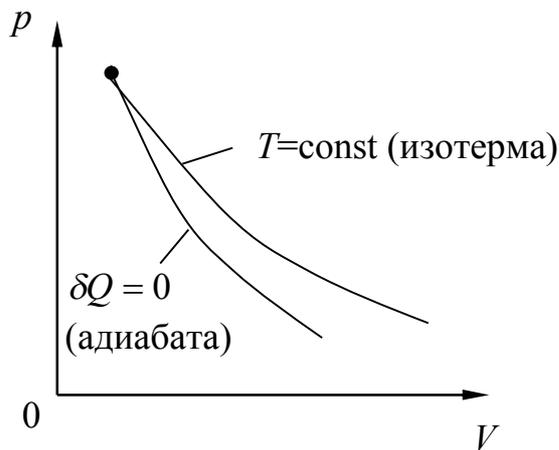


Рис. 83. График адиабатического процесса

называется коэффициентом Пуассона (показателем адиабаты).

Для одноатомных газов (Ne, He и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности, $i = 3$, $\gamma = 1,67$. Для двухатомных газов (H_2 , O_2 , N_2 и др.) $i = 5$, $\gamma = 1,41$. Значения γ , вычисленные таким образом, хорошо подтверждаются экспериментом. Диаграмма адиабатического процесса в координатах p, V изображается гиперболой. На рис. 83

видно, что адиабата ($pV^{\gamma} = \text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV = \text{const}$). Математически это объясняется тем, что $\gamma > 1$.

С точки зрения термодинамики большая кривизна адиабаты по сравнению с изотермой объясняется тем, что при адиабатическом сжатии увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры за счёт отсутствия отвода теплоты.

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе:

$$\delta A = -dU = -\frac{m}{M} C_v dT.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема V_1 до V_2 , то его температура падает от T_1 до T_2 и работа расширения идеального газа

равна

EMBED Equation.3

Выразим работу A при адиабатическом процессе (через параметры p, V ; для этого запишем уравнение Пуассона через параметры T и V):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1};$$

в результате получим, что

$$A = \frac{m}{M} C_V T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{m}{M} C_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Из уравнения Майера выделим теплоемкость C_V :

$$C_p - C_V = R; \quad \gamma - 1 = \frac{R}{C_V}; \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

В итоге видим, что

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Как видно из рис. 82, пропорциональная площади под кривой работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатическом расширении нет притока энергии в форме теплоты, тогда как при изотермическом есть приток извне эквивалентного количества теплоты.

§48. Круговые процессы.

Обратимые и необратимые процессы

Круговым процессом (циклом, от греч. *kuklos* – круг), называется процесс, при котором система, пройдя ряд состояний, возвращается в исходное состояние. На диаграмме $p - V$ цикл изображается замкнутой кривой (рис. 84).

Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (1–2) и сжатия (2–1) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры 1a2V₂V₁1) положительна ($dV > 0$). Работа сжатия (определяется площадью фигуры 2b1V₁V₂2) отрицательна ($dV < 0$). Следовательно, работа, совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за цикл совершается положительная работа

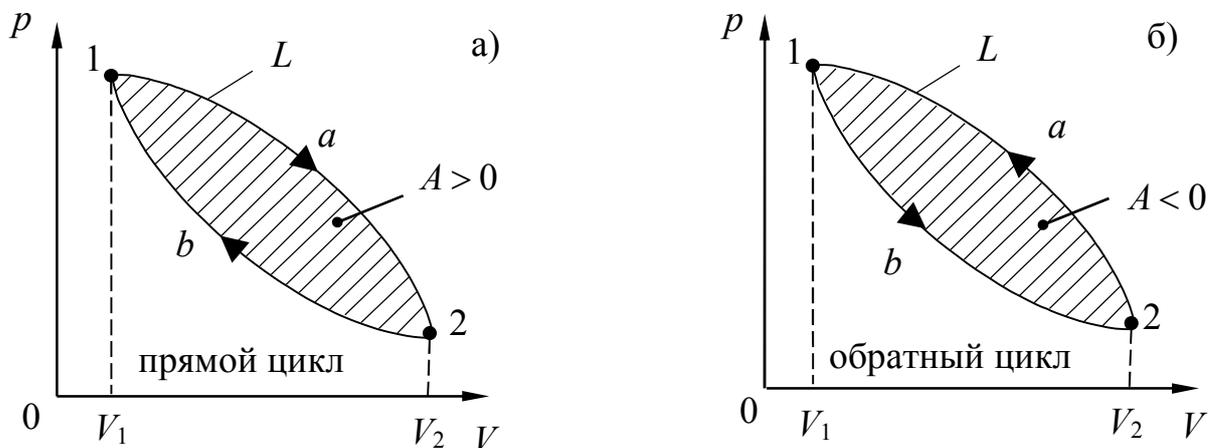


Рис. 84. Графики прямого (а) и обратного (б) циклов

$A = \oint_L p dV > 0$ (цикл протекает по ходу часовой стрелки, рис. 84 а), то он называется прямым. Если за цикл совершается отрицательная работа $A = \oint_L p dV < 0$ (цикл происходит против хода часовой стрелки, рис. 84 б), то он называется обратным.

Прямой цикл используется в тепловом двигателе – периодически действующем устройстве, совершающем работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в холодильных машинах – периодически действующих устройствах, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится от устройства к телу с более высокой температурой, следовательно температура устройства понижается.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю, $\Delta U = 0$. Поэтому первый закон термодинамики для кругового процесса выглядит так:

$$Q = \Delta U + A = A,$$

т.е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой, Q_2 – количество теплоты, отданное системой. Поэтому термический коэффициент полезного действия кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Термодинамический процесс называется обратимым, если при его протекании возможно возвращение системы в исходное состояние с любого состояния процесса без изменений во внешней среде. Тепловой двигатель, работающий по обратимому циклу, называется обратимым.

Если в результате термодинамического процесса в системе и во внешней среде остались какие-либо изменения, то такой процесс называется необратимым. Примером необратимого процесса может служить торможение тела вследствие трения. При этом механическая энергия торможения тела как целого расходуется на увеличение энергии теплового движения частиц тела и внешней среды (т.е. трущихся поверхностей). Следовательно, за счет кинетической энергии E_k возрастает внутренняя энергия тела и среды, нагревающихся при трении ($\Delta U = E_k$). Этот прямой процесс протекает самопроизвольно – для его осуществления не требуется протекания еще каких-либо процессов во внешних телах. Иначе обстоит дело с обратным процессом. Для возвращения системы в исходное состояние необходимо, чтобы остановившиеся тело вновь пришло движение за счет соответству-

ющего охлаждения его самого и внешней среды. Опыт показывает, что хаотическое тепловое движение частиц тела не может самопроизвольно вызывать упорядоченное движение этих частиц как целого. Для осуществления такого процесса необходим дополнительный, так называемый компенсирующий процесс. Он должен заключаться в охлаждении тела и среды до первоначальной температуры, т.е. в отдаче ими холодильнику теплоты $Q = E_k$ и в совершении над телом работы $A' = E_k$. Поэтому, хотя в результате прямого и обратного процессов система тело – среда и возвращается в исходное состояние, состояния внешних тел изменяются, следовательно процессы, сопровождающиеся трением, являются необратимыми.

Так же необратимым является процесс теплообмена между двумя телами, имеющими различную температуру. Этот процесс идет самопроизвольно, в результате чего температуры тел выравниваются. Однако противоположный процесс – нагревание одного тела за счет охлаждения другого – невозможен. Следовательно, процесс теплообмена при конечной разности температур так же является необратимым.

Все реальные процессы протекают не бесконечно медленно, а с конечной скоростью, поэтому они сопровождаются теплообменом. В результате все реальные процессы являются необратимыми. Однако во многих случаях эти процессы близки к равновесным, и их можно приближенно рассматривать как обратимые процессы. Практически изучение обратимых процессов важно по двум причинам: 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы; 2) обратимые процессы являются наиболее экономными и приводят к максимальному значению термического коэффициента полезного действия тепловых двигателей, что позволяет указать пути повышения к.п.д. реальных тепловых двигателей.

§49. Второй закон термодинамики. Цикл Карно

Первый закон термодинамики не позволяет определить направление протекания процессов. Например, процесс самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, получаемой вторым телом, однако самопроизвольно такой процесс не происходит.

Кроме того, первый закон термодинамики не исключает возможность такого процесса, единственным результатом которого было бы превращение всей теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу. Например, основываясь на первом законе можно было бы попытаться построить периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, например за счет внутренней энергии океанов. Такой двигатель называется вечным двигателем второго рода.

Обобщение человечеством огромного экспериментального материала привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода. Этот вывод получил название второго закона термодинамики:

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему.

Второй закон термодинамики указывает на неравноценность двух форм передачи энергии – теплоты и работы. Этот закон означает, что процесс перехода упорядоченного движения тела как целого в неупорядоченное движение его частиц необратим. Например, при изотермическом расширении идеальный газ совершает работу, которая постоянно эквивалентна теплоте, сообщаемой газу. Однако газ при этом расширяется, его удельный объем возрастает. Поэтому газ не возвращается в исходное состояние и превращение теплоты в работу не является единственным результатом рассматриваемого процесса. Чтобы тепловой двигатель не принимал бесконечно больших размеров, его надо возвращать в исходное состояние, а для этого необходимо часть полученной от нагревателя теплоты передавать холодильнику. Следовательно, работа за цикл не эквивалентна всей подведенной теплоте.

Руководствуясь вторым законом термодинамики, французский физик Карно доказал теорему, согласно которой:

1) из всех периодических тепловых двигателей наибольшим к.п.д. обладают обратимые двигатели.

2) к.п.д. обратимых двигателей, нагреватели и холодильники которых имеют одинаковые температуры, равны и не зависят от конструкции двигателей.

Цикл, предложенный и изученный Карно, является самым экономным и представляет собой круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 84):

1–2 – изотермическое расширение при температуре T_1 ;

2–3 – адиабатическое расширение;

3–4 – изотермическое сжатие при температуре $T_2 < T_1$;

4–1 – адиабатическое сжатие.

Передача теплоты Q_2 холодильнику является обязательным условием реализации цикла Карно, так как устройство необходимо вернуть к первоначальным размерам, иначе, как уже отмечалось, оно будет бесконечно большим.

Вычислим к.п.д. идеального цикла Карно $\left(\eta = \frac{A}{Q_1}\right)$, рабочим телом которого (пар, газ) является идеальный газ (см. рис. 85). Работа, совершаемая

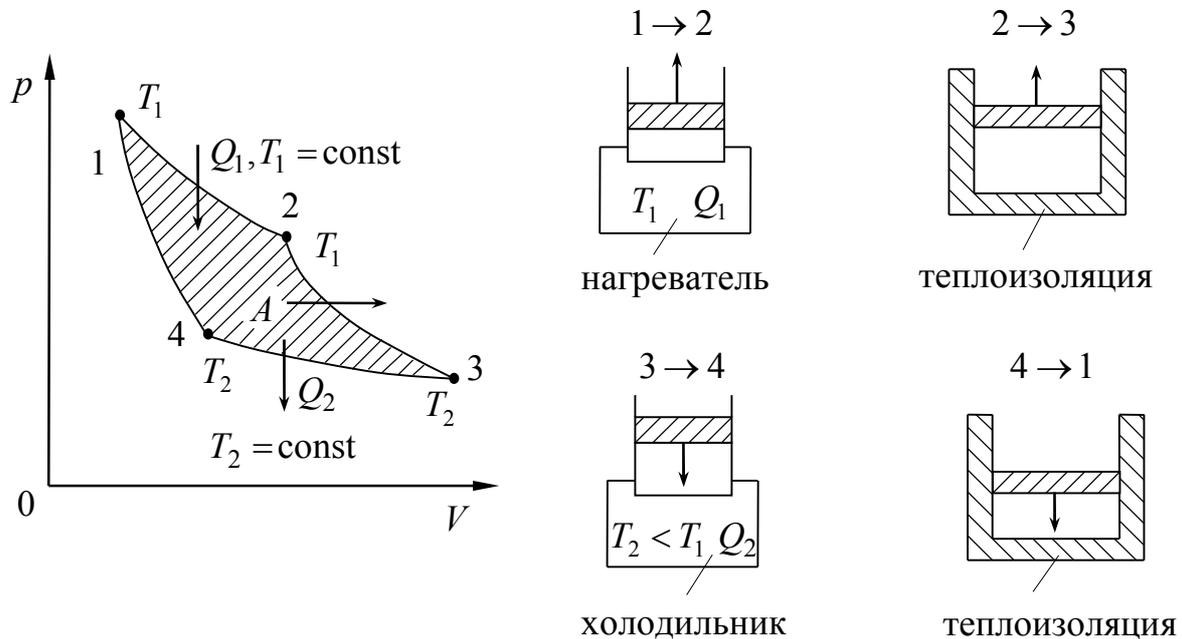


Рис. 85. К вычислению к.п.д. идеального цикла Карно

в результате цикла Карно

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}.$$

При изотермическом процессе 1–2 $U = \text{const}$, поэтому количество теплоты Q_1 , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения A_{12} , совершаемой газом против внешних сил при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1, \text{ так как } \Delta U_{12} = 0.$$

При адиабатическом расширении 2–3 теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения A_{23} против внешних сил совершается за счет уменьшения внутренней энергии:

$$A_{23} = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

Теплота Q_2 , отданная газом холодильнику при изотермическом сжатии 3–4, равна работе сжатия A_{34} , совершаемой внешними силами:

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = -Q_2 \text{ так как } \Delta U_{34} = 0.$$

Работа адиабатического сжатия 4–1 за счет внешних сил:

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

В итоге работа, совершаемая в результате цикла Карно

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Термический к.п.д. цикла Карно, согласно определению

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Используя уравнение для адиабат 2–3 и 4–1, получим:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}; \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1},$$

откуда

$$\frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_4^{\gamma-1}}; \quad \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1}; \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

В результате

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2)}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

т.е. для цикла Карно к.п.д. действительно определяется только температурой нагревателя и холодильника.

§50. Энтропия и свободная энергия

Поскольку термодинамические процессы в одних направлениях протекают самопроизвольно, а в других направлениях их самопроизвольное протекание невозможно, то возникает вопрос: как количественно оценить возможность или невозможность самопроизвольного протекания процесса? Для этого служат такие однозначные функции состояния вещества как энтропия и свободная энергия (от греч. entropia – превращение), основанные на использовании понятия приведенного количества теплоты Q^* :

$$Q^* = \frac{Q}{T} \text{ при } T = \text{const.}$$

Это отношение теплоты Q , полученной телом в изотермическом процессе к температуре источника теплоты. При нагревании тела $Q^* > 0$, так как $Q > 0$, при охлаждении $Q^* < 0$. В тех случаях, когда теплоту Q тело получает в произвольном процессе, надо разбить этот процесс на беско-

нечно малые участки, для которых температуру можно считать постоянной, тогда приведенное количество теплоты для такого участка равно $\frac{\delta Q}{T}$.

На произвольно выбранном участке 1–2

$$Q_{12}^* = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Вычислим приведенное количество теплоты Q^* , сообщаемое телу в обратимом цикле Карно:

$$Q_k^* = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} - \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} - \int_4^1 \frac{\delta Q}{T}.$$

В адиабатических процессах 2–3 и 4–1 $\delta Q = 0$. В изотермических процессах 1–2 и 3–4 температура постоянна и равна T_1 и T_2 соответственно. Поэтому

$$Q_k^* = \frac{1}{T_1} \int_1^2 \delta Q - \frac{1}{T_2} \int_3^4 \delta Q = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}.$$

Из определения к.п.д. цикла Карно

$$\eta_k = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

получим, что

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Далее

$$Q_1 \cdot T_2 = Q_2 \cdot T_1; \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}; \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

поэтому

$$Q_k^* = 0.$$

Это справедливо для любого кругового обратимого процесса: приведенное количество теплоты Q^* , сообщенное телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$\oint_{обр} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла, является полным дифференциалом функции, обозначаемой S :

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{обр}.$$

Функция состояния S суть энтропия системы (тела). Энтропией называется функция состояния термодинамической системы, полный дифференциал которой равен приведенному количеству теплоты, полученной этой системой в обратимом процессе.

По характеру изменения энтропии можно судить о направлении процесса теплообмена, так как при нагревании тела его энтропия возрастает, а при охлаждении убывает.

Вычислим изменение энтропии идеального газа на участке 1–2:

$$\Delta S = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{обр} .$$

Здесь

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{m}{M} C_V dT + p dV ,$$

и бесконечно малое изменение энтропии в обратимом процессе

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{обр} = \frac{m}{M} C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = \frac{m}{M} C_V \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V} .$$

В последнем выражении учтено, что из уравнения Менделеева–Клапейрона отношение

$$\frac{p}{T} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{V} .$$

Тогда изменение энтропии идеального газа на участке 1–2

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left[C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \right] = \frac{m}{M} \left[C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right] ,$$

то есть изменение энтропии идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода $1 \rightarrow 2$, а зависит только от параметров начального и конечного состояний.

Так как для адиабатического процесса $\delta Q = 0$, то $\Delta S = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$, то есть адиабатический процесс протекает при постоянной энтропии. При изотермическом процессе ($T_1 = T_2$):

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} ;$$

при изохорном процессе ($V_1 = V_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Для обратимых круговых процессов изменение энтропии не зависит от пути процесса, так как энтропия есть функция состояния:

$$\Delta S = \oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

В термодинамике доказывается, что энергия системы, совершающей необратимый круговой процесс, возрастает

$$\Delta S > 0.$$

Эти выводы относятся к изолированным системам; если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом.

Оба результата для ΔS можно распространить на любые изолированные системы: энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать:

$$\Delta S \geq 0.$$

Последнее выражение есть так называемое неравенство Клаузиуса (немецкий физик). Первый закон термодинамики не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Ответ на этот вопрос дает второй закон термодинамики. Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса второй закон термодинамики формулируется так: при любых процессах, происходящих в изолированной системе, энтропия не убывает.

Приведённое количество теплоты, сообщенное системе при бесконечно малом обратимом изменении его состояния

$$\left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{обр}} = dS; \quad \delta Q = TdS.$$

Для необратимого процесса $dS > \frac{\delta Q}{T}$ и $\delta Q < TdS$. Для произвольного процесса $\delta Q \leq TdS$.

В этом случае для первого закона термодинамики, справедливого для неизолированной системы, получим

$$TdS \geq dU + \delta A.$$

Это неравенство является важнейшим соотношением термодинамики, так как объединяет ее первый и второй законы.

Для обратимого процесса

$$TdS = dU + \delta A \quad \text{и} \quad \delta A = TdS - dU.$$

Добавим и вычтем SdT :

$$\begin{aligned} \delta A &= TdS - dU + SdT - SdT = TdS + SdT - dU - SdT = d(TS) - dU - SdT = \\ &= -d(\underbrace{U - TS}_{=F}) - SdT = -(dF + SdT) \end{aligned}$$

Величина F – называется свободной энергией. Она представляет собой разность двух функций состояния и поэтому так же является функцией состояния.

Если рабочее тело совершает обратимый изотермический процесс, то из формулы

$$\delta A = -(dF + SdT);$$

при $dT = 0$ получим

$$\delta A_{изот} = -dF, \text{ или } A_{изот} = F_1 - F_2.$$

Таким образом, свободная энергия служит мерой той работы, которую совершает система в обратимом изотермическом процессе:

$$-dF = -dU + d(TS); \quad dU = dF + d(TS),$$

т.е. свободной энергией называется часть внутренней энергии системы, которая может быть превращена в работу против внешних сил.

Отсюда видно, что

$$U = F + TS.$$

Внутренняя энергия равна сумме свободной энергии F и связанной энергии TS . Связанная энергия представляет собой ту часть внутренней энергии системы, которая не может быть передана в форме работы внешней среде при изотермическом процессе. Она тем больше, чем больше энтропия тела, поэтому энтропия системы служит мерой обесцененности её внутренней энергии.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в изолированной системе ведут к увеличению ее энтропии – принцип возрастания энтропии. Этот принцип лежит в основе еще одной формулировки второго закона термодинамики: в изолированной макроскопической системе возможны лишь такие процессы, которые ведут к увеличению ее энтропии.

С учетом энтропии первый закон термодинамики для обратимого процесса был записан так:

$$TdS = dU + \delta A.$$

При обратимом изохорном процессе ($V = \text{const}$, $dV = 0$ и $\delta A = 0$) указанный закон примет вид:

$$TdS = dU,$$

откуда

$$T = \frac{dU}{dS}.$$

Это выражение является определением абсолютной температуры (шкала Кельвина). Температура – это первая производная от внутренней энергии тела по его энтропии при обратимом изохорном процессе.

Рассматривая Вселенную как изолированную систему и применяя к ней второй закон термодинамики, Клаузиус заключил, что в результате непрерывного увеличения энтропии она должна достигнуть максимума для Вселенной, то есть все формы движения материи должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, то есть наступит полное теп-

ловое равновесие, и все процессы во Вселенной прекратятся – наступит тепловая смерть Вселенной. Ошибочность этого заключения Клаузиуса заключается в том, что бессмысленно применять второй закон термодинамики к неизолированным системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная.

§51. Статистическое истолкование второго закона термодинамики

Выясним, какова связь второго закона термодинамики с молекулярно – кинетической теорией строения вещества. С точки зрения этой теории каждому состоянию газа соответствует определенное распределение молекул по скоростям. Предположим, что в сосуде находятся три молекулы a , b и c и весь сосуд разбит на три равные части I, II, III (рис. 86). Молекулы движутся хаотически, следовательно, если бы мы длительное время наблюдали за возможными распределениями молекул a , b и c , то обнаружили бы, что в среднем, все 27 распределений встречаются одинаково часто. Для характеристики степени возможности появления в заданных конкретных условиях некоторого определенного события вводят понятие математической вероятности p этого события. В частности, если при данных условиях могут поочередно осуществляться N различных событий, которые все равновозможны, то математическая вероятность какого-либо определенного события

$$p = \frac{1}{N}.$$

N	I	II	III
1	abc	–	–
2	–	abc	–
3	–	–	abc
4	ab	c	–
5	ab	–	c
6	ac	b	–
7	bc	a	–
–	---	---	---
27	c	b	a

Рис. 86. Распределение молекул по частям сосуда

Из таблицы следует, что математическая вероятность

$$p = \frac{1}{N} = \frac{1}{27}.$$

Однако математическая вероятность каждого отдельного распределения, вычисленная по этой формуле, отлична от вероятности термодинамического состояния системы, соответствующего этому распределению. Дело в том, что в однородном газе все молекулы одинаковы (иногда говорят неразличимы), поэтому распределения 4, 6, 7 соответствуют одному и тому же состоянию. Вероятность такого термодинамического состояния в три раза больше чем математическая вероятность. Термодинамическая вероятность состояния системы W – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющий данное макросостояние, то есть $W \geq 1$

(макросостояние – состояние с данными p , V и T). В рассмотренном случае $W = 3$.

Физический смысл энтропии был выяснен Больцманом, предположившим, что энтропия связана с термодинамической вероятностью состояния системы. Формула Больцмана имеет следующий вид:

$$S = k \ln W ,$$

k – постоянная Больцмана.

Таким образом, энтропия, по Больцману, определяется логарифмом числа способов возможных распределений молекул газа по координатам и скоростям, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние.

Следовательно, энтропия может рассматриваться как мера вероятности состояния термодинамической системы. Формула Больцмана позволяет дать энтропии следующее статистическое истолкование: энтропия является мерой неупорядоченности системы. В этом заключается её физический смысл. Чем больше число способов, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия – наиболее вероятного состояния системы – число способов максимально, при этом максимальна и энтропия.

Сопоставляя выражения

$$\Delta S \geq 0 \text{ и } S = k \ln W , W \geq 1 ,$$

видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояния изолированной системы могут либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов). Исходя из этого можно сформулировать второй закон термодинамики, отражая его статистический смысл: при необратимых процессах, происходящих в изолированной системе, вероятность какого-либо состояния системы возрастает, при обратимых же процессах остается неизменной.

§52. Реальные газы. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах

Экспериментальные исследования показывают, что теплоемкость, вязкость и другие свойства реальных газов отличаются от соответствующих свойств идеальных газов. Причина кроется в том, что поведение молекул реальных газов отличается от того, какое приписывается молекулам идеальных газов. Во всех реальных газах молекулы взаимодействуют друг с другом. Тот факт, что свойства разреженных газов близки к свойствам идеальных газов свидетельствует, что силы взаимодействия между молекулами в сильной степени зависят от расстояния между ними, а именно, чем больше расстояние, тем меньше силы взаимодействия. Эти силы имеют электромагнитную, а так же особую квантовую природу. Опыты пока-

зывают, что пренебречь межмолекулярным взаимодействием можно только на расстоянии между молекулами $\geq 10^{-9}$ м.

Свойства тел свидетельствуют о том, что между молекулами одновременно действуют силы и притяжения и отталкивания, причем зависимость сил взаимного притяжения и отталкивания от расстояния r между молекулами должна быть различной. На очень близких расстояниях преобладают силы отталкивания \vec{F}_1 , на более далеких – силы взаимного притяжения \vec{F}_2 , причем силы направлены по линии, соединяющей точки пространства, в которых находятся молекулы. Равнодействующая этих сил

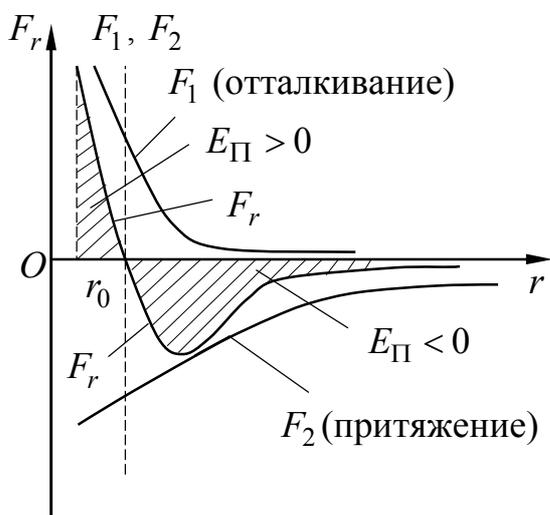


Рис. 87. Зависимости сил взаимодействия молекул от расстояния

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Зависимость проекций сил на ось Or от расстояния между молекулами показана на рис. 87. Проекция на ось Or равнодействующей силы $F_r = F_1 - F_2$. При $r = r_0$ силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 взаимно уравниваются и равнодействующая сила $\vec{F}_2 = 0$. Если $r > r_0$, то преобладают силы взаимного притяжения, если $r < r_0$ – преобладают силы отталкивания. Таким образом, r_0 – это то равновесное расстояние между молекулами, на котором они находились бы при отсутствии теплового движения, нарушающего это равновесие. Рассмотрим взаимную потенциальную энергию E_{Π} двух молекул. Ее можно найти следующим образом. Подсчитаем элементарную работу dA , совершаемую равнодействующей силой \vec{F}_r межмолекулярного взаимодействия при увеличении расстояния между молекулами на dr

$$dA = (\vec{F}_r, d\vec{r}) = F_r dr.$$

Эта работа совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул

$$dA = -dE_{\Pi}; \quad dE_{\Pi} = -F_r dr; \quad \int_{E_{\Pi}}^{E_{\Pi\infty}} dE_{\Pi} = -\int_r^{\infty} F_r dr; \quad E_{\Pi} - E_{\Pi\infty} = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

На бесконечно большом расстоянии друг от друга молекулы не взаимодействуют. Поэтому взаимную потенциальную энергию $E_{\Pi\infty}$ двух бесконечно удаленных молекул можно считать равной нулю ($E_{\Pi\infty} \rightarrow 0$), отсюда

$$E_{\Pi} = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

Интеграл можно найти аналитически, если задана зависимость $F_r(r)$. Он пропорционален площади, ограниченной кривой $F_r = F_r(r)$ (см. рис. 87). При $r > r_0$ взаимная потенциальная энергия отрицательна, так как $F_r < 0$; при $r = r_0$ $\left(\frac{dE_{\Pi}}{dr}\right)_{r=r_0} = -F_r(r_0) = 0$, то есть E_{Π} достигает миниму-

ма. Таким образом, в состоянии устойчивого равновесия система, состоящая из двух взаимодействующих молекул, обладает минимальной потенциальной энергией (рис. 88). Если

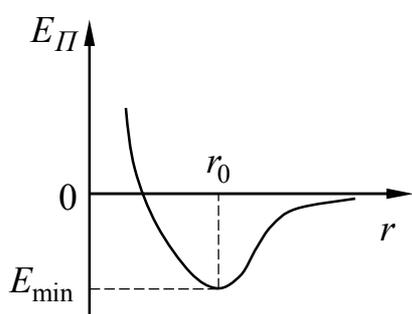


Рис. 88. Зависимость потенциальной энергии двух молекул от расстояния между ними

$|E_{\Pi \min}| \ll kT \left(\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT\right)$, то вещество находится в газообразном состоянии. Условие $|E_{\Pi \min}| \gg kT$ соответствует твердому состоянию, а $|E_{\Pi \min}| \cong kT$ – жидкому. Сравнительно слабые силы притяжения, которые действуют между молекулами реального газа на расстояниях $\sim 10^{-9}$ м называются ван-дер-ваальсовыми силами по имени голландского физика Ван-дер-Ваальса, который впервые получил приближенное уравнение состояния

реального газа. Различают три типа ван-дер-ваальсовых сил притяжения:

1) ориентационные силы, которые связаны с наличием у молекул, имеющих несимметричное строение, электрических моментов, т.е. систем разносѐнных в пространстве разноимѐнных зарядов.

2) индукционные (от лат. induction – наведение) силы притяжения; возникают между молекулами в том случае, если неполярная (электрически незаряженная) молекула 1 находится в электрическом поле, которое создает другая полярная (имеющая электрический момент) молекула 2. В результате первая молекула также становится полярной и наступает электростатическое взаимодействие (рис. 89).

3) дисперсионные силы возникают за счет того, что колебания электронов в одной молекуле могут приводить к возбуждению колебаний электронов в другой молекулах. Колебания электронов соседних молекул происходят в одинаковой фазе и приводят к притяжению двух молекул.

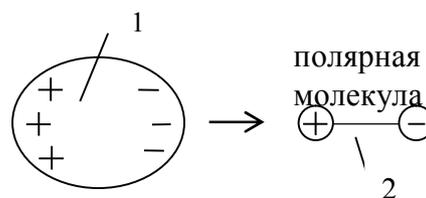


Рис. 89. Образование полярной молекулы 1

Ван-дер-ваальсовы силы притяжения F_2 убывают прямо пропорционально $\frac{1}{r^7}$. Потенциальная энергия ван-дер-ваальсового притяжения составляет $(0,4 \div 4) \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$. На расстояниях $r \leq 10^{-10}$ м между молекулами возникает особое квантовое взаимодействие, которое приводит либо к появлению значительных сил отталкивания молекул, либо к сильному притяжению соседних атомов и установлению между ними химических связей, то есть возникает новое химическое вещество. Силы отталкивания возрастают с уменьшением r по закону $F_1 \sim \frac{1}{r^n}$, где $n \geq 9$. Потенциальная энергия химического взаимодействия имеет величину $(0,4 \div 4) \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$.

§53. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В первом приближении сначала произведем учет сил взаимного отталкивания. Молекулы реального газа можно уподобить абсолютно твердым шарикам, диаметр которых больше размеров молекул. Увеличенный диаметр учитывает действие сил взаимного отталкивания между молекулами, так как сближение молекул до нулевого расстояния между ними невозможно.

Такая модель газа, принятая голландским физиком Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа, более совершенное, чем уравнение Менделеева–Клапейрона, при этом Ван-дер-Ваальс сохранил математическую форму уравнения Менделеева–Клапейрона путём введения в уравнение поправок, названных его именем.

Молекулы реального газа имеют средний объем $\langle V \rangle = \frac{1}{6} \pi d^3$. Поэтому молекулы газа движутся в сосуде менее свободно, чем «точечные» молекулы идеального газа. Ван-дер-Ваальс учел собственный объем молекулы газа путем замены в уравнении Менделеева–Клапейрона $pV_M = RT$ полного объема V_M сосуда, занимаемого молекулами газа, на так называемый свободный объем $V_M^* = V_M - b$, где b – поправка Ван-дер-Ваальса, зависящая от собственного объема молекул $\langle V \rangle$.

Вычислим поправку « b » Ван-дер-Ваальса. Для вычисления рассмотрим сферу радиуса d , центр которой совпадает с центром произвольной молекулы (рис. 90). Внутри этой сферы не могут находиться центры других молекул. Объем сферы – «запрещенный» объем V'_3 для центров всех молекул, соударяющихся с данной:

$$V'_3 = \frac{4}{3}\pi d^3 = \frac{8}{6}\pi d^3 = 8\langle V \rangle.$$

Вероятность одновременного соударения трех и большего числа молекул при обычных плотностях газа очень мала. Поэтому можно ограничиваться случаями соударения только двух молекул. Объем V'_3 дважды учитывает каждую молекулу: один раз как ударяющую, другой раз как ударяемую. Поэтому в пересчете на одну молекулу запрещенный объем равен $V_3 = 0,5V'_3 = 4\langle V \rangle$. Поправка Ван-дер-Ваальса представляет собой запрещенный объем, приходящийся на все N_A молекул одного моля газа, то есть

$$b = 4\langle V \rangle N_A.$$

Коэффициент b измеряется в $\text{м}^3/\text{моль}$ и зависит от эффективного диаметра молекул, то есть от химической природы газа.

Сложнее учесть влияние сил взаимного притяжения между молекулами. Эти силы очень быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Поэтому можно считать, что каждая молекула взаимодействует лишь с теми молекулами, которые находятся от нее на расстояниях $r \leq R_M$, где R_M – так называемый радиус молекулярного действия, имеющий величину порядка 10^{-9} м. Сферу радиуса R_M , построенную вокруг молекулы, называют сферой ее молекулярного действия. Если молекула находится внутри объема газа, то силы притяжения ее остальными молекулами газа взаимно уравновешиваются и никак не влияют на характер движения этой молекулы.

Иначе обстоит дело с молекулами, находящимися вблизи стенки сосуда MP . У некоторых из них сферы молекулярного действия только частично находятся внутри газа (области, заштрихованные на рис. 91). Найдем равнодействующую сил притяжения, приложенных к произвольной молекуле K , находящуюся в слое газа, пограничном со стенкой. Толщина слоя равна R_M . Для этого разобьем сферу молекулярного действия молекулы на четыре области, 1, 2, 3 и 4 (рис. 92). За исключением области 1, все другие области заполнены моле-

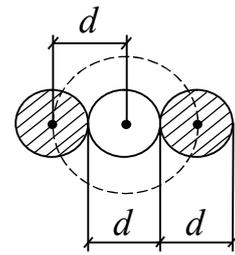


Рис. 90. К вычислению «запрещенного» объема сферы

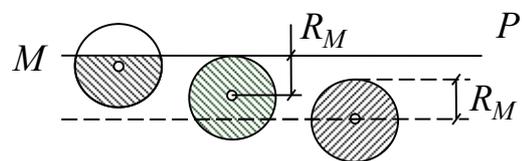


Рис. 91. К понятию сферы молекулярного действия

кулами газа. Силы, действующие на молекулу K со стороны молекул, находящихся в шаровых слоях 2 и 3 взаимно уравниваются. Притяжение же молекулы K другими молекулами, находящимися в шаровом сегменте 4 ничем не компенсируется, так как в сегменте 1 молекул газа нет. Из простых соображений ясно, что результирующая сила \vec{F}_K должна быть направлена \perp к стенке внутрь газа. Для каждого газа и фиксированного положения молекулы относительно стенки сила F_k будет тем больше, чем больше молекул заключено в сегменте «4». Иными словами, эта сила пропорциональна числу молекул в единице объема газа:

$$F_k = a_k n_0,$$

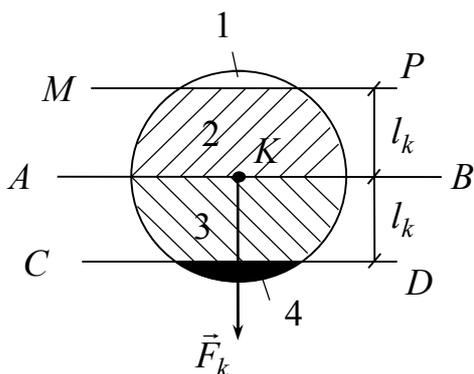


Рис. 92. Сфера молекулярного действия вблизи стенки сосуда

где a_k зависит от химической природы газа и расстояния l_k от центра молекулы k до стенки сосуда; n_0 – концентрация молекул. Расстояние l_k также зависит от химической природы газа: для одноатомных молекул оно меньше, для трехатомных больше и т.д. Если $l_k \geq R_M$, то области 1 и 4 исчезают и $F_k = 0$. Таким образом молекулы, отстоящие от стенок сосуда на расстояние R_M и больших,

уже можно считать внутренними (см. рис. 91).

Действие сил \vec{F}_k приводит к тому, что в пограничном слое газа молекулы движутся по направлению к стенке замедленно. Они ведут себя подобно шарам, которые прикреплены к пружинам и растягивают их в процессе движения за счет убыли своей кинетической энергии. Стало быть удары молекул о стенки сосуда несколько смягчены, поэтому давление, производимое на стенки реальным газом, меньше, чем давление в случае идеального газа $p_{ид}$ имеющую ту же температуру T и то же число молекул n_0 в единице объема

$$p = p_{ид} - p^*, \text{ или } p_{ид} = p + p^*,$$

где p^* – поправка, обусловленная действием сил взаимного притяжения между молекулами; это давление называется внутренним давлением.

Внутри газа силы взаимного притяжения между молекулами не влияют на их движение. Следовательно, внутри газа давление равно $p_{ид}$, а у стенок оно меньше и равно p . Внутреннее давление p^* производит на газ слой его молекул, граничащих со стенками. Оно вызвано силами F_k и равно

$$p^* = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^N F_k,$$

где сумма сил F_k распространена на все « N » молекул пограничного слоя газа; S – площадь стенок сосуда; N – число молекул в пограничном слое.

Заменив F_k по формуле $F_k = a_k n_0$, получим

$$p^* = \frac{n_0}{S} \sum_{k=1}^N a_k.$$

Умножив и разделив последнее выражение на число N видим, что

$$p^* = \frac{n_0 N}{S} \langle a_k \rangle,$$

где $\langle a_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k$. Это среднее арифметическое значение коэффициента a_k для всех молекул пограничного слоя, зависящее только от химической природы газа.

Число молекул N , заключенных в пограничном слое, равно произведению объема этого слоя ($V_{сл} = SR_M$) на n_0 :

$$N = n_0 SR_M.$$

Подставив последнее выражение в формулу для вычисления внутреннего давления, получим, что

$$p^* = \langle a_k \rangle R_M n_0^2 = a' n_0^2,$$

где $a' = \langle a_k \rangle R_M$ и зависит только от химической природы газа.

Число молекул в единице объема n_0 равно отношению плотности ρ к массе одной молекулы m_0 :

$$n_0 = \frac{\rho}{m_0},$$

причем $\rho = \frac{M}{V_M}$, поэтому $n_0 = \frac{M}{m_0} \cdot \frac{1}{V_M}$.

Из уравнений имеем

$$p^* = \frac{a' M^2}{m_0^2} \cdot \frac{1}{V_M^2} = \frac{a}{V_M^2},$$

где поправка Ван-дер-Ваальса $a = \frac{a' M^2}{m_0^2}$ зависит только от химической природы газа.

Подставив это выражение для $p_{уд}$, получим

$$p_{уд} = p + \frac{a}{V_M^2}.$$

Далее подставим в уравнение Менделеева–Клапейрона $(V_M - b)$ вместо V_M и $p_{ид}$ вместо p , тогда получим

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) \cdot (V_M - b) = RT.$$

Полученное выражение носит название уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля газа.

Для произвольной массы газа $V = \frac{m}{M} V_M$, поэтому, произведя указанную замену и умножив левую и правую части уравнения на $\frac{m}{M}$, окончательно получим:

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{a}{V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT.$$

Это уравнение лучше согласуется с результатами опытов по изучению параметров состояния реальных газов, чем уравнение Менделеева–Клапейрона.

В случае разреженных газов $V \gg b$, а $p^* \ll p$, поэтому уравнение Ван-дер-Ваальса переходит в уравнение состояния идеальных газов – уравнение Менделеева–Клапейрона.

ГЛАВА IV. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Тема 11. Электростатическое поле в вакууме

§54. Электрические заряды. Закон Кулона

Электрическим зарядом называется источник электромагнитного поля, связанный с материальным носителем (элементарной частицей, реальным физическим телом и т.д.). Существует два типа зарядов – положительные и отрицательные: одноименные заряды друг от друга отталкиваются, разноименные – притягиваются. При электризации трением всегда заряжаются оба тела, причем равными по величине, но разноименными зарядами.

Опытным путем доказано, что электрический заряд любого тела – целое число, кратное величине элементарного электрического заряда « e » ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Электрон ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) и протон (от греч. protos – первый) ($m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ кг, $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Из обобщения опытных данных был установлен фундаментальный закон природы – закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма электрических зарядов любой электрически изолированной системы тел (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной, какие бы процессы не происходили внутри этой системы, т.е.
$$\sum_i Q_i = \text{const} .$$

Величина электрического заряда не зависит от системы отсчета, а значит не зависит от того, движется этот заряд или покоится (свойство инвариантности, от лат. invariāns – неизменяющийся).

Наличие свободных носителей заряда (электронов, ионов) является условием способности тел проводить электрический ток. В зависимости от этой способности тел они делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники (рис. 93).

Проводники – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему их объему т.е. они проводят электрический ток, при этом прохождение электрического тока может как сопровождаться, так и не сопровождаться изменениями химических свойств проводника. Диэлектрики – тела, которые не проводят электрического тока; если к этим телам не прикладывается внешнее электрическое поле в них практически отсутствуют свободные носители заряда. Полупроводники занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками по

величине электрической проводимости, причем их проводимость сильно зависит от внешних условий, например, температуры.



Рис. 93. Классификация тел по проводимости

Название единицы электрического заряда в СИ – кулон (Кл). Это электрический заряд, проходящий сквозь поперечное сечение проводника при токе величиной 1 А за время 1 с. Определение ампера будет дано позже.

Закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов установлен французским физиком Кулоном. Точечным называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Аналог – материальная точка в механике.

Закон Кулона: сила F взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величинам зарядов Q_1 и Q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon r^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, безразмерная величина, показывающая во сколько раз сила F_0 взаимодействия двух зарядов в вакууме больше силы F их взаимодействия в данной среде:

$$\epsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Для вакуума $\epsilon = 1$.

Сила F направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т.е. является центральной и соответствует притяжению ($F < 0$) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ($F > 0$) в случае одноименных зарядов. Сила F называется кулоновской силой.

В векторной форме закон Кулона имеет вид (рис. 94)



$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r}$$

Рис. 94. Взаимодействие электрических зарядов

В СИ коэффициент пропорциональности имеет значение

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$$

Тогда закон Кулона запишется в окончательном виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon r^2}.$$

Величина ϵ_0 называется электрической постоянной; она относится к числу фундаментальных физических постоянных и равна

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Нм}^2 \text{ (Ф/м).}$$

§55. Электрическое поле и его напряженность

О существовании электрического поля свидетельствует тот факт, что при помещении заряда в пространство, окружающее другой электрический заряд, на первый заряд действует кулоновская сила. Это означает, что в пространстве, окружающем электрические заряды, существует силовое электрическое поле, которое наряду с веществом является одним из видов материи, осуществляющим определенное взаимодействие между заряженными макроскопическими телами или частицами, входящими в состав вещества. Таким образом, посредством электрического поля взаимодействуют электрические заряды. Электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами, называются электростатическими.

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется пробный заряд. Это заряд, который должен одновременно удовлетворять двум условиям:

1. Он должен быть достаточно малым по размерам, чтобы характеризовать поле в точке пространства;
2. Он должен быть достаточно малым по величине, чтобы своим полем не искажать измеряемое поле.

В механике аналогом пробного заряда является физически бесконечно малый объем.

В качестве характеристики электрического поля кулоновская сила не годится, так как она зависит не только от величины заряда Q , создающего поле, но и от величины пробного заряда-измерителя Q_0 :

$$F = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Если левую и правую часть этой формулы разделить на величину пробного заряда Q_0 , то справа от знака равенства останется величина, зависящая только от свойств заряда, создающего поле (при неизменных ϵ и r):

$$\frac{F}{Q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = E.$$

Эта величина характеризует электрическое поле в той точке пространства, где находится пробный заряд Q_0 . Она является силовой характеристикой поля и называется его напряженностью.

Напряженностью \vec{E} электростатического поля в данной точке пространства называется векторная величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный пробный заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}.$$

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на пробный положительный заряд. Из формулы следует, что единица напряженности электростатического поля в СИ – это напряженность такого поля, которое действует силой 1 Н на заряд величиной 1 Кл и называется вольт на метр (В/м). Определение 1 В будет дано позже.

Напряженность поля точечного заряда в векторной форме:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \vec{r},$$

или в скалярной форме:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Вектор \vec{E} во всех точках поля направлен радиально от заряда, если он положителен и радиально к заряду, если он отрицателен (рис. 95).

По предложению английского физика Фарадея графически

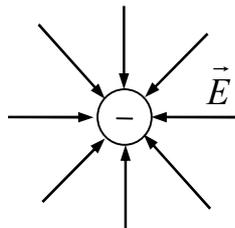
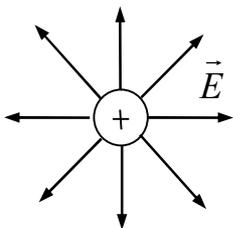


Рис. 95. Векторы напряженности поля точечных зарядов

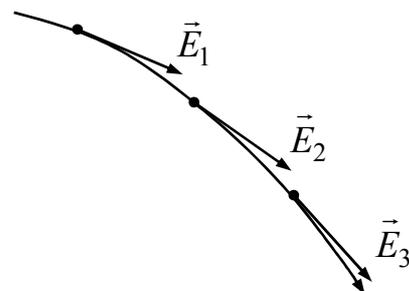


Рис. 96. Силовая линия электростатического поля

электростатическое поле изображают с помощью силовых линий. Силовыми называют линии, касательные к которым в любой точке совпадают с вектором напряженности \vec{E} (рис. 96). За направление силовых линий принимается направление, образующее острый угол с вектором \vec{E} . Для однородного поля ($\vec{E} = \text{const}$) силовые линии параллельны вектору напряженности.

Величина поля графически изображается с помощью густоты линий, при этом для однородного поля густота силовых линий одинакова в любой области пространства. Число линий вектора \vec{E} , проходящих сквозь единицу поверхности, перпендикулярной этим линиям, должно быть равно модулю вектора \vec{E} . Математически это обстоятельство отражается с помощью потока вектора напряженности. Элементарный поток вектора \vec{E} определяется следующим образом (рис 97):

$$d\Phi_e = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS; \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Как видно из определения $d\Phi_e$ – это поток вектора. В то же время существует поток скалярной величины, например, тепловой поток, который мы рассматривали при изучении явления теплопроводности в газах. Несмотря на одинаковую терминологию, в том и другом случаях понятия потоков принципиально различаются.

Тогда

$$d\Phi_e = E \cos(\vec{E}, \vec{n})dS = E_n dS.$$

Интегральный поток вектора \vec{E} равен алгебраической сумме элементарных потоков:

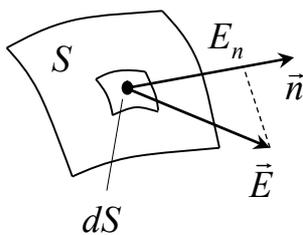


Рис. 97. К определению потока вектора \vec{E}

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S E_n dS.$$

Если угол $(\vec{E}, \vec{n}) > \frac{\pi}{2}$, то $\Phi_e < 0$ (вектор \vec{E} входит в поверхность).

Если поверхность S плоская, а поле однородное ($\vec{E} = \text{const}$, $E_n = \text{const}$, $E = E_n$), то

$$\Phi_e = E_n \int_S dS = E \cdot S.$$

Для электростатического поля, созданного системой электрических зарядов, справедлив принцип суперпозиции (наложения) векторов сил и напряженностей электростатического поля, а именно:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i Q_0 \vec{E}_i = Q_0 \sum_i \vec{E}_i = Q_0 \vec{E}.$$

§56. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме

Для вычисления напряженности поля, создаваемого не точечными зарядами, а заряженными телами произвольной формы, существует теорема Остроградского–Гаусса (русский и немецкий математики).

Для доказательства теоремы первоначально рассмотрим поле, создаваемое в вакууме точечным зарядом. Вычислим поток вектора \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S (рис. 98). Предварительно вычислим поток Φ_e сквозь поверхность S_1 правильной формы, например сквозь сферу радиуса r_1 :

$$\Phi_e = \oint_{S_1} E_n dS = E_n \oint_{S_1} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} 4\pi r_1^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad (E_n \equiv E).$$

Величина E_n вынесена за знак интеграла, так как в рассмотренном случае $Q = \text{const}$ и $r_1 = \text{const}$, т.е. и $E_n = \text{const}$.

Этот результат справедлив и для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу произвольной замкнутой поверхностью S , то каждая силовая линия, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность, т.е. число линий сквозь сферу и поверхность будет одинаково. Если замкнутая поверхность имеет сложную форму, как, например, на рис. 99, то при пересечении любой силовой линии с поверхностью она то входит в поверхность, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока, в конечном счете, сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линия напряженности выходит из поверхности, и отрицательным для линии, входящей в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряд, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

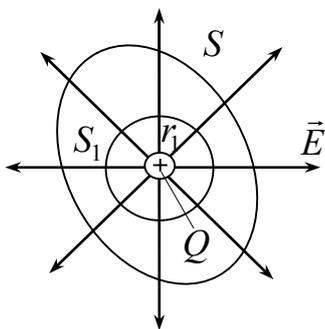


Рис. 98. К определению потока вектора напряженности электрического поля для произвольной замкнутой поверхности

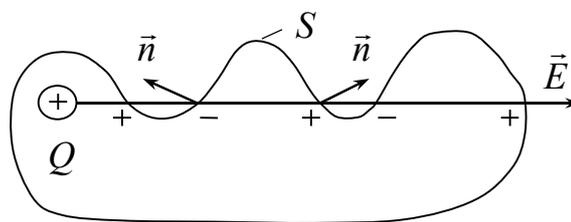


Рис. 99. Пересечение вектором \vec{E} поверхности сложной формы

Таким образом, и для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд Q , поток вектора \vec{E} будет равен Q/ϵ_0 , т.е.

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей N зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность \vec{E} поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей \vec{E}_i полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i.$$

Поэтому

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}.$$

Каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен Q_i/ϵ_0 . Следовательно,

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i.$$

Эта формула выражает теорему Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряженности электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность равен делённой на ϵ_0 алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности. Алгебраической потому, что заряды противоположных знаков создают электростатические поля противоположных направлений.

§57. Применение теоремы Остроградского–Гаусса

для расчета полей, создаваемых заряженными телами

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Пусть бесконечная плоскость заряжена постоянной поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ ($\sigma = dQ/dS$ – заряд, приходящийся на единицу поверхности, а для равномерно заряженной плоскости $\sigma = \frac{Q}{S}$, рис. 100).

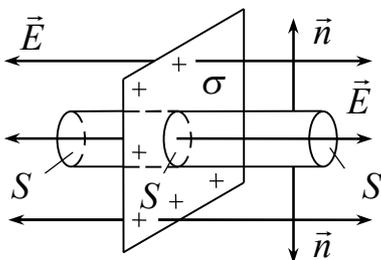


Рис. 100. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в разные стороны. В качестве произвольной замкнутой поверхности мысленно выберем поверхность цилиндра, основания

которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей. Так как образующая поверхность параллельна линиям напряженности ($\cos(\vec{E}, \vec{n})=0$), то силовые линии боковую поверхность не пересекают и поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность равен нулю, а полный поток сквозь поверхность цилиндра равен сумме потоков только сквозь его основания (площади оснований равны и для них E_n совпадает с E), т.е. равен $2ES$. Таким образом, по определению поток вектора \vec{E} равен: $\Phi_e = 2ES$. По теореме Остроградского–Гаусса этот же поток $\Phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$, поэтому приравняв правые части получим:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

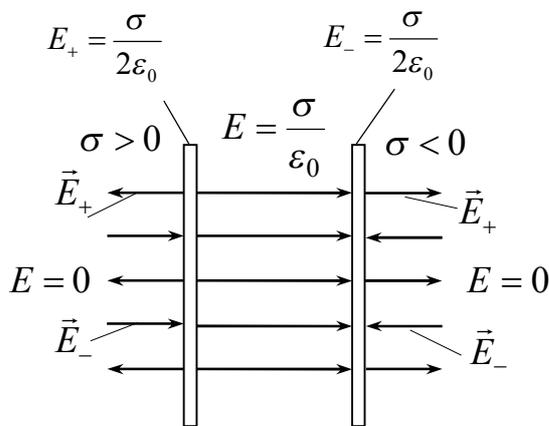


Рис. 101. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

Из формулы вытекает, что E не зависит от длины поверхности цилиндра, т.е. напряженность поля на любых расстояниях от плоскости одинакова по модулю; иными словами, поле бесконечной равномерно заряженной плоскости однородно.

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей. Пусть плоскости заряжены равномерно разноименными поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 101).

Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. Как видно из рисунка, слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля $E = 0$.

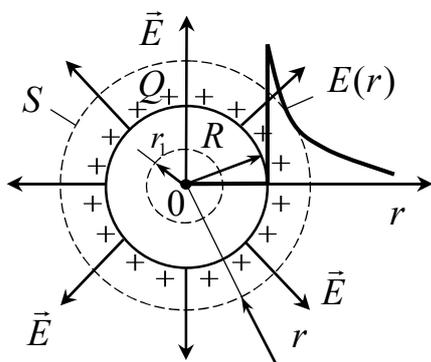


Рис. 102. Поле равномерно заряженной сферы

В области между плоскостями линии напряженности направлены в одну сторону ($E_+ + E_- = E$), поэтому результирующая напряженность

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Таким образом, поле в данном случае сосредоточено между плоскостями и является в этой области однородным.

3. Поле равномерно заряженной сферы. Сфера радиуса R общим зарядом Q заряжена равномерно поверхностной плотностью заряда σ (рис. 102).

Благодаря равномерному распределению заряда по сфере поле, создаваемое зарядом, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально. Выделим мысленно произвольную замкнутую поверхность в виде сферы радиуса r , имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r \geq R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд Q , создающий рассматриваемое поле, и по теореме Остроградского–Гаусса $\Phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. По определению $\Phi_e = 4\pi r^2 E$; приравняв правые части получим:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R),$$

что аналогично электростатическому полю точечного заряда.

Вне заряженной сферы поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда. Если $r_1 < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферы электрическое поле отсутствует ($E = 0$). Объясняется это тем, что в любой точке пространства внутри сферы векторная сумма кулоновских сил равна нулю, следовательно и $\vec{E} = 0$.

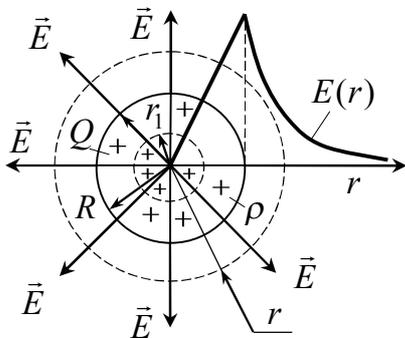


Рис. 103. Поле равномерно заряженной сферической полости

4. Поле равномерно заряженной части пространства внутри геометрической сферы (сферической полости). Пусть сферическая полость радиуса R содержит заряд Q , равномерно распределенный внутри полости (например, в полости находятся свободные протоны). Направление вектора \vec{E} видно из рис. 103; вычислим величину вектора \vec{E} . Объемная плотность заряда, т.е. заряд единицы объема полости вычисляется так:

$$\rho = \frac{dQ}{dV},$$

а для равномерно заряженной сферической полости

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Учитывая условия симметрии, нетрудно убедиться, что для напряженности электростатического поля вне полости получится тот же результат, что и в предыдущем п. 3. Внутри же полости напряженность поля будет подчиняться другой закономерности. Выбрав внутри полости произволь-

ную замкнутую поверхность в виде сферы радиуса $r_1 < R$ видим, что эта сфера охватывает заряд величиной $Q_1 = (4/3)\pi r_1^3 \rho$. В данном случае поток вектора \vec{E} по определению

$$\Phi_e = E \cdot 4\pi r_1^2.$$

Этот же поток по теореме Остроградского–Гаусса

$$\Phi_e = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \frac{4}{3} \frac{\pi r_1^3}{\epsilon_0} \rho.$$

Приравнивая правые части получим, что

$$E = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho r_1}{\epsilon_0},$$

т.е. величина напряженности линейно зависит от r_1 (см. рис. 95) внутри полости, а вне её убывает по такому же закону, что и для заряженной сферы. Если воспользоваться формулой для вычисления объемной плотности заряда, то внутри полости

$$E = \frac{1}{3} \cdot \frac{r_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} r_1.$$

Если сферическая полость заполнена заряженной средой, диэлектрическая проницаемость которой равна ϵ (заряженный шар), то напряженность поля внутри шара вычисляется так:

$$E = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0 \epsilon}.$$

5. Поле равномерно заряженной бесконечной нити.

В качестве нити можно рассматривать бесконечно длинный цилиндр. В этом случае допустимо считать, что цилиндр заряжен линейной плотностью заряда

$$\tau = \frac{dQ}{dl},$$

т.е. τ – это заряд единицы длины цилиндра (нити), а для равномерно заряженной нити

$$\tau = \frac{Q}{l}.$$

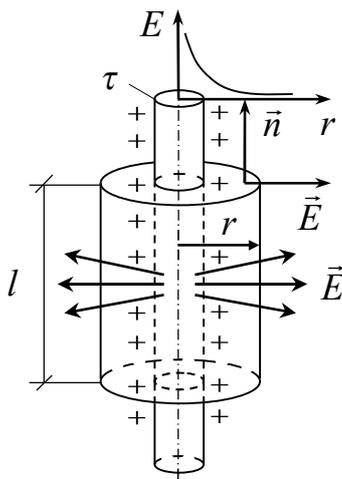


Рис. 104. Поле равномерно заряженной нити

Из условия симметрии видно (рис. 104), что линии напряженности электростатического поля – радиально направленные прямые, перпендикулярные нити. Чтобы воспользоваться теоремой Остроградского–Гаусса в качестве произвольной замкнутой

поверхности выберем коаксиальную (соосную) цилиндрическую поверхность радиуса r и длиной l . Поток вектора \vec{E} сквозь торцы этой поверхности равен нулю, так как линии напряженности вектора \vec{E} их не пересекают. По определению поток вектора \vec{E}

$$\Phi_e = 2\pi r l E.$$

По теореме Остроградского–Гаусса этот же поток

$$\Phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}.$$

Приравнивая правые части получим, что

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}.$$

Из последнего выражения видно, что величина напряженности электростатического поля убывает с расстоянием r от нити по гиперболе.

§58. Работа сил электростатического поля. Потенциал

Если в электростатическом поле точечного заряда Q из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд Q_0 (рис. 105), то сила, приложенная к заряду Q_0 , совершает работу. Работа на элементарном пути $d\vec{l}$ (в вакууме, $\varepsilon = 1$).

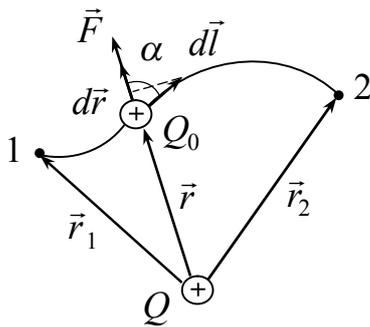


Рис. 105. Перемещение точечного заряда в электростатическом поле другого заряда

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r^2} dl \cos \alpha.$$

$$\text{Так как } dl \cos \alpha = dr, \text{ то } dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r^2} dr.$$

В общем случае заряд Q_0 не обязательно должен двигаться в направлении силы F , так как на него могут действовать и другие силы.

Работа при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_0^A dA = \frac{Q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r_2} - \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] = \frac{Q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

и не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек. Поэтому работа кулоновской силы по перемещению заряда по замкнутому пути ($\vec{r}_1 = \vec{r}_2$) равна нулю. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а электростатические силы – консервативными.

Работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии системы тел, или системы зарядов, как в данном случае. Поэтому работу сил электростатического поля можно представить как разность по-

тенциальных энергий, которыми обладает система точечных зарядов Q_0 и Q , находящихся на расстояниях r_1 и r_2 :

$$A_{12} = E_{П1} - E_{П2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r_2};$$

отсюда следует, что для системы покоящихся зарядов Q_0 и Q потенциальная энергия в общем случае вычисляется так:

$$E_{П} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r} + C,$$

т.е. потенциальная энергия в электростатике, как и в механике, определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C . Если считать, что при удалении зарядов на бесконечно большое расстояние друг от друга ($r \rightarrow \infty$) $E_{П} = 0$ (это граничные условия), то и $C = 0$, и потенциальная энергия зарядов

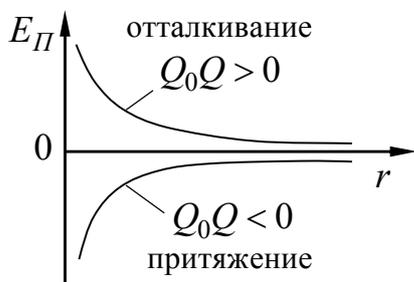


Рис. 106. Потенциальная энергия системы двух зарядов

$$E_{П} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r}.$$

Для одноименных зарядов произведение $Q_0 Q > 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов $Q_0 Q < 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна (рис. 106).

Если поле создается системой точечных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_i , то при соблюдении принципа суперпозиции потенциальная энергия заряда Q_0 , находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий $E_{Пi}$ взаимодействия с каждым зарядом в отдельности:

$$E_{П} = \sum_i E_{Пi} = Q_0 \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

Из последних формул вытекает, что $E_{П}$ зависит не только от величины заряда Q_i , создающего поле, но и от величины заряда Q_0 , находящегося в этом поле, поэтому $E_{П}$ не является характеристикой электростатического поля, создаваемого только зарядом Q_i в данной точке. Чтобы характеризовать поле в данной точке надо избавиться от Q_0 , разделив на Q_0 левую и правую часть последней формулы. Получившаяся величина называется потенциалом электростатического поля в данной точке:

$$\varphi = \frac{E_{П}}{Q_0};$$

Потенциалом φ электростатического поля в какой-либо точке этого поля называется физическая величина, численно равная потенциальной энер-

гии системы, состоящей из единичного положительного заряда, помещенного в эту точку поля и самого поля. Отсюда видно, что потенциал электростатического поля является энергетической характеристикой поля. Часто, для краткости, говорят, что потенциал поля есть потенциальная энергия единичного положительного заряда.

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом Q в какой-либо точке поля на расстоянии r от него,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 может быть представлена в виде:

$$A_{12} = E_{П1} - E_{П2} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = -Q_0\Delta\varphi,$$

так как $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ т.е. работа равна произведению величины переносимого заряда и разности потенциалов поля в начальной и конечной точках.

Соответственно, элементарная работа вычисляется так:

$$dA = -Q_0 d\varphi.$$

Работа сил поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 Q_0 \vec{E} d\vec{l}.$$

Приравняв правые части выражений для вычисления работы A_{12} , получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения. Если линия перемещения суть замкнутый контур L , то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \oint_L \vec{E} d\vec{l}.$$

Последний интеграл называется циркуляцией вектора \vec{E} . Он равен нулю для электростатического поля. Это обстоятельство является математическим признаком потенциальности электростатического и других полей, например, поля гравитации.

Если перемещать заряд Q_0 из произвольной точки за пределы поля, т.е. в бесконечность, где по определению потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля

$$A_\infty = Q_0\varphi, \text{ или } \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}.$$

Таким образом, потенциал численно равен работе внешних сил по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность. В этом заключается физический смысл потенциала.

За единицу измерения потенциала в СИ в честь итальянского физика Вольта принимается вольт (В). 1 В – потенциал поля в такой точке, в которой заряд величиной 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж. Формулировка так дается для кратности. Не следует забывать, что потенциальной энергией обладает система тел или зарядов, т.е. система как минимум двух тел. Поэтому энергией 1 Дж обладает не один заряд, а система зарядов: создающего поле и находящегося в нем. Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической (а не векторной) сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

В этом заключается преимущество скалярной энергетической характеристики электрического поля (потенциала) перед его векторной силовой характеристикой (напряженностью), которая равна геометрической сумме напряженностей слагаемых полей, тогда как в первом случае не надо строить векторные диаграммы.

§59. Связь между напряженностью электростатического поля и градиентом его потенциала

Поскольку и напряженность \vec{E} , и потенциал φ характеризуют один и тот же вид материи – электрическое поле, то между этими величинами должна быть взаимосвязь, которая позволит математически по скалярной характеристике φ найти векторную \vec{E} .

В декартовой системе координат работа по перемещению точечного положительного заряда Q_0 из одной точки в другую вдоль оси Ox на расстояние dx

$$dA = F_x dx = Q_0 E_x dx.$$

Та же работа, выраженная через разность потенциалов,

$$dA = -Q_0 d\varphi.$$

Приравняв правые части выражений, получим

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},$$

а для трехмерного случая $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по x . Из этой записи видно, почему единица измерения напряжённости поля называется «вольт на метр». Повторив аналогичные рассуждения для осей y и z , можем найти вектор \vec{E} :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\varphi,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz . Построив по осям Ox, Oy, Oz векторы, модули которых равны $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ соответственно, далее определим вектор \vec{E} как главную диагональ прямоугольного параллелепипеда, сторонами которого являются $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}$ и так далее.

Если в пространстве выделено некоторое направление, не совпадающее ни с одной из осей координат, например, незамкнутый математический контур l , то вдоль него

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l},$$

где $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$.

Знак минус означает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

Для графического изображения распределения в пространстве потенциала электростатического поля пользуются экипотенциальными (от лат. *aequi* – равный) поверхностями – поверхностями, во всех точках которых потенциал φ имеет одно и то же значение. Если поле создается точечным зарядом, то потенциал поля, как получено ранее,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Таким образом, экипотенциальные поверхности в данном случае – концентрические сферы, центр которых совпадает с точкой пространства, где расположен заряд. С другой стороны, линии напряженности в случае точечного заряда – радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности в случае точечного заряда нормальны или ортогональны (от греч. *orthogonios* – прямоугольный) экипотенциальным поверхностям. Ортогональны друг другу, например, географические параллели и меридианы.

Оказывается, что линии напряженности поля, созданного любым источником, всегда ортогональны экипотенциальным поверхностям в точке пересечения с ними. Действительно, все точки экипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа сил электрического поля по перемещению электрического заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т.е.

$$\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0 \text{ и угол } (\vec{F}, d\vec{r}) = 90^\circ.$$

Поэтому электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены по нормальям к экипотенциальным поверхностям. Следовательно и вектор \vec{E} всегда нормален экипотенциальным поверхностям в

точке пересечения с ней, а поэтому линии вектора \vec{E} ортогональны этим поверхностям.

§60. Вычисление потенциалов различных электростатических полей

Установленная связь между напряженностью поля и его потенциалом позволяет найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости, поверхностная плотность заряда которой равна σ (рис. 107). Разность потенциалов двух точек поля, лежащих на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости можно вычислить так:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad d\varphi = -Edx; \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{x_1}^{x_2} Edx; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{x_1}^{x_2} Edx; \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0};$$

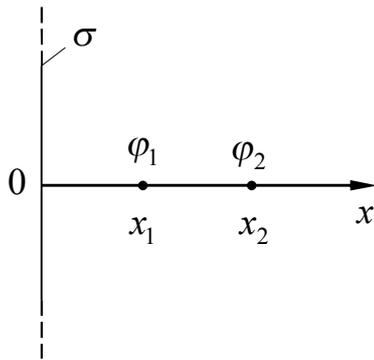


Рис. 107. К вычислению разности потенциалов поля плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей определяется формулой $E = \sigma/\varepsilon_0$, где σ – поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов двух плоскостей, расстояние между которыми равно d (рис. 99), вычисляется так:

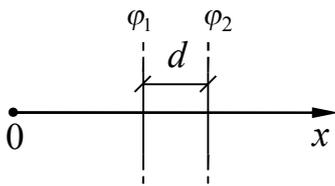


Рис. 108. К вычислению разности потенциалов поля двух плоскостей

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d Edx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$

сферы ($r_1 > R$, $r_2 > R$),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если принять $r_1=R$ и $r_2 \rightarrow \infty$, то $\varphi_2 = 0$ и потенциал заряженной сферы

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

т.е. вычисляется так же, что и для поля точечного заряда.

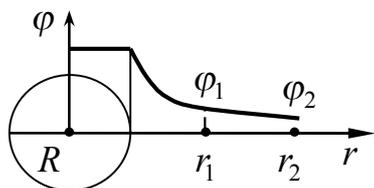


Рис. 109. К вычислению разности потенциалов поля сферы

Внутри сферы ($r \leq R$) $E = 0$; $\frac{d\varphi}{dr} = 0$ и

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

т.е. потенциал любой точки поля внутри сферы равен потенциалу сферы.

4. Поле равномерно заряженной зарядом Q части пространства внутри сферы (сферической полости) радиуса R . Полость содержит электрические заряды, пространство между которыми заполнено вакуумом. Вне полости ($r > R$) поле вычисляется по формуле $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра полости ($r_1 > R, r_2 > R$) определяется так же как и для сферы (см. рис. 109):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

В любой точке, лежащей внутри сферической полости на расстоянии r' от её центра ($r' < R$) напряженность поля определяется выражением

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r'.$$

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r'_1 и r'_2 от центра полости ($r'_1 < R, r'_2 < R$),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_{r'_1}^{r'_2} r' dr' = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} [(r'_2)^2 - (r'_1)^2]$$

Если сферическая полость заполнена заряженной средой проницаемостью ϵ (заряженный шар), то в знаменателе этой формулы должна быть ϵ .

5. Поле бесконечной нити, равномерно заряженной линейной плотностью заряда τ , определяется формулой: $E = \tau/2\pi\epsilon_0 r$. Следовательно, разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от нити

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тема 12. Электрическое поле в диэлектриках

§61. Свободные и связанные заряды. Электрический диполь

В соответствии с представлениями классической физики диэлектрики (от греч. dia – сквозь, и англ. electric – электрический) отличаются от проводников тем, что в них нет свободных электрических зарядов, т.е. диэлектрики не проводят электрический ток. Свободными называются электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на расстояния, много большие размеров атомов и молекул. Кроме того, заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающие их электронейтральность, также называются свободными. Под связанными понимаются электрические заряды, входящие в состав электронейтральных молекул диэлектриков, а также ионы кристаллической решетки твердого диэлектрика. Несмотря на то, что все молекулы вещества в целом электронейтральны, несимметричным молекулам присущи электрические свойства. Положительные заряды ядер молекулы можно заменить одним суммарным зарядом $Q > 0$, а суммарный заряд электронов – зарядом $Q < 0$. Если молекула, в отличие от атомов, не является симметричным образованием, то в результате получается система двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов, расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля. Такая система называется электрический диполь (от греч. di – дважды и polos – точка оси, рис. 110). Параметрами диполя являются его плечо и электрическим момент. Плечом диполя называют вектор \vec{l} , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними. Произведение абсолютной величины любого из зарядов диполя $|Q|$ и плеча \vec{l} называется электрическим моментом \vec{p}_e :

$$\vec{p}_e = |Q| \cdot \vec{l}.$$

Таким образом, электрический диполь является моделью несимметричной молекулы диэлектрика. Если молекула симметрична, но помещена в электростатическое поле E_0 , то она становится несимметричной, так как силы электростатического поля разводят заряды молекулы в противоположные стороны, и она также представляет собой электрический диполь.

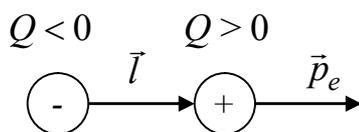


Рис. 110. Электрический диполь

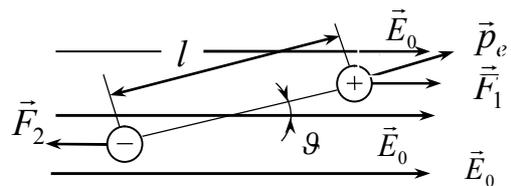


Рис. 111. Электрический диполь в однородном электрическом поле

Если диполь поместить в однородное электрическое поле так, что его электрический момент \vec{p}_e и вектор \vec{E}_0 напряженности внешнего электрического поля образуют угол ϑ , то на диполь будет действовать момент пары сил (рис. 111), стремящийся повернуть электрический диполь так,

чтобы вектор $\vec{p}_e \uparrow \vec{E}_0$. В этом случае момент пары сил станет равным нулю, и действие сил сводится лишь к изменению расстояния между зарядами. В неоднородном (рис. 112) электрическом поле электрический диполь также повернется, но так как в районе положительного заряда электрическое поле сильнее (силовые линии изображены гуще), то сила \vec{F}_1 станет больше силы \vec{F}_2 . Поэтому электрический диполь будет втягиваться в область более сильного поля. На этом явлении основана электростатическая очистка промышленных газов от вредных примесей.

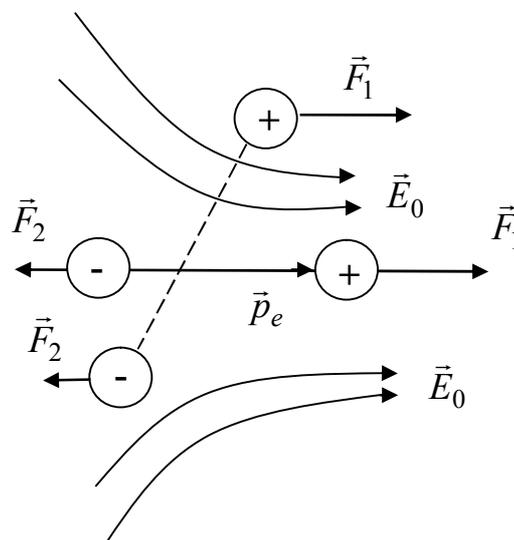


Рис. 112. Электрический диполь в неоднородном электрическом поле

§62. Типы диэлектриков. Полярные и неполярные молекулы

В зависимости от строения диэлектриков их разделяют на три типа. К первому типу диэлектриков (N_2 , H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 и пр.) относятся вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т.е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент молекулы \vec{p}_e равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются неполярными. Под действием внешнего электрического поля E_0 заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные по полю, отрицательные против поля), т.е. электронные орбиты деформируются и молекула приобретает дипольный момент, ориентированный по полю.

Второй тип диэлектриков – это вещества (H_2O , NH_3 , SO_2 , CO и пр.), молекулы которых имеют несимметричное строение, т.е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают, таким образом, эти молекулы в отсутствие внешнего электрического поля E_0 обладают дипольным моментом и называются полярными. При отсутствии внешнего поля дипольные моменты полярных молекул диэлектрика вследствие теп-

лового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий дипольный момент для некоторого объема диэлектрика равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле E_0 , то силы этого поля будут стремиться повернуть электрический диполь вдоль поля.

Величина дипольного момента полярной молекулы вычисляется так:

$$p_e = \varepsilon_0 \alpha E_0.$$

Здесь $\alpha = 4\pi r^3$ – множитель, пропорциональный объему молекулы и называемый поляризуемостью молекулы, r – радиус молекулы. Для однородного и изотропного диэлектрика вектор $\vec{p}_e \uparrow\uparrow \vec{E}_0$, поэтому в векторной форме

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0, \text{ в СИ } p_e \cong 1 \cdot 10^{-37} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

К третьему типу диэлектриков относятся вещества (NaCl, KCl, KBr и пр.), которые имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, и при наложении на такой ионный кристалл электрического поля E_0 происходит деформация кристаллической решетки, так как положительные ионы смещаются по полю, а отрицательные – против поля (рис. 113).

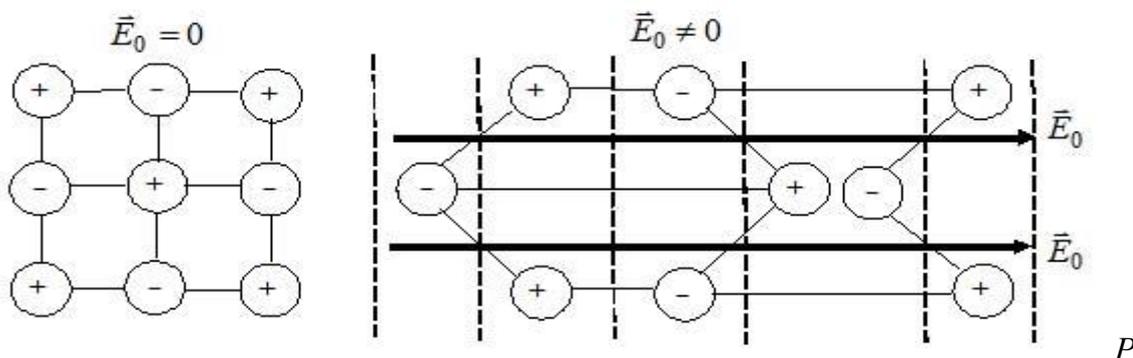


Рис. 113. Поляризация ионного кристалла

В результате на противоположных гранях кристалла, перпендикулярных вектору \vec{E}_0 внешнего поля, находятся ионы разного знака, поэтому весь объем кристалла можно рассматривать как большой диполь, для которого вектор $\vec{p}_e \uparrow\uparrow \vec{E}_0$ и пропорционален $|\vec{E}_0|$.

Таким образом, внесение диэлектриков всех трех типов во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика, или к поляризации диэлектрика. Поляризацией среды называют процесс образования объемного дипольного электрического момента этой среды под действием внешнего электрического поля.

Соответственно трем типам диэлектриков различают три вида поляризации.

Электронная, или деформационная поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, заключается в возникновении ориентированных по полю молекул дипольных моментов за счет деформации электронных орбит.

Ориентационная, или дипольная поляризация диэлектрика, состоящего из полярных молекул, заключается в ориентации имеющихся дипольных моментов по полю. Естественно, что тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (ориентирующее действие электрического поля и дезориентирующее действие теплового движения) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура.

Ионная поляризация диэлектриков, представляющих собой ионные кристаллы, заключается в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а подрешетки отрицательных ионов – против поля.

§63. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор поляризации

При помещении диэлектрика во внешнее электростатическое поле \vec{E}_0 он поляризуется; количественной мерой поляризации диэлектрика является вектор поляризации \vec{P}_e . Вектором поляризации называют предел отношения векторной суммы дипольных моментов некоторого объема диэлектрика к величине этого объема, когда последний стремится к физически бесконечно малому объему V' :

$$\vec{P}_e = \lim_{V \rightarrow V'} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} \right).$$

Здесь N – число диполей в объеме V , \vec{p}_{ei} – дипольный момент i -того диполя. Физически бесконечно малым называют такой объем, величина которого много больше размеров одной молекулы (чтобы имело смысл усреднение дипольных моментов), и в тоже время достаточно мал, чтобы плотность вещества, результирующая напряженность электрического поля \vec{E} в диэлектрике и другие макроскопические величины в его пределах можно считать неизменными. Таким образом, чем больше вектор поляризации, тем больше в диэлектрике дипольных моментов и тем лучше поляризуется диэлектрик.

Если диэлектрик однороден (электрические моменты диполей одинаковы $\vec{p}_e = \text{const}$) и находится в однородном внешнем электрическом поле ($\vec{E}_0 = \text{const}$), то

$$\vec{P}_e = \lim_{V \rightarrow V'} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} \right) = \lim_{V \rightarrow V'} \left(\frac{1}{V} N \vec{p}_e \right) = \lim_{V \rightarrow V'} (n_0 \vec{p}_e) = n_0 \vec{p}_e,$$

где n_0 – число молекул в единице объема (концентрация молекул). Простое суммирование объясняется тем, что все векторы \vec{p}_e направлены строго вдоль вектора \vec{E} в диэлектрике. Таким образом, вектор поляризации есть суммарный электрический момент единицы объема диэлектрика. Используя формулу для одного диполя полярной молекулы $\vec{p}_e = \epsilon_0 \alpha E_0$, где внешнее поле E_0 надо заменить на E – результатирующее поле в диэлектрике, для многих диполей получим, что

$$\vec{P}_e = n_0 \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \varkappa \vec{E}.$$

Величина $\varkappa = n_0 \alpha$ есть величина, характеризующая способность среды к поляризации и численно равная поляризуемости единицы объема диэлектрика. Она носит название диэлектрической восприимчивости вещества; \varkappa – величина безразмерная, всегда $\varkappa > 0$ и для большинства твердых диэлектриков составляет несколько единиц, хотя для воды $\varkappa = 80$.

Если диэлектрик образован полярными молекулами, вектор поляризации также прямо пропорционален напряженности электрического поля в диэлектрике, но диэлектрическая восприимчивость такого диэлектрика выражается формулой

$$\varkappa = \frac{n_0 p_e^2}{3kT}.$$

Формула выражает конкуренцию между ориентирующим действием электрического поля (p_e^2) и дезориентирующим действием теплового движения (T).

Рассмотрим электрическое поле в пластине из диэлектрика, заключенной между двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными поверхностными плотностями свободных зарядов $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ (рис. 114). Диэлектрик будет поляризован, причем любой элемент его объема, вплоть до физически бесконечно малого объема, оста-

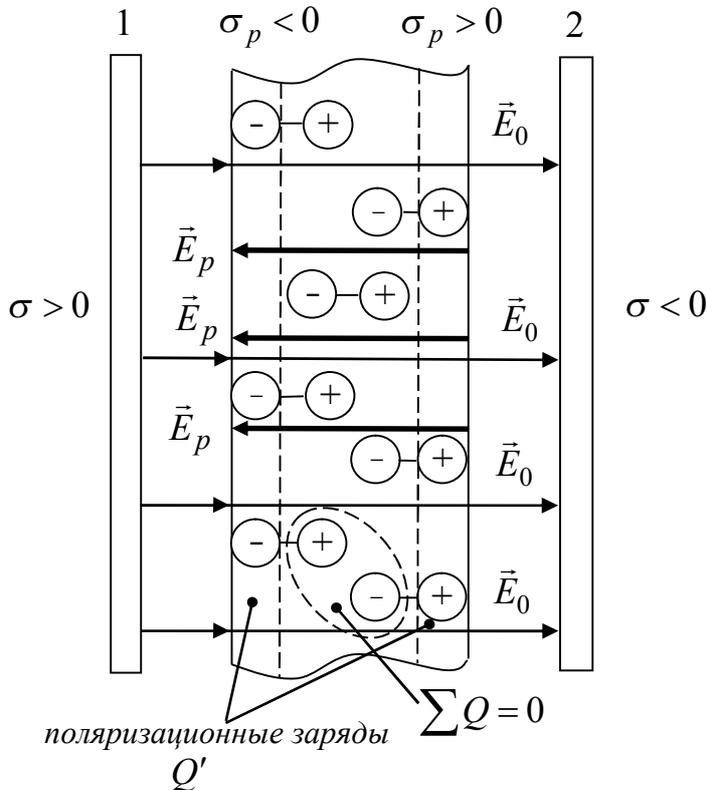


Рис. 114. Поляризация диэлектрической пластины

ётся электронейтральными благодаря взаимной компенсации противоположных по знаку зарядов диполей, расположенных друг возле друга. Что же касается поверхностей диэлектрика, обращенных к заряженным плоскостям, то принадлежащие им заряды диполей остаются некомпенсированными. Поэтому у той поверхности, в которую входят линии напряженности внешнего поля \vec{E}_0 , возникает избыток отрицательных зарядов. У поверхности, из которой выходят линии \vec{E}_0 , возникает избыточный положительный заряд. Эти связанные заряды Q' , возникшие в результате поляризации диэлектрика, называют поляризационными. Их поверхностную плотность обозначим σ_p .

Из рис. 114 видно, что электрическое поле \vec{E}_p поляризационных зарядов направлено противоположно внешнему полю \vec{E}_0 , созданному свободными зарядами плоскостей 1 и 2. Напряженность результирующего поля

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p,$$

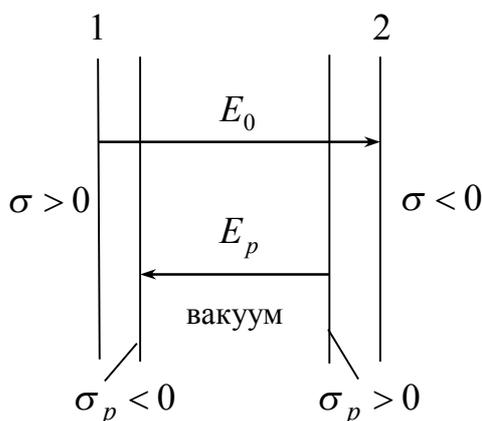


Рис. 115. Модель поляризованного диэлектрика

а в проекциях по направлению вектора \vec{E}_0 величина $E = E_0 - E_p$. Таким образом, диэлектрик можно заменить моделью из двух заряженных плоскостей, находящихся в вакууме (рис. 115).

В этом случае $E_p = \sigma_p / \epsilon_0$ – поле, созданное двумя внутренними бесконечными разноименно заряженными плоскостями, поэтому

$$E = E_0 - E_p = E_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0},$$

σ_p – абсолютная величина заряда любой из внутренних плоскостей. Таким образом, поляризация диэлектрика вызывает уменьшение в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем E_0 . Вне диэлектрика $\vec{E} = \vec{E}_0$.

Чтобы узнать, во сколько раз электрическое поле E_0 ослабляется диэлектриком, вычислим поверхностную плотность σ_p поляризационных связанных зарядов и найдем связь между поверхностной плотностью заряда диэлектрика и его вектором поляризации. Для этого выделим в диэлектрике, находящемся в поле E_0 , цилиндр, площадь основания которого равна dS , а длина равна l (рис. 116). Как и в предыдущем случае, внутренние разноименные заряды взаимно компенсируют друг друга; в результате уменьшение электростатического поля внутри диэлектрика вызывается только зарядами, расположенными в основаниях цилиндра. Каждое из

оснований цилиндра содержит связанный заряд dQ' , абсолютная величина которого равна $\sigma_p dS$. Моделью такого цилиндра является диполь, плечо которого равно l , а электрический момент

$$dp_e = |dQ'l| = \sigma_p dSl.$$

В соответствии с определением вектора поляризации его численное

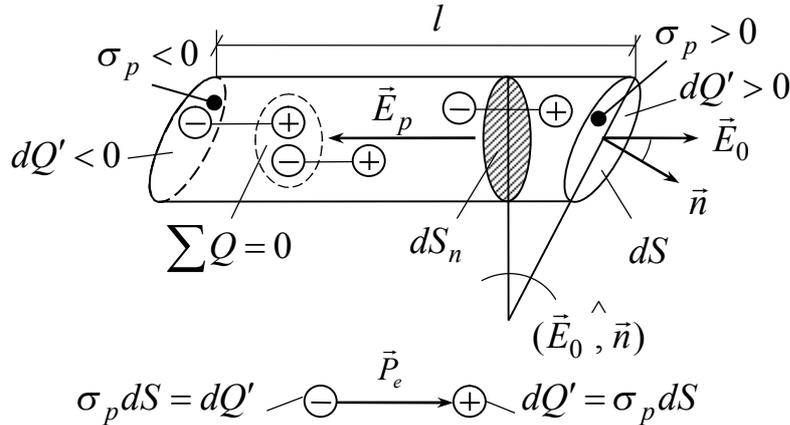


Рис. 116. К определению связи между P_e и E_p

значение для одного диполя вычисляется так:

$$P_e = \frac{dp_e}{dV} = \frac{\sigma_p dS \cdot l}{dV} = \frac{\sigma_p dS \cdot l}{dS_n \cdot l} = \frac{\sigma_p dS}{dS_n}.$$

Здесь $dS_n = dS \cos(\vec{E}_0, \vec{n})$, поэтому

$$P_e = \frac{\sigma_p dS}{dS \cos(\vec{E}_0, \vec{n})} = \frac{\sigma_p}{\cos(\vec{E}_0, \vec{n})}.$$

Окончательно $P_e \cos(\vec{E}_0, \vec{n}) = P_{en} = \sigma_p$, т.е. проекция на \vec{n} вектора поляризации P_{en} равна поверхностной плотности связанных зарядов σ_p . В этом случае электрическое поле в диэлектрике

$$E = E_0 - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P_{en}}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 \varkappa E}{\varepsilon_0} = E_0 - \varkappa E,$$

или

$$E + \varkappa E = E_0; E(1 + \varkappa) = E_0; E = \frac{E_0}{1 + \varkappa} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = 1 + \varkappa$. Вспомним определение диэлектрической проницаемости среды. Это физическая величина, которая показывает, во сколько раз сила F взаимодействия между зарядами в данной среде меньше их силы F_0 взаимодействия в вакууме, т.е.

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Соответственно, для напряженности электрического поля в диэлектрике

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость среды равна её диэлектрической восприимчивости, увеличенной на единицу. Обе характеристики вещества являются безразмерными, причем для вакуума $\varepsilon = 1$ и $\varkappa = 0$.

§64. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Электрическое смещение

Выше было показано, что расчет электростатических полей, создаваемых в вакууме заряженными телами реальной формы и размеров удобно производить с помощью теоремы Остроградского–Гаусса. Поле в среде отличается от поля в вакууме тем, что оно создается как свободными, так и связанными зарядами, поэтому математическое выражение теоремы Остроградского–Гаусса следует записывать так:

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_i Q_i + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_i Q_i',$$

т.е. при вычислении потока вектора \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S необходимо учитывать алгебраическую сумму не только свободных зарядов $\sum Q_i$, но также и связанных зарядов $\sum Q_i'$, заключенных внутри замкнутой поверхности. Алгебраическая сумма свободных зарядов, т.е. их геометрическое распределение в пространстве, заранее известна, так как эти заряды расположены на заранее заданных источниках электростатического поля (заряженные плоскости, сферы, нити и тому подобное). Однако последнее выражение непригодно для вычисления вектора \vec{E} (или потока Φ_e) в диэлектрике, так как неизвестная величина \vec{E} (или Φ_e) определяется не только свободными, но и связанными зарядами $\sum_i Q_i'$, т.е. их геометрическим распределением в пределах диэлектрика, а распределение связанных зарядов в свою очередь определяется неизвестной величиной \vec{E} (или Φ_e).

Для доказательства теоремы в форме, не содержащей указанного выше логического тупика, поступим следующим образом. Снова воспользуемся моделью четырех заряженных плоскостей (см. рис. 106) и связью между

поверхностной плотностью заряда и модулем вектора поляризации. Тогда электрическое поле в диэлектрике можно вычислить так:

$$E = E_0 - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P_{en}}{\varepsilon_0}.$$

Результирующие потоки векторов \vec{E}_0 и \vec{P}_e сквозь произвольную замкнутую поверхность примут вид (по определению):

$$\Phi_e = \oint_s E_n dS = \oint_s E_{on} dS - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_s P_{en} dS.$$

Сравнив с математическим выражением теоремы Остроградского–Гаусса, видим, что

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \oint_s P_{en} dS,$$

так как поток вектора \vec{E}_0 в вакууме всегда равен уменьшенной в ε_0 раз алгебраической сумме только свободных зарядов:

$$\oint_s E_{on} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i.$$

Повторим, что слова «алгебраическая сумма свободных зарядов» означают, что известны форма и размеры тел, содержащих эти известные свободные заряды, т.е. это могут быть заряженные плоскости, сфера, нить и так далее.

В результате, сделав соответствующие замены в $\Phi_e = \oint_s E_n dS$, получим выражение теоремы Остроградского–Гаусса, не содержащее логического тупика:

$$\oint_s E_n dS + \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_s P_{en} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i,$$

или, умножив левую и правую части этого выражения на ε_0 , получим

$$\oint_s (\varepsilon_0 E_n + P_{en}) dS = \sum_i Q_i.$$

Это уравнение содержит только известные свободные заряды, создающие внешнее поле E_0 и не содержит неизвестных связанных зарядов. Физическая величина, определяемая соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e,$$

называется вектором электрического смещения или электрической индукцией (от лат. induction – наведение). Соответственно $D_n = \varepsilon_0 E_n + P_{en}$. Дифференциальный поток вектора \vec{D} вычисляется так: $d\Phi_D = D_n dS$. Таким образом, теорему Остроградского–Гаусса при наличии диэлектриков можно записать так:

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_i Q_i ,$$

т.е. поток вектора D электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью. Преимущество последнего выражения заключается в том, что нет необходимости вычислять неизвестную алгебраическую сумму связанных зарядов $\sum_i Q_i'$; в то же время алгебраическая сумма свободных $\sum_i Q_i$ зарядов является известной, наперед заданной величиной при определении поля в диэлектрике. Воспользовавшись определением \vec{D} , а так же соотношением

$$\vec{P}_e = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} ,$$

получим

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} .$$

Использовать теорему для расчета электрических полей в диэлектриках надо следующим образом. Из выражения

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}_e}{\varepsilon_0}$$

видим, что

$$\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e}_{=\vec{D}(\text{диэл.})} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}_0}_{=\vec{D}(\text{вакуум})} ,$$

т.е. вектор \vec{D} одинаков и в диэлектрической среде, и в вакууме. Таким образом, зная напряжённость \vec{E}_0 , созданную свободными зарядами (заряженными плоскостями, сферой, нитью и т.д.) нетрудно вычислить вектор \vec{D} в вакууме; далее, используя значение ε (из таблиц) можно определить \vec{E} в диэлектрике по формуле

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Из равенства векторов \vec{D} в диэлектрике и в вакууме следует, что вектор электрического смещения \vec{D} не зависит от свойств среды. Это утверждение не противоречит формуле $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, так как напряженность \vec{E} поля конкретного источника этого поля (например, заряженной плоскости) в диэлектрике обратно пропорциональна величине ε ; в результате при подстановке выражения для \vec{E} в формулу для вычисления вектора \vec{D} величина ε сократится. Например, если пространство между пластинами конденсатора заполнено двумя различными диэлектриками, то вектор \vec{D} одинаков в обоих диэлектриках ($D_1 = D_2$). Это дает возможность составить уравнение, что существенно упрощает решение многих задач.

§65. Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики (от фр. Seignette – фамилия аптекаря, обнаружившего сенетову соль) – это кристаллические диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля. Сегнетоэлектрик состоит из доменов (от франц. domaine – область) – областей с различными направлениями поляризованности. При внесении сегнетоэлектрика во внешнее поле доменные границы смещаются так, что объёмы доменов, поляризованных по полю, увеличиваются за счет доменов, поляризованных против поля, поэтому сегнетоэлектрики имеют большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли $\varepsilon_{\max} \cong 10^4$). Практическое применение получили сегнетова соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ и титанат бария BaTiO_3 из-за присущего им пьезоэлектрического эффекта, т.е. возникновения э.д.с. на гранях кристалла при его сжатии или растяжении и наоборот, поэтому они используются в устройствах для генерации и регистрации ультразвука (от 20 кГц до 1 ГГц).

Тема 13. Электрическая емкость проводника. Энергия электрического поля

§66. Проводники в электростатическом поле. Емкость уединенного проводника

При помещении проводника во внешнее электростатическое поле \vec{E}_0 на заряды проводника, например, на электроны в металле, будут действовать электростатические силы, вследствие чего они начнут перемещаться (рис. 117). В результате в проводнике возникает собственное электростатическое поле \vec{E}_1 , направленное противоположно внешнему.

Перемещение зарядов продолжится до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором результатирующее электростатическое поле \vec{E} внутри проводника исчезает, следовательно напряженность этого поля во всех точках внутри проводника равна нулю ($\vec{E} = 0$). Отсутствие поля внутри проводника означает, что потенциал во

всех точках внутри проводника посто-

янен ($E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\varphi = \text{const}$), т.е. и по-

верхность проводника в электростатическом поле также является эквипотенциальной. Отсюда же следует, что электростатическое поле на внешней поверхности проводника направлено по нормали к каждой точке его поверхно-

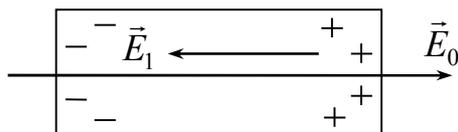


Рис. 117. Электростатическое поле внутри проводника

$$(\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = 0)$$

сти ($E = E_n$ и $D = D_n$). В противном случае под действием касательной составляющей \vec{E}_τ заряды начали бы по поверхности проводника перемещаться, что, в свою очередь, противоречило бы равновесному распределению зарядов.

Если проводнику, находящемуся в среде, диэлектрическая проницаемость которой ϵ , и которая находится вне электростатического поля, сообщить некоторые заряды Q , то в результате взаимного отталкивания эти избыточные заряды расположатся только на поверхности проводника. Найдем взаимосвязь между напряженностью E поля вблизи поверхности заряженного проводника и поверхностной плотностью σ зарядов на его поверхности. Для этого применим теорему Остроградского–Гаусса, а в качестве произвольной замкнутой поверхности выберем цилиндрическую поверхность с основаниями dS (одно из них расположено внутри, а другое – вне проводника), ось которой ориентирована вдоль вектора \vec{E} (рис. 118). Так как поле внутри проводника отсутствует, дифференциальный поток вектора \vec{D} сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра. Согласно теореме Остроградского–Гаусса этот поток ($d\Phi_D = D_n dS$) равен алгебраической сумме свободных зарядов ($d\Phi_D = dQ = \sigma \cdot dS$) охваченных этой поверхностью. В результате

$$D_n dS = \sigma \cdot dS, \text{ или } D_n = \sigma,$$

$$\text{где } D_n = \epsilon_0 \epsilon E_n \text{ и } E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

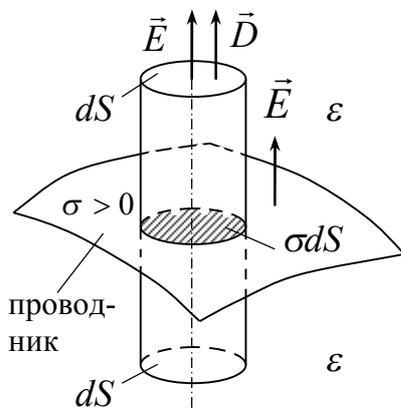


Рис. 118. Электрическое поле вблизи поверхности заряженного проводника

проницаемостью ϵ

Таким образом, напряженность электростатического поля у поверхности проводника равна поверхностной плотности зарядов, уменьшенной в $\epsilon_0 \epsilon$ раз.

Рассмотрим уединенный проводник, т.е. проводник, который удален от других проводников и зарядов. Его потенциал, т.е. потенциал любой точки на поверхности проводника прямо пропорционален заряду проводника ($\varphi \sim Q$). Например, для проводника в форме сферы или шара, находящихся в среде диэлектрической

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} Q,$$

где r – координата любой точки на поверхности сферы или шара. Из опыта следует, что различной формы и размеров проводники, имея одинаковый заряд, обладают различными потенциалами. Поэтому для уединенного

проводника условие пропорциональности потенциала и заряда можно записать так:

$$Q = C\varphi,$$

где величина C отражает различие в размерах и форме различных проводников.

Эта величина

$$C = \frac{Q}{\varphi},$$

равная отношению заряда проводника к его потенциалу, называется электроемкостью уединенного проводника. Она численно равна заряду, сообщению которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Электроемкость проводника зависит от его размеров, формы и электрических свойств среды, в которой проводник находится, но не зависит от материала, агрегатного состояния и наличия полостей внутри проводника. Это объясняется тем, что за счет взаимного отталкивания избыточные заряды распределяются только на внешней поверхности проводника. Электроемкость не зависит также ни от заряда проводника, ни от его потенциала, так как при увеличении заряда проводника в несколько раз во столько же раз возрастает и его потенциал, и отношение Q/φ не изменяется.

За единицу электроемкости в СИ принята электроемкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Название этой единицы – фарад (Ф) в честь английского физика Фарадея. Потенциал уединенного шара радиуса R , находящегося в однородной среде диэлектрической проницаемостью ε

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\varepsilon R}.$$

Электроемкость такого шара

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R,$$

т.е. зависит только от его формы, размеров и ε . Электроемкостью 1 Ф обладает уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус $R = 1/4\pi\varepsilon_0 \cong 9 \cdot 10^9$ м, что примерно в 140 раз больше радиуса Земли (электроемкость Земли $C \cong 0,7$ мФ). Следовательно, фарад – очень большая величина, поэтому на практике используют дольные единицы – миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ). Вспомним, что электрическая постоянная выражается через фарад (Ф): $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$.

Электроемкость характеризует способность проводника накапливать и хранить электрический заряд.

§67. Взаимная емкость. Конденсаторы

В практической деятельности необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами обладать большой емкостью. Эти устройства получили название конденсаторов (от лат. condensation – сгущение).

Если к заряженному проводнику A , потенциал которого φ_A и заряд Q , приближать другие тела, то на них возникают заряды, которые называются индуцированными – это свободные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды, причем ближайшими к наводящему заряду Q будут заряды противоположного знака (рис. 119).

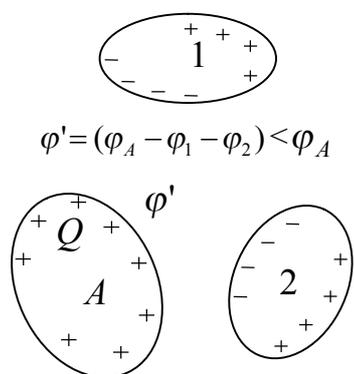


Рис. 119. Влияние окружающих тел на электрическое поле заряженного проводника

Эти заряды ослабляют поле, создаваемое зарядом Q , т.е. понижают потенциал проводника до φ' , что приводит к повышению его емкости (так как $C = \frac{Q}{\varphi}$). Емкость такой системы проводников и тел называется взаимной.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. Чтобы препятствовать рассеянию электрического поля, проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое зарядами, было сосредоточено в уз-

ком зазоре между обкладками конденсатора.

Этому условию удовлетворяют: 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных (соосных) цилиндра; 3) две концентрические (с общим центром) сферы.

Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на плоские, цилиндрические и сферические.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой, поэтому свободные заряды, создаваемые на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами (в соответствии с законом сохранения электрических зарядов). Емкость конденсатора – это физическая величина, численно равная отношению абсолютной величины заряда любой из обкладок к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{|Q|}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Вычислим емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга и несущих заряды $+|Q|$ и $-|Q|$ (рис. 120). Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то рассеянием поля по краям пластин можно пренебречь,

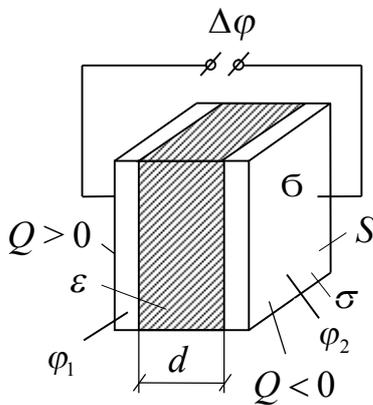


Рис. 120. Модель плоского конденсатора

поле между обкладками считать однородным и воспользоваться формулами для вычисления $\Delta\varphi$ поля, созданного двумя заряженными бесконечными плоскостями. При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов между ними

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками.

Поскольку $Q = \sigma S$, то

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{\sigma d} \varepsilon_0 \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где R_1 и R_2 радиусы внутренней и наружной обкладок.

Конденсаторы характеризуются пробивным напряжением – разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит пробой – электрический разряд сквозь слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

§68. Соединения конденсаторов

Для получения больших емкостей и уменьшения вероятности пробоя конденсаторы соединяют в батареи параллельно и последовательно. При этом также достигают возможности подбора необходимой емкости из серийно выпускаемых конденсаторов.

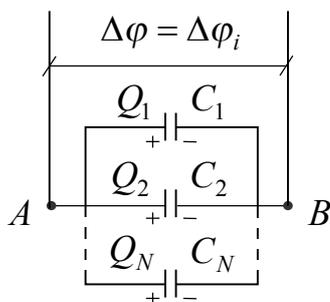


Рис. 121. Параллельное соединение конденсаторов

1. Параллельное соединение конденсаторов (рис. 121). Рассмотрим батарею из N параллельно соединенных конденсаторов зарядом Q_i и разностью потенциалов $\Delta\varphi_i$ каждый. У параллельно соединенных конденса-

торов разность потенциалов на обкладках батареи равна разности потенциалов каждого конденсатора $\Delta\varphi = \Delta\varphi_i$. Если заряд батареи конденсаторов обозначить Q , то емкость батареи

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{\Delta\varphi},$$

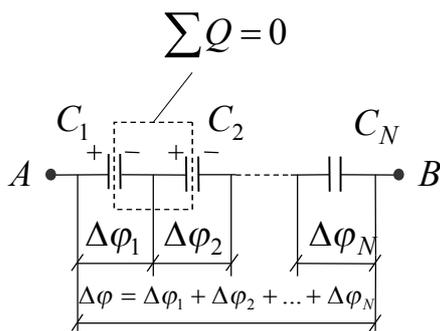
где Q_i – электрический заряд i -го конденсатора.

Так как $Q_i = C_i \Delta\varphi_i = C_i \Delta\varphi$, где C_i – емкость i -го конденсатора, то емкость батареи конденсаторов вычисляется так:

$$C = \frac{\Delta\varphi \sum_{i=1}^N C_i}{\Delta\varphi} = \sum_{i=1}^N C_i.$$

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

2. Последовательное соединение конденсаторов (рис. 122). У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, так как заряд, возникший, например, на левой обкладке первого



конденсатора индуцирует противоположный по знаку, но равный по величине заряд на правой обкладке того же конденсатора. В итоге алгебраическая сумма электрических зарядов соседних обкладок конденсаторов равна нулю. В соответствии с законом сохранения электрических зарядов заряд правой обкладки первого конденсатора по модулю равен заряду левой обкладки второго конденсатора. В результате заряд батареи последовательно соединенных конденсаторов равен заряду каждого из конденсаторов в отдельности

Рис. 122. Последовательное соединение конденсаторов

следовательно соединенных конденсаторов равен заряду каждого из конденсаторов в отдельности

$$Q = Q_i.$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{Q}{\Delta\varphi}.$$

Разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i,$$

где для любого из конденсаторов батареи

$$\Delta\varphi_i = \frac{Q_i}{C_i} = \frac{Q}{C_i}.$$

Тогда разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

Подставляя это выражение в формулу для вычисления емкости батареи конденсаторов, получим

$$C = \frac{Q}{Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}},$$

или

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

При последовательном соединении конденсаторов суммируются обратные величины емкостей. Таким образом, при последовательном соединении результирующая емкость C всегда меньше наименьшей емкости C_i , используемой в батарее. Последовательно соединяют конденсаторы, если напряжение источника электропитания превышает пробивное напряжение. В этом случае эффективно комбинированное параллельно – последовательное соединение конденсаторов.

§69. Энергия электростатического поля

1. Энергия системы неподвижных точечных зарядов. Электростатические силы взаимодействия консервативны; следовательно, система электрических зарядов обладает потенциальной энергией. Для двух зарядов Q_1 и Q_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга (рис. 123) была получена формула:

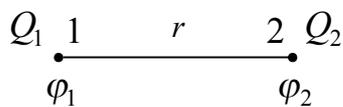


Рис. 123. Система двух электрических зарядов

$$E_{\Pi} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}.$$

Как быть в случае, если зарядов не два, а больше? Чтобы ответить на этот вопрос вычислим эту же потенциальную энергию с использованием потенциала. В соответствии с определением потенциала

$$\varphi = \frac{E_{\Pi}}{Q},$$

поэтому потенциал электростатического поля в точке 1 вычислим так:

$$\varphi_1 = \frac{E_{\Pi}}{Q_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r},$$

так как в точке 1 поле создается зарядом Q_2 .

Соответственно для точки 2

$$\varphi_2 = \frac{E_{II}}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Из сравнения последних выражений видно, что

$$E_{II} = \varphi_1 Q_1 = \varphi_2 Q_2 = \frac{\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2}{2}.$$

Такое представление последнего выражения необходимо для того, чтобы вычислить потенциальную энергию взаимодействия системы более чем двух электрических зарядов. Действительно, добавляя последовательно к системе из двух зарядов другие заряды Q_3, Q_4, \dots, Q_N легко убедиться в том, что в случае системы из N неподвижных зарядов энергия их взаимодействия

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме i -того в той точке поля, где находится заряд Q_i .

2. Энергия заряженного уединенного проводника. Пусть имеется уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого соответственно Q, C, φ . Увеличим заряд этого проводника на dQ . Для этого необходимо перенести заряд dQ из бесконечности ($\varphi_\infty = 0$) к поверхности проводника, затратив на это работу против кулоновской силы отталкивания:

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty) dQ = \varphi dQ = C\varphi d\varphi.$$

Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до φ , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^\varphi C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Природа этой работы заключается в том, что она совершается внешними силами по преодолению кулоновской силы отталкивания между одноименно заряженными проводником и зарядом. Поэтому энергия заряженного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник, т.е. полученное выражение является одновременно и выражением для энергии электрически заряженного проводника:

$$E_e = A = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Формулу $E_e = Q\varphi/2$ можно получить и из того обстоятельства, что потенциал проводника во всех его точках одинаков, так как поверхность проводника является эквипотенциальной. Полагая потенциал проводника равным $\varphi_i = \varphi$, из формулы

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i,$$

где Q_i – заряд участка проводника, получим:

$$E_e = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^N Q_i = \frac{1}{2} Q \varphi,$$

где $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ – заряд проводника.

3. Энергия заряженного конденсатора. Как всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией, которую можно вычислить следующим образом. Рассмотрим плоский незаряженный конденсатор (рис. 124). Зарядку конденсатора произведем переносом зарядов $dQ > 0$ со второй пластины на первую. Тогда работа по переносу заряда будет вычисляться так:

$$dA = dQ(\varphi_1 - \varphi_2) = dQ \Delta \varphi = dQ \frac{Q}{C};$$

$$A = \int_0^Q dA = \frac{1}{C} \int_0^Q Q dQ = \frac{Q^2}{2C},$$

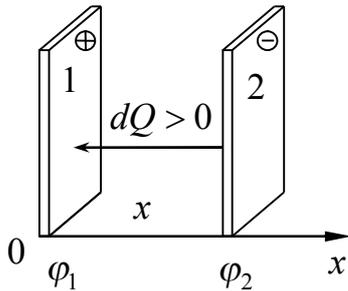


Рис. 124. К вычислению энергии конденсатора

где Q – заряд конденсатора, C – его емкость, $\Delta \varphi$ – разность потенциалов между обкладками.

Совершенная работа пойдет на увеличение энергии электростатического поля конденсатора, поэтому

$$E_e = A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q \Delta \varphi}{2} = \frac{C \Delta \varphi^2}{2}.$$

Используя выражение для энергии можно найти механическую силу притяжения пластин конденсатора. Для этого предположим, что расстояние x между пластинами меняется, например, на величину dx . Тогда сила F совершает работу

$$dA = F dx$$

за счет уменьшения потенциальной энергии системы заряженных пластин, т.е. за счет уменьшения энергии E_e

$$F dx = -dE_e \quad (dE_e < 0),$$

или

$$F = -\frac{dE_e}{dx}.$$

Поскольку

$$E_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} x,$$

где x – расстояние между пластинами, то взяв полные дифференциалы от левой и правой части последнего выражения

$$dE_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} dx$$

найдем силу притяжения, разделив на dx левую и правые части полученного выражения:

$$F = -\frac{dE_e}{dx} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} S, \left(E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \sigma = \frac{Q}{S} \right),$$

где знак « $-$ » говорит о том, что сила F уменьшает величину x , т.е. является силой притяжения. Отсюда нетрудно определить давление, оказываемое пластинами конденсатора на слой диэлектрика внутри конденсатора:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

4. Энергия электростатического поля. Из уравнения связи между напряженностью электростатического поля и его потенциалом

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

вытекает, что для однородного поля ($\vec{E} = \text{const}$) конденсатора, расстояние между пластинами которого равно d , а разность потенциалов равна $\Delta\varphi$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{d}.$$

Отсюда напряженность электрического поля можно вычислить так:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{d},$$

поэтому модуль разности потенциалов между пластинами конденсатора

$$|\Delta\varphi| = Ed.$$

Тогда энергия конденсатора может быть вычислена таким образом:

$$E_e = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SE^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

где V – объем конденсатора. Эта формула показывает, что энергия конденсатора выражается через напряженность поля \vec{E} ; характеристикой электростатического поля является так же напряженность \vec{E} , поэтому энергия конденсатора и энергия электростатического поля конденсатора – это одна и та же величина. Таким образом, электростатическое поле обладает энергией, которую можно вычислить по формулам

$$E_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V = \frac{ED}{2} V,$$

где $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ – вектор электрической индукции (смещения), величина которого не зависит от диэлектрической проницаемости среды, заполняющей конденсатор.

Объемная плотность энергии электростатического поля (энергия единицы объема), вычисляется так:

$$w_e = \frac{E_e}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Можно отметить, что эта формула внешне совпадает с формулой для вычисления давления, которое испытывает слой диэлектрика внутри конденсатора.

ГЛАВА V. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§70. Электрический ток. Закон Ома в дифференциальной форме

Электрическим током называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. Под упорядоченным движением заряда понимают движение, при котором всегда существует неизменная по направлению составляющая скорости заряда. Электроны в металлическом проводнике, по которому течет электрический ток, участвуют одновременно и в хаотическом тепловом движении, и в упорядоченном за счет неизменной (или закономерно меняющейся) по величине и направлению силы электрического поля.

Из определения электрического тока видно, что он может быть обусловлен движением и отрицательных, и положительных зарядов, причем перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу равного по величине положительного заряда в противоположном направлении; при этом за направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов. Если электрический ток возник в проводнике, то он называется током проводимости. В этом случае объем и поверхность проводника не являются эквипотенциальными, так как заряды движутся между точками проводника, потенциалы которых неодинаковы. Электрический ток, образованный упорядоченным движением заряженного тела, независимо от его размеров, называется конвективным (конвекционным). Движение протона в ускорителе заряженных частиц, движение по орбите обладающей отрицательным зарядом Земли представляют собой конвективный ток.

Упорядоченное движение зарядов происходит под действием сил или неизменных, или закономерно меняющихся от точки к точке проводника, поэтому для существования электрического тока необходимо выполнение двух условий: первое – наличие в данной среде свободных электрических зарядов; второе – наличие в этой же среде поля сил, вызывающих упорядоченное движение свободных зарядов.

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока, или величина тока. Она численно равна количеству электричества, прошедшему сквозь поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Если величина тока и его направление не изменяются со временем, ток называется постоянным. В этом случае $I = Q/t$. За единицу величины тока в СИ принимается величина такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконеч-

ной длины, находящимся в вакууме на расстоянии 1 метра друг от друга, возникает сила электромагнитного взаимодействия, равная $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводника. Название единицы величины тока – ампер (А), в честь французского физика Ампера. Физическая природа этого определения будет обоснована позже.

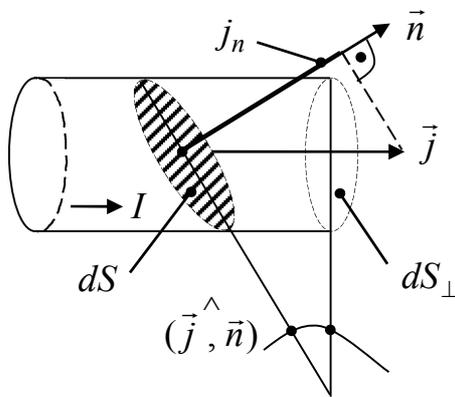


Рис. 125. К вычислению величины тока в проводнике

Чтобы различать токи противоположных направлений и учитывать распределение тока по сечению проводника вводится вектор плотности тока \vec{j} . Он направлен в сторону упорядоченного движения положительных зарядов и численно равен величине тока, проходящего сквозь единицу площади поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Часто в физике и электротехнике необходимо вычислить величину тока

I , протекающего сквозь произвольное сечение проводника. Если площадка dS выделена в произвольном сечении, то величина соответствующей ей площади dS_{\perp} равна (рис. 125):

$$dS_{\perp} = dS \cos(\vec{j}, \vec{n}),$$

отсюда

$$j = \frac{dI}{dS \cos(\vec{j}, \vec{n})} ; j \cos(\vec{j}, \vec{n}) = j_n = \frac{dI}{dS} \text{ и } dI = j_n dS.$$

Поэтому величина тока сквозь площадку S произвольного сечения проводника вычисляется так:

$$I = \int_0^I dI = \int_S j_n dS.$$

Если проводник неоднороден (т.е. его свойства неодинаковы в различных точках), то простые соотношения между электрическими величинами будут выполняться лишь для физически бесконечно малого объема проводника. Этот объем в силу его малости можно считать однородным. Выделим его мысленно в виде цилиндра внутри проводника (рис. 126); ось цилиндра параллельна вектору плотности тока \vec{j} . Сквозь поперечное сечение цилиндра течет ток, величина которого равна $j dS$ (в данном случае $j = j_n$). Используя связь между напряженностью E и потенциалом φ поля, вычислим разность потенциалов $d\varphi$, приложенную к цилиндру:

$$|d\varphi| = Edl.$$

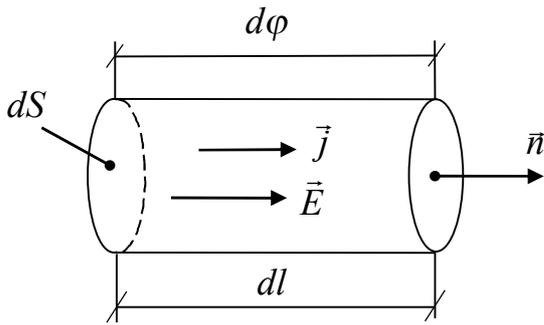


Рис. 126. К выводу закона Ома в дифференциальной форме

Знак « \rightarrow » опущен, так как направление \vec{E} видно из рисунка.

Далее применим закон Ома (немецкий физик), в который входит электросопротивление проводника. Электрическое сопротивление – это физическая величина, характеризующая противодействие проводника или электрической цепи электрическому току, т.е. упорядоченному движению электрических зарядов. Электрическое сопротивление про-

водника, как известно из школьного курса физики, вычисляется так.

$$dR = \rho \frac{dl}{dS},$$

где ρ – удельное электросопротивление вещества. Вспомнив закон Ома для однородного проводника $I = U/R$, можем записать для физически бесконечно малого объема:

$$\underbrace{j dS}_{=dl} = \underbrace{Edl}_{=dU} \underbrace{\frac{dS}{\rho dl}}_{=1/dR}, \text{ или } j = \frac{E}{\rho} = \sigma E, \text{ так как в данном случае } dU = |d\varphi|.$$

Величину U часто называют электрическим напряжением на проводнике.

Здесь σ – физическая величина, называемая удельной электрической проводимостью вещества и характеризующая способность вещества проводить электрический ток. Она обратно пропорциональна удельному электросопротивлению вещества; ее величина определяется природой вещества и условиями, в которых вещество находится. Например, электропроводимость металлов гораздо больше, чем полупроводников; в то же время с повышением температуры электропроводимость металлов убывает, а полупроводников растет.

Поскольку направление упорядоченного движения положительных зарядов и направление вектора \vec{E} совпадают, то полученное выражение можно записать в векторной форме так:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме. Слово «дифференциальная», хотя в закон и не входят производные, означает, что входящие в закон величины относятся к бесконечно малому объему вещества.

§71. Электродвижущая сила

Поле кулоновских сил не может явиться причиной возникновения постоянного электрического тока, так как действие этих сил на разноименные заряды вызывает их соединение, а на одноименные – удаление в противоположные стороны в бесконечность. В результате исчезает разность потенциалов в проводнике и исчезает электрическое поле. Следовательно, для создания упорядоченного движения электрических зарядов необходимо наличие поля сил неэлектростатического происхождения. Поле этих сил создается устройством под названием источник тока, или источник электродвижущей силы (э.д.с.) В источнике тока энергия механического движения, химических реакций, тепловая энергия преобразуется в энергию электрического поля. Сюда относятся электрические генераторы, гальванические элементы, термоэлементы и пр. Источники тока вызывают разделение разноименных зарядов и поддерживают неизменной разность потенциалов на концах проводника. Силы неэлектростатического происхождения, действующие на электрические заряды со стороны источников тока, называются сторонними. Сторонними являются, например, индукционные силы, вызывающие движение зарядов в проводнике при явлении электромагнитной индукции. Здесь переменное магнитное поле создается не неподвижными, а движущимися электрическими зарядами (например, электронами в проводнике), поэтому электростатические силы в этом случае отсутствуют. То же самое происходит и при электрохимических процессах, когда ионы электролита движутся под действием сил, создаваемых движущимися в электродах и в подводящих ток проводниках электронами. Сюда же относятся контактные силы, возникающие на поверхностях соприкасающихся разнородных проводников (явление контактной разности потенциалов); термоэлектрические силы, возникающие в электрической цепи, содержащей несколько разнородных проводников, контакты между которыми имеют различную температуру (например, в термопарах, служащих для измерения температуры).

Перемещая электрические заряды сторонние силы совершают над ними работу за счет энергии источника тока. Количественной характеристикой, отражающей энергетические возможности источника тока, является электродвижущая сила источника тока.

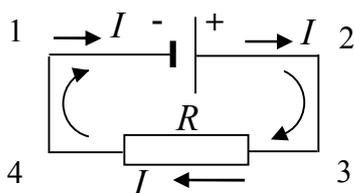


Рис. 127. Электрическая цепь, содержащая неоднородный участок

Для определения э.д.с. вычислим работу по перемещению заряда на неоднородном участке цепи 1–2, то есть участке цепи, содержащем источник тока (рис. 127). На

электрический заряд, движущийся упорядоченно в электрической цепи, содержащей источник тока, действует сторонняя сила \vec{F}_{cm} и сила электростатического поля \vec{F}_k . Результирующая этих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cm} + \vec{F}_k.$$

Стороннюю силу \vec{F}_{cm} по аналогии с электростатической можно представить в виде:

$$\vec{F}_{cm} = Q\vec{E}_{cm},$$

где \vec{E}_{cm} – напряженность поля сторонних сил. С учетом этого, результирующая сила

$$\vec{F} = Q(\vec{E}_{cm} + \vec{E}),$$

где \vec{E} – напряженность электростатического поля в проводнике.

На элементарном участке dl электрической цепи работа по перемещению заряда Q вычисляется так:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Q(\vec{E}_{cm} + \vec{E})d\vec{l} = Q(\vec{E}_{cm}d\vec{l} + \vec{E}d\vec{l}).$$

Направление $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока.

Работа, совершаемая силой \vec{F} по перемещению заряда Q на участке цепи 1–2 электрической цепи, равна:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = Q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Разделив обе части этого уравнения на величину заряда Q получим:

$$\frac{A_{12}}{Q} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Поскольку связь между напряженностью электростатического поля и его потенциалом имеет вид:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l},$$

то, интегрируя это выражение в соответствующих пределах, получим:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}, \text{ или } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$

Таким образом, второй интеграл в выражении для вычисления величины A_{12}/Q представляет собой разность потенциалов на участке 1–2 электрической цепи. Первый же интеграл получил название э.д.с. (\mathbf{E}_{2}) на участке цепи 1–2:

$$\mathbf{E}_{2} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Наконец, суммарная величина, численно равная работе, совершаемой на участке 1–2 и силами электростатического поля, и сторонними силами

по перемещению единичного положительного заряда (то есть A_{12}/Q) называется напряжением $U_{12} = A_{12}/Q$ на участке цепи. Таким образом,

$$U_{12} = \mathbf{E}_{12} + \varphi_1 - \varphi_2.$$

Если цепь замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$, и работа по перемещению электрического заряда совершается только сторонними силами. В этом случае электродвижущей силой, действующей в замкнутой цепи, называется физическая величина, определяемая как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил вдоль математического контура L , совпадающего с электрической цепью:

$$\mathbf{E} = \oint_L \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

При отсутствии сторонних сил (однородный участок цепи) $\mathbf{E}_{12} = 0$ и напряжение $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. В этом случае упорядоченное кратковременное движение электрических зарядов происходит только под действием сил электростатического поля, например, при замыкании проводником заряженных металлических шаров, обладающих различными потенциалами.

§72. Обобщенный закон Ома в интегральной форме

Выясним, как вычисляется величина тока на участках цепи (неоднородном и однородном) и в замкнутой цепи. При совокупном действии электростатического поля \vec{E} и поля сторонних сил \vec{E}_{cm} в проводнике возникает ток, плотность которого по закону Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_{cm} + \vec{E}).$$

Пусть ток протекает в проводнике площадью поперечного сечения S . Выделим мысленно в этом проводнике сечения 1 и 2, расстояние между которыми dl . Тогда сопротивление этого участка проводника

$$dR = \rho \frac{dl}{S}.$$

Чтобы получить выражение для э.д.с. на участке 1–2 выражение для плотности тока разделим на σ , умножим $d\vec{l}$ и проинтегрируем; в результате получим, что

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Кроме того, так как $j = \frac{I}{S}$, то левая часть этого уравнения для участка 1–2 примет вид (векторы \vec{j} и $d\vec{l}$ сонаправлены, а $1/\sigma = \rho$):

$$\int_1^2 \frac{I}{\sigma S} dl = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = I \int_1^2 dR = IR.$$

В результате, приравняв правые части двух последних уравнений, видим, что

$$IR = \underbrace{\int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}}_{=\mathbf{E}_2} + \underbrace{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}_{=(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Это выражение представляет собой обобщенный закон Ома в интегральной форме для участка цепи.

Это выражение справедливо и для переменного тока.

В соединенных последовательно участках замкнутой электрической цепи по закону сохранения электрических зарядов ток одинаков, поэтому напряжение на любых однородных участках цепи (не содержащих источников тока) можно вычислить по закону Ома для однородного участка цепи $U_{12} = IR$. Если участок электрической цепи содержит источник тока (неоднородный участок), то для вычисления напряжения на нем необходимо воспользоваться формулой

$$U_{12} = IR = \mathbf{E}_2 + \varphi_1 - \varphi_2,$$

Отсюда величина тока в неоднородном участке цепи

$$I = \frac{\mathbf{E}_2 + \varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

Эта формула представляет собой обобщенный закон Ома для неоднородного участка цепи.

Если электрическая цепь замкнута ($\varphi_1 = \varphi_2$), то величина тока вычисляется так:

$$I = \frac{\mathbf{E}}{R_{\Sigma}} = \frac{\mathbf{E}}{R + r},$$

где r – сопротивление источника тока (внутреннее сопротивление), R – сопротивление потребителей электроэнергии (нагрузка) и соединительных проводов (внешнее сопротивление). Эта формула выражает закон Ома для замкнутой (полной) цепи.

Физический смысл э.д.с. заключается в следующем. Из формулы

$$\frac{A_{12}}{Q} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

следует, что работа по перемещению заряда Q вдоль замкнутой электрической цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$ и $\vec{E} d\vec{l} = 0$ и $\int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \mathbf{E}$) равна

$$A = Q\mathbf{E}, \text{ откуда } \mathbf{E} = \frac{A}{Q}.$$

Таким образом, физический смысл э.д.с. источника тока, действующего в замкнутой цепи, заключается в том, что э.д.с. численно равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль цепи.

Отсюда видно, что единицей измерения э.д.с. является э.д.с. такого источника тока, который для перемещения заряда величиной 1 Кл вдоль замкнутой цепи совершает работу величиной 1 Дж. Название – вольт (В).

Для увеличений эффективности работы источников тока их соединяют в батареи. Если источники тока соединены последовательно, то э.д.с. батареи равна сумме э.д.с. источников тока; если источники тока соединены параллельно, то это увеличивает емкость батареи (измеряется в ампер – часах), т.е. ее работоспособность.

§73. Работа и мощность источника тока.

Закон Джоуля–Ленца

Из закона Ома для замкнутой (полной) цепи следует, что

$$\mathbf{E} = IR + Ir = U + U_r,$$

где U – напряжение на потребителе электроэнергии (нагрузке); U_r – напряжение на источнике тока. Отсюда видно, что $U < \mathbf{E}$, то есть в нагрузку поступает лишь часть энергии, которой обладает источник тока. Выясним, какая это часть.

Работа, совершаемая источником тока по перемещению заряда dQ вдоль всей цепи равна $dA = \mathbf{E}dQ = \mathbf{E}dt$. Отсюда работа за конечное время, вычисляется так:

$$A = \int_0^A dA = \int_0^t I \mathbf{E} dt = I \mathbf{E} t.$$

В соответствии с определением, полная мгновенная мощность N , развиваемая источником тока, вычисляется так:

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{E} \frac{dQ}{dt} = \mathbf{E}I = \mathbf{E} \frac{\mathbf{E}}{R + r} = \frac{\mathbf{E}^2}{R + r}.$$

Ранее мы изучили понятие мощности силы, теперь появилось новое понятие – мощность устройства (в данном случае источника тока), однако физическая основа этих понятий одинакова: в обоих случаях это работа, совершаемая в единицу времени, поэтому в СИ единицей измерения мощности источника тока является мощность такого источника тока, который совершает работу 1 Дж за время 1 с. Название – ватт (Вт).

В нагрузке, которая может содержать другой источник тока \mathbf{E}_2 и представляет собой, таким образом, неоднородный участок 1–2 цепи,

аналогичная работа $dA_{12} = \mathbf{E}_{12}dQ + (\varphi_1 - \varphi_2)dQ$, откуда полезная мощность N_H , выделяемая в нагрузке, имеет вид:

$$\begin{aligned} N_H &= \frac{dA_{12}}{dt} = \mathbf{E}_{12} \frac{dQ}{dt} + (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{dQ}{dt} = \\ &= I\mathbf{E}_{12} + I(\varphi_1 - \varphi_2) = I[\mathbf{E}_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Если участок 1–2 электрической цепи однороден ($\mathbf{E}_{12} = 0$), то

$$N_H = I(\varphi_1 - \varphi_2) = IU_{12} = I^2 R_{12} = \frac{\mathbf{E}^2}{(R+r)^2} R_{12}.$$

Для замкнутой электрической цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$), содержащей один источник тока \mathbf{E} и нагрузку ($R_{12} = R$) к.п.д. источника тока вычисляется так:

$$\eta = \frac{N_H}{N} = \frac{IU_{12}}{I\mathbf{E}} = \frac{I^2 R}{I^2(R+r)} = \frac{R}{R+r}.$$

Если ток проходит по неподвижному металлическому проводнику, то вся работа источника тока по созданию электрического тока в проводнике идет на его нагревание, и по закону сохранения энергии элементарная теплота за время dt

$$dE_T = dA = UdQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Последнее выражение представляет собой экспериментальный закон Джоуля–Ленца (английский и российский физики). Если проводник неоднороден, то существует дифференциальная форма закона Джоуля–Ленца. Выделим мысленно в проводнике элементарный цилиндрический объем $dV = S \cdot dl$, сопротивление которого $dR = \rho \cdot dl / S$. За время dt в этом объеме выделится теплота

$$dE_T = I^2 dRdt = (jS)^2 \frac{\rho \cdot dl}{S} dt = \rho \cdot j^2 dVdt.$$

Количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единице объема, называется объемной плотностью тепловой мощности. Она равна

$$w_T = \frac{dE_T}{dVdt} = \rho j^2.$$

Так как $\rho = \frac{1}{\sigma}$ и $j = \sigma E$ (закон Ома в дифференциальной форме), то

$$w_T = \sigma E^2 = jE.$$

Это формула выражает закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме, пригодный для любого проводника, для постоянного и переменного токов.

Если проводник с током находится в магнитном поле, то он движется, при этом часть энергии источника тока расходуется на совершение механической работы по перемещению проводника.

§74. Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей

Обобщенный закон Ома позволяет рассчитывать любую электрическую цепь. Рассчитать цепь – значит по известным э.д.с. и R определить величины токов и напряжений в проводниках. Расчет значительно упрощается, если использовать два правила Кирхгофа (немецкий физик). Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле электрической цепи равна нулю:

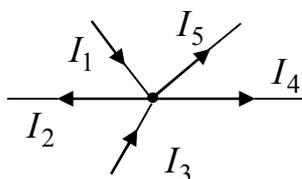


Рис. 128. Узел электрической цепи

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Узлом называется любая точка электрической цепи, в которой сходится три и более проводников (рис. 128). Электрический ток, входящий в узел, считается положительным, выходящий из узла – отрицательным:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первое правило означает, что в случае постоянного тока в электрической цепи ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не могут накапливаться электрические заряды.

Участком (ветвью) электрической цепи называют ее часть, заключенную между соседними узлами. Контур – это замкнутая совокупность участков электрической цепи.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений величин токов I_i и сопротивлений R_i соответствующих

участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. E_k , действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{k=1}^{N_1} E_k.$$

Порядок расчета сложных электрических цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа следующий:

1. Произвольно выбрать направление токов на всех участках цепи (рис. 129); истинное направление токов определяется

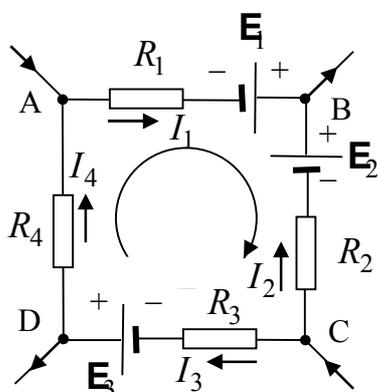


Рис. 129. К применению второго правила Кирхгофа

при решении задачи: если искомый ток получился со знаком «+», то его направление было выбрано верно, и наоборот.

2. Выбрать направление обхода контура – по ходу или против хода часовой стрелки. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными. Э.д.с. источников тока, включенных на различных участках считаются положительными, если они повышают потенциал электрической цепи в направлении выбранного обхода контура, т.е. «внутри» источника тока мысленно движемся от отрицательного электрода к положительному.

3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и э.д.с. рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент (источник тока, сопротивление), не содержащийся в предыдущих контурах, например, для контура ABCD:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

Второе правило Кирхгофа основано на законе Ома, которое не предполагает постоянства тока в цепи, поэтому оно применимо и к расчету цепей переменного тока.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что изучает физика?
2. Назовите два вида материи.
3. Что такое пространство и время?
4. Какова роль физики в развитии техники и технологий?
5. Сформируйте, что такое система отсчёта.
6. Дайте определение материальной точки и абсолютно твердого тела.
7. Что такое физическая величина?
8. Чем векторный способ описания движения отличается от координатного?
9. Запишите кинетическое уравнение равнопеременного движения.
10. Чем тангенциальное уравнение отличается от нормального?
11. Сформируйте определение силы и массы тела?
12. Определите, что такое единица физической величины.
13. Запишите основное уравнение классической механики.
14. Какая система тел называется замкнутой?
15. Каким образом можно применять закон сохранения импульса для системы тел, не являющейся замкнутой?
16. Как отличается понятие работы силы в механике от бытового понятия работы человека?

17. В чем различие кинетической и потенциальной энергий?
18. Для каких систем тел неприменим закон сохранения механической энергии?
19. Чем вращательное движение отличается от поступательного?
20. Дать определение момента инерции тела в математической форме.
21. Записать уравнение динамики вращательного движения тела.
22. Какие процессы или движения объектов называются колебательными?
23. Запишите дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение.
24. Что такое приведенная длина физического маятника?
25. Запишите дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.
26. Дайте определение механического резонанса.
27. Что называется упругой волной?
28. Дайте определение интерференции упругих волн.
29. Чем отличается молекулярная физика от термодинамики?
30. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.
31. Что такое степень свободы движение тела?
32. Что такое внутренняя энергия?
33. Чем теплота отличается от работы?
34. Чем отличается первый закон термодинамики от закона сохранения и превращения энергии?
35. Запишите уравнение Майера.
36. Дайте одну из формулировок второго закона термодинамики.
37. Как вычисляется к.п.д. цикла Карно?
38. Что такое энтропия и свободная энергия термодинамической системы?
39. Что такое электрический заряд?
40. Дайте определение напряженности электростатического поля.
41. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса для электростатического поля.
42. Что такое потенциал электростатического поля в какой-либо точке поля?
43. Дайте определение, что такое вектор поляризации.
44. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
45. Что такое электроёмкость уединённого проводника?
46. Запишите формулу для вычисления электроёмкости батареи при последовательном соединении конденсаторов.
47. Как вычисляется объёмная плотность энергии электростатического поля?

48. Что такое электрический ток?
49. Дайте определение э.д.с. источника тока, действующего в замкнутой цепи.
50. Сформулируйте второе правило Кирхгофа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава I. МЕХАНИКА	
Тема 1. Кинематика материальной точки	
§1. Основные понятия и определения механики.....	5
§2. Кинематика материальной точки.....	7
§3. Ускорение при криволинейном движении.....	12
Тема 2. Динамика материальной точки	
§4. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта.....	15
§5. Второй закон Ньютона.....	15
§6. Единицы измерения, размерности и названия физических величин..	16
§7. Третий закон Ньютона. Сила тяжести и вес тела.....	18
§8. Импульс м.т. и системы м.т. Центр масс.....	19
§9. Закон сохранения импульса.....	22
Тема 3. Работа и энергия	
§10. Работа и мощность силы.....	24
§11. Кинетическая и потенциальная энергии.....	26
§12. Закон сохранения механической энергии.....	29
Тема 4. Кинематика вращательного движения тела	
§13. Характеристики вращательного движения тела.....	31
§14. Связь между векторами \vec{v} и $\vec{\omega}$	34
§15. Плоское движение тела.....	35
Тема 5. Динамика поступательного и вращательного движений тела	
§16. Движение центра масс абсолютно твердого тела при поступательном движении.....	37
§17. Динамика вращательного движения тела. Момент силы и момент импульса относительно оси.....	38
§18. Момент инерции тела.....	40
§19. Уравнение динамики вращательного движения тела.....	42
§20. Закон сохранения момента импульса.....	44
§21. Работа внешних сил и кинетическая энергия тела при вращательном и плоском движениях.....	45
Глава II. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	
Тема 6. Гармонические колебания	
§22. Свободные гармонические колебания.....	47
§23. Гармонический осциллятор. Маятники.....	51
§24. Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты...	55
§25. Биения.....	57

§26. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	58
Тема 7. Затухающие и вынужденные колебания	
§27. Свободные затухающие колебания.....	61
§28. Вынужденные гармонические колебания. Механический резонанс.....	63
Тема 8. Механические волны	
§29. Механические (упругие) волны и их характеристики.....	66
§30. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость волн.....	68
§31. Интерференция упругих волн.....	72
§32. Стоячие волны.....	75
Глава III. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	
Тема 9. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа	
§33. Основные понятия и определения молекулярной физики.....	78
§34. Законы идеального газа.....	80
§35. Уравнение Менделеева–Клапейрона.....	81
§36. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.....	83
§37. Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения.....	86
§38. Закон равнораспределения энергии молекул по степеням их свободы.....	89
§39. Явление переноса в газах. Средняя длина свободного пробега молекул в газах.....	92
§40. Внутреннее трение (вязкость).....	93
§41. Теплопроводность газов.....	96
§42. Диффузия в газах.....	98
Тема 10. Основы термодинамики	
§43. Внутренняя энергия термодинамической системы. Теплота и работа.....	100
§44. Первый закон термодинамики.....	102
§45. Теплоемкость вещества. Уравнение Майера.....	104
§46. Изопроцессы идеального газа.....	106
§47. Адиабатический процесс.....	109
§48. Круговые процессы. Обратимые и необратимые процессы.....	112
§49. Второй закон термодинамики. Цикл Карно.....	114
§50. Энтропия и свободная энергия.....	117
§51. Статистическое истолкование второго закона термодинамики.....	122
§52. Реальные газы. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах..	123
§53. Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	126

Глава IV. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Тема 11. Электростатическое поле в вакууме

§54. Электрические заряды. Закон Кулона.....	131
§55. Электрическое поле и его напряженность.....	133
§56. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме.....	136
§57. Применение теоремы Остроградского–Гаусса для расчета полей, создаваемых заряженными телами.....	137
§58. Работа сил электростатического поля. Потенциал.....	141
§59. Связь между напряженностью поля и градиентом его потенциала.....	144
§60. Вычисление потенциалов различных электростатических полей...	146

Тема 12. Электрическое поле в диэлектриках

§61. Свободные и связанные заряды. Электрический диполь.....	148
§62. Типы диэлектриков. Полярные и неполярные молекулы.....	149
§63. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор поляризации.....	151
§64. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Электрическое смещение.....	155
§65. Сегнетоэлектрики	158

Тема 13. Электрическая емкость проводника. Энергия электрического поля

§66. Проводники в электростатическом поле. Емкость уединенного проводника.....	158
§67. Взаимная емкость. Конденсаторы.....	161
§68. Соединения конденсаторов.....	162
§69. Энергия электростатического поля.....	164

Глава V. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§70. Электрический ток. Закон Ома в дифференциальной форме.....	169
§71. Электродвижущая сила.....	172
§72. Обобщенный закон Ома в интегральной форме.....	174
§73. Работа и мощность источника тока. Закон Джоуля–Ленца.....	176
§74. Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей.....	178

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	179
--------------------------------------	------------

Сергей Юрьевич Гуревич

КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ

Учебное пособие

Часть I