МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

531(07)
Ш957

А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Рабочая программа и задания для студентов
МТ и АТ факультетов

Челябинск
2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра общей и экспериментальной физики

531(07)
Ш957

А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Рабочая программа и задания для студентов
МТ и АТ факультетов

Под редакцией А.А. Шульгинова

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2012

УДК 531(076.5)+536(076.5)
Ш957

Одобрено
учебно-методической комиссией
физического факультета

Рецензенты:
А.Е. Майер, А.В. Шушарин

Шульгинов, А.А.

Ш957 Механика и термодинамика: рабочая программа и задания для студентов МТ и АТ факультетов / А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви; под. ред. А.А. Шульгинова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 50 с.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей ЮУрГУ, изучающих первую часть трёх семестрового курса физики. Оно содержит рабочую программу по механике, колебаниям и волнам, а также по молекулярной физике и термодинамике, которая включает план 18 лекций, 9 практических и 9 лабораторных занятий. Для каждого практического занятия имеется список основных понятий, которые студент должен усвоить перед выполнением задания и список вопросов по данной теме, а также примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Рабочая программа соответствует примерной программе дисциплины «Физика» федерального компонента цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин для ГОС 3-го поколения.

УДК 531(076.5)+536(076.5)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Лекции (36 часов); практика (18 часов); лабораторные работы (18 часов)

Таблица 1

№ лек.	План лекций	Тема практического занятия (ПЗ)
1	**Введение** Предмет физики. Методы физических исследований: наблюдение, гипотеза, эксперимент, теория. Влияние физики на развитие техники и влияние техники на развитие физики. Связь физики с философией и другими науками	—
2	**Раздел 1. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА** **Тема 1. Кинематика материальной точки** Механическое движение как простейшая форма движения. Элементы кинематики материальной точки и поступательного движения абсолютно твёрдого тела. Скорость и ускорение, нормальное и тангенциальное ускорения, радиус кривизны траектории	**ПЗ № 1.** Кинематика материальной точки
3	**Тема 2. Динамика** Основная задача динамики. Масса, импульс, сила. Динамика материального и поступательного движения твёрдого тела. Закон инерции и инерциальные системы отсчёта. Законы Ньютона и границы их применимости. Закон всемирного тяготения	—
4	Внешние и внутренние силы. Центр масс (центр инерции) механической системы и закон его движения. Закон сохранения импульса и его связь с однородностью пространства. Неинерциальные системы отсчёта	**ПЗ № 2.** Динамика материальной точки
5	**Тема 3. Энергия. Закон сохранения механической энергии** Работа силы и мощность. Энергия как универсальная мера движения и взаимодействия. Кинетическая энергия механической системы и её связь с работой внешних и внутренних сил	—

Продолжение табл. 1

№ лек.	План лекций	Тема ПЗ
6	Поле, как форма материи, осуществляющая силовое взаимодействие между частицами вещества. Силы консервативные и диссипативные. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле. Связь потенциальной энергии с силой, действующей на материальную точку. Закон сохранения механической энергии. Удар абсолютно упругих и неупругих тел	**ПЗ № 3.** Закон сохранения импульса
7	**Тема 4. Вращательное движение** Кинематика вращательного движения. Угловой путь, угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями точек вращающегося тела	—
8	Динамика вращательного движения. Момент силы и момент импульса относительно полюса и неподвижной оси вращения. Уравнение динамики вращательного движения относительно оси. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Штейнера	**ПЗ № 4.** Работа, энергия. Закон сохранения механической энергии
9	Закон сохранения момента импульса и его связь с изотропностью пространства. Работа момента силы и кинетическая энергия вращающегося тела. Плоское движение твёрдого тела. Теория гироскопа	—
10	**Раздел 2. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ** **Тема 1. Механические колебания** Гармонические колебания и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Пружинный, физический и математический маятники. Энергия гармонических колебаний. Ангармонический осциллятор	**ПЗ № 5.** Кинематика и динамика вращательного движения
11	Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Апериодический процесс. Вынужденные колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс	—

Продолжение табл. 1

№ лек.	План лекций	Тема ПЗ
	Сложение гармонических колебаний одного направления одинаковой частоты. Биения. Сложения взаимно перпендикулярных колебаний	—
12	**Тема 2. Механические волны** Механизм образования механических волн в упругой среде. Уравнение бегущей волны. Волновое уравнение. Длина волны и волновое число. Фазовая скорость. Энергия волны. Поток энергии	**ПЗ № 6.** Закон сохранения момента импульса. Энергия вращательного движения
13	Принцип суперпозиции волн и границы его применимости. Волновой пакет. Групповая скорость. Интерференция волн. Образование стоячей волны. Уравнение стоячей волны и его анализ	—
14	**Раздел 3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА** Статистический и термодинамический методы исследования систем. Термодинамическая система и её параметры. **Тема 1. Молекулярная физика** Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул. Молекулярно-кинетическое толкование температуры. Средняя квадратичная скорость. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул	**ПЗ № 7.** Кинематика и динамика колебаний
15	**Тема 2. I начало термодинамики** Внутренняя энергия системы. Работа газа. Графическое изображение термодинамических процессов и работы. Равновесные и неравновесные процессы. Количество теплоты. I начало термодинамики. Теплоёмкость многоатомных газов. Закон Майера. Применение I начала термодинамики к изопроцессам. Уравнение адиабаты	—

Окончание табл. 1

№ лек.	План лекций	Тема ПЗ
16	**Тема 3. II начало термодинамики** Обратимые и необратимые процессы. Циклы. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно, к.п.д. цикла. II начало термодинамики. Энтропия идеального газа. Микросостояние и макросостояние термодинамической системы. Статистический вес макросостояния. Статистическое толкование II начала термодинамики и энтропии. III начало термодинамики	**ПЗ № 8.** Газовые законы. I начало термодинамики
17	**Тема 4. Статистические распределения** Распределение молекул идеального газа по скоростям. Опыт Штерна. Барометрическая формула. Закон Больцмана	—
18	**Тема 5. Явления переноса** Явление переноса в термодинамических неравновесных системах. Законы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения. Молекулярно-кинетическая теория этих явлений. **Тема 6. Реальные газы** Реальный газ. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Фазовые переходы. Критическое состояние	**Итоговая контрольная работа**

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Таблица 2

№ зан.	Тематика лабораторных работ	Названия лабораторных работ (ЛР)
1	Вводная беседа: техника безопасности	**ВВОДНАЯ РАБОТА.** Определение ускорения свободного падения
2	Закон сохранения импульса	**ЛР № 1.** Изучение закона сохранения импульса
3	Закон сохранения момента импульса	Выполняется одна работа **ЛР № 2.** Определение скорости пули **ЛР № 8.** Закон сохранения момента импульса

Окончание табл. 2

№ зан.	Тематика лабораторных работ	Названия лабораторных работ
4	Основной закон динамики вращательного движения	Выполняется одна работа **ЛР № 3.** Изучение закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека **ЛР № 5.** Определение момента инерции тела, скатывающегося по наклонной плоскости **ЛР № 6.** Определение момента инерции маховика
5	Механические колебания	Выполняется одна работа **ЛР № 7.** Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника **ЛР № 9.** Изучение вынужденных колебаний **ЛР № 12.** Изучение затухающих колебаний
6	Механические волны	Выполняется одна работа **ЛР № 10.** Изучение собственных колебаний струны **ЛР № 11.** Изучение звуковых волн в воздухе
7	Молекулярная физика	**ЛР № 14.** Определение коэффициента вязкости жидкости
8	Термодинамика	**ЛР № 16.** Определение отношения теплоёмкостей воздуха
9	Дополнительное лабораторное занятие	

Описания лабораторных работ имеются в пособии [4].

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Практика показывает, что студент терпит неудачу в решении задач по физике чаще всего из-за неглубоких, формальных знаний теории. Поэтому, прежде чем приступить к решению, тщательно проработайте соответствующий теоретический материал [1–3].

2. Внимательно прочитайте условие задачи. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий ее сущность. На рисунке необходимо показать все векторные величины, используемые в задаче. Это во многих случаях существенно облегчает как поиск решения, так и само решение.

3. Задачи следует решать в общем виде. Для этого нужно обозначить все величины соответствующими буквами, и с помощью физических законов установить математическую связь между исходными данными и искомой величиной. При этом все математические преобразования необходимо сопровождать подробным объяснением. В результате получается одно или несколько уравнений, и физическая задача сводится к математической.

4. Получив для искомой величины решение в общем виде, нужно проверить её наименование в системе СИ. Неверное наименование есть явный признак ошибочности решения.

5. Убедившись, что общее решение верно, подставляют в него числовые значения величин в СИ. Если исходные или конечные величины значительно больше или значительно меньше единицы, то числа пишут в стандартном виде (например, вместо 0,000086 м писать $8{,}6 \cdot 10^{-5}$ м, вместо 21000 Н – число $2{,}1 \cdot 10^{4}$ Н или 21 кН и т.д.).

6. Так как числовые значения физических величин всегда бывают приближенными, то при расчетах необходимо округлять результат. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого превышает погрешность этой величины. Все остальные значащие цифры надо отбросить. Обычно при решении физических задач в окончательном ответе, считается достаточным оставлять три значащие цифры и обязательно указать единицы измерения результирующей величины.

7. Получив числовой ответ, нужно оценить его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

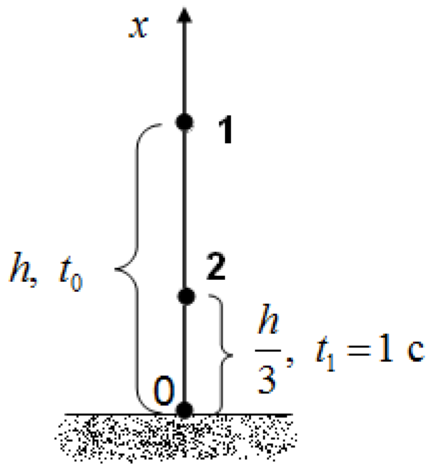
Основные понятия: система отсчёта, траектория, путь, перемещение, радиус-вектор материальной точки, скорость, путевая скорость, ускорение материальной точки, тангенциальное и нормальное ускорение, центр кривизны и радиус кривизны траектории.

Контрольные вопросы

1. Что включает в себя понятие система отсчёта?
2. Что такое траектория движения, путь и перемещение материальной точки?
3. Каким соотношением связаны радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки?
4. Какой физический смысл имеет тангенциальное и нормальное ускорение? Как они связаны с полным ускорением?
5. Как определить путевую скорость материальной точки, если известна её мгновенная скорость?
6. Что такое радиус кривизны траектории и как он связан с нормальным ускорением тела?
7. Как определить тангенциальное ускорение, если известен закон изменения путевой скорости тела?

Примеры решения задач

Задача 1. Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло 1/3 своего пути. Найти время падения и высоту, с которой упало тело. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Введём систему отсчёта для описания движения тела. Пусть точка отсчёта совпадает с поверхностью земли, а ось OX направлена вертикально вверх. Отсчёт времени начинается с момента начала движения тела. Оно будет двигаться вниз только под действием силы тяжести. Поэтому, ускорение тела будет постоянным и равным ускорению свободного падения g = 9,8 м/с^2. За h и t_0 обозначим высоту, с которой упало тело, и время падения соответственно. Для решения задачи воспользуемся формулой зависимости координаты тела $x(t)$ при равнопеременном движении:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.1)$$

В условиях задачи начальная скорость $V_{0x} = 0$. В выбранной системе отсчёта начальная координата тела $x_0 = h$, а проекция ускорения на ось OX $a_x = -g$.

С учётом этих условий запишем уравнение движения (1.1):

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.2}$$

В момент касания о землю при $t = t_0$, координата $x(t_0) = 0$. Отсюда

$$h = \frac{gt_0^2}{2}. \tag{1.3}$$

Аналогично запишем для точки **2**, которая находится на расстоянии 1/3 пути до поверхности $x(t_2) = h/3$:

$$\frac{2h}{3} = \frac{gt_2^2}{2}, \tag{1.4}$$

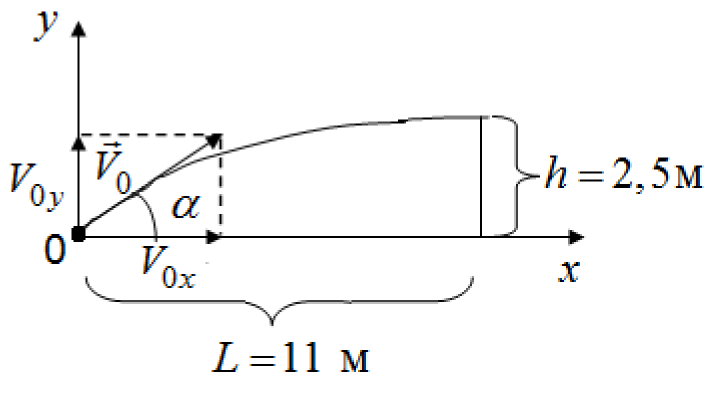
где t_2 – время, за которое тело проходит путь от точки **1** до точки **2**. По условию задачи: $t_0 - t_2 = t_1 = 1$ с. Подставим формулу (1.3) в (1.4) и, с учетом выражения для t_2, получим:

$$t_0^2 - 6t_0 + 3 = 0 \tag{1.5}$$

Решая это уравнение, найдем, что $t_0 = 5{,}45$ с, а высоту падения получим из (1.3): $h = 146$ м.

Ответ: Время падения 5,45 с. Высота, с которой упало тело, равна 146 м.

Задача 2. Футболист забивает гол с 11-метрового штрафного удара (L) точно под перекладину. Какую минимальную скорость в этом случае необходимо сообщить мячу? Под каким углом α должен был вылететь мяч? Высота ворот $h = 2{,}5$ м.



Решение. Введем систему отчета согласно рисунку. В начальный момент времени мяч начинает двигаться под углом α к горизонту. Очевидно, что минимальная скорость, которую необходимо сообщить мячу, чтобы забить гол точно под перекладину соответствует случаю, когда мяч на расстоянии L от места удара находится в наивысшей точке полета ($h = 2{,}5$ м).

Единственная сила, действующая на мяч во время полёта это сила тяжести, направленная вертикально вниз. Поэтому движение мяча по горизонтали вдоль оси OX будет равномерным, а по вертикали вдоль оси OY – равнопеременным. Опишем движение тела в выбранной системе отсчёта:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t\,; \qquad y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,. \tag{2.1}$$

Учтём начальные координаты мяча $x_0 = y_0 = 0$, проекции начальной скорости $V_{0x} = V_0\cos\alpha$, $V_{0y} = V_0\sin\alpha$, проекцию ускорения $a_y = -g$.

Проекция скорости на ось OY равномерно изменяется во времени:

$$V_y(t) = V_{0y} + a_y t\,. \tag{2.2}$$

Время полёта мяча до перекладины обозначим t_0. Для момента попадания мяча в перекладину запишем уравнения движения (2.1) и (2.2):

$$x(t_0) = V_0 t_0 \cos\alpha = L\,, \tag{2.3}$$

$$y(t_0) = V_0 t_0 \sin\alpha - \frac{g t_0^2}{2} = h\,, \tag{2.4}$$

$$V_y(t_0) = V_0 \sin\alpha - g t_0 = 0\,. \tag{2.5}$$

В системе уравнений (2.3), (2.4) и (2.5) 3 неизвестные – t_0, V_0, α. Решая эту систему, получаем:

1) время полёта мяча $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2\cdot 2{,}5/9{,}8} \approx 0{,}71\,\text{с}$,

2) начальную скорость $V_0 = \sqrt{(L/t_0)^2 + (g t_0)^2} \approx 17\,\text{м/с}$,

3) угол вылета $\alpha = \operatorname{arctg}(2h/L) \approx 24{,}4°$. Это выражение показывает, чтобы попасть мячом точно под перекладину надо целиться в точку, находящуюся на высоте вдвое выше высоты ворот.

Ответ: $V = 17$ м/с, $\alpha = 24{,}4°$.

Задача 3. Автомобиль движется по закруглённому шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 250$ м. Начальная скорость $V_0 = 40$ км/ч. За $\Delta t = 5$ с скорость автомобиля равномерно увеличивалась до $V_1 = 100$ км/ч. Найти ускорение автомобиля в момент времени $t = 2$ с от начала отсчёта времени.

Решение. Чтобы найти ускорение автомобиля необходимо найти нормальное и тангенциальное ускорение. Учитывая, что путевая скорость автомобиля равномерно увеличивалась, тангенциальное ускорение было постоянным в течение 5 с движения. Найдём его по формуле:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_1 - V_0}{\Delta t}.$$

Предварительно скорости надо перевести в м/с:

V_0 = 40/3,6 = 11,1 м/с, V_1 = 100/3,6 = 27,8 м/с.   Тогда a_τ = 3,33 м/с^2.

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

где V – путевая скорость автомобиля в момент времени t. Найдём её по формуле:

$$V = V_0 + a_\tau t = 17{,}8 \text{ м/с}.$$

Тогда a_n = 1,26 м/с^2. Полное ускорение :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3{,}56 \text{ м/с}^2.$$

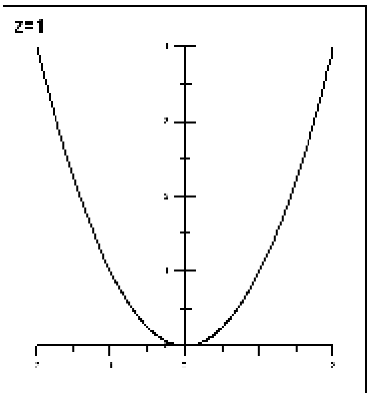
Ответ: $a = 3{,}56$ м/с^2.

Задача 4. Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + 4t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, м. Определить:

а) уравнение траектории частицы в явном виде;

б) скорость и ускорение частицы в момент времени t_0 = 2 с;

в) тангенциальное и нормальное ускорение частицы в этот же момент времени, а также радиус кривизны траектории R.



Решение. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные вектора, направленные вдоль осей x, y, z, соответственно. Запишем проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси x, y, z.

$$x = 2t; \quad y = 4t^2; \quad z = 1.$$

Исключая время, получим уравнение траектории. Траектория представляет собой параболу в плоскости $z = 1$

$$y = x^2 \qquad (4.1)$$

Для нахождения скорости возьмем первую производную от радиус-вектора по времени

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 8t\vec{j} \tag{4.2}$$

$$\vec{V}(t = t_0) = 2\vec{i} + 16\vec{j} \tag{4.3}$$

$$\left|\vec{V}\right| = V = \sqrt{2^2 + 16^2} \approx 16{,}1 \text{ м/с} \tag{4.4}$$

Для определения ускорения возьмём первую производную от скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 8\vec{j} \tag{4.5}$$

$$\left|\vec{a}\right| = a = 8 \text{ м/с}^2 \tag{4.6}$$

Найдем тангенциальное ускорение частицы. Для этого надо спроецировать ускорение $\vec{a}$ на направление скорости. Единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль скорости определяется следующим образом:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \tag{4.7}$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление скорости можно определить, используя скалярное произведение:

$$a_\tau = \left(\vec{a}, \vec{\tau}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{V}\right)}{V} = \frac{8\vec{j} \cdot \left(2\vec{i} + 16\vec{j}\right)}{16{,}1} = 7{,}95 \text{ м/с}^2 . \tag{4.8}$$

Здесь учтено, что $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = 0$ и $\left(\vec{j}, \vec{j}\right) = 1$.

Определим нормальное ускорение частицы по формуле:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{8^2 - 7{,}95^2} \approx 0{,}89 \text{ м/с}^2 . \tag{4.9}$$

Через нормальное ускорение определим радиус кривизны траектории

$$R = \frac{V^2}{a_n} \approx 291{,}2 \text{ м} . \tag{4.10}$$

Ответ: Уравнение траектории $y = x^2$ (парабола). $V = 16{,}1$ м/с, $a = 8$ м/с^2, $a_\tau = 7{,}95$ м/с^2, $a_n = 0{,}89$ м/с^2. Радиус кривизны траектории $R = 291{,}2$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи необходимо представить на проверку к следующему практическому занятию на отдельном листе. Условия задач не переписывать.

1.1. Свободно падающее тело прошло последние 30 м за 0,5 с. Найти высоту падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.2. Из орудия произведён выстрел под углом φ_0 к горизонту со скоростью $V_0 = 400$ м/с. Снаряд упал на расстоянии $x_c = 16$ км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить:

а) угол φ_0, под которым был произведён выстрел;

б) длительность полёта снаряда t_0;

в) максимальную высоту полёта h;

г) нормальное и тангенциальное ускорение, а также радиус кривизны траектории в наивысшей точке траектории;

д) нормальное и тангенциальное ускорение, а также радиус кривизны траектории в момент касания снаряда о землю.

1.3. Под углом $\alpha = 60°$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с. Через какое время оно будет двигаться под углом $\beta = 45°$ к горизонту? Определить тангенциальное и нормальное ускорение тела в этот момент времени. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.4. Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\vec{r} = 0,2\sin 2t \cdot \vec{i} + 0,2\cos 2t \cdot \vec{j} + 0,1t^2 \cdot \vec{k}$, м. Определить для момента времени $t_0 = 1$ с:

а) путевую скорость частицы;

б) модуль ускорения частицы;

в) тангенциальное ускорение;

г) нормальное ускорение;

д) радиус кривизны траектории.

1.5. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $r = 3$ м задаётся уравнением $s(t) = 0,4 \cdot t^2 + 0,1 \cdot t$. Определить для момента времени $t_0 = 2$ с полное, тангенциальное и нормальное ускорение тела.

1.6. Два пловца должны попасть из точки А на одном берегу реки в прямо противоположную точку В на другом берегу. Для этого один пловец решил переплыть реку по прямой АВ, другой же – все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние на которое его снесёт, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки В за одинаковое время, если скорость течения $V_0 = 2,0$ км/ч, и скорость каждого пловца относительно воды $V = 2,5$ км/ч?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

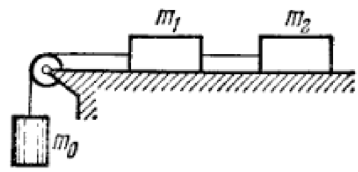
Основные понятия: инерциальная система отсчёта, масса тела, импульс тела, сила, поступательное движение твёрдого тела, центр масс.

Контрольные вопросы

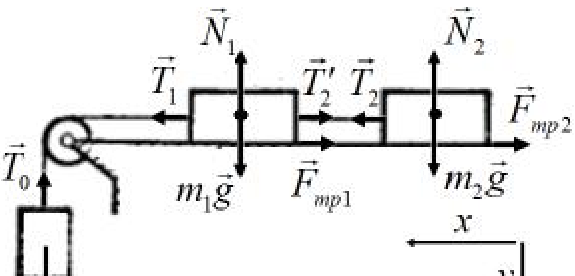
1. Какая система отсчёта называется инерциальной?
2. Как формулируется основная задача динамики?
3. Что такое масса тела и от чего она зависит?
4. Дать определение силы.
5. Сформулировать 3 закона Ньютона и закон всемирного тяготения.
6. Какова граница применимости законов Ньютона?
7. Какие силы относятся к категории фундаментальных?

Примеры решения задач

Задача 1. В установке на рисунке массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение a, с которым опускается тело m_0, и натяжение нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен μ. Исследовать возможные случаи.



Решение. Для решения задачи расставим все силы, действующие на тела, в данной задачи (см. рисунок). $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, $\vec{N}$ - сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения. Индексы **0**, **1**, **2** обозначают тело, на которое действует сила. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела.



Для тела **0**: $m_0\vec{a}_0 = m_0\vec{g} + \vec{T}_0$.

Для тела **1**: $m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2' + \vec{F}_{тр1} + \vec{N}_1$.

Для тела **2**: $m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр2} + \vec{N}_2$.

Запишем эту уравнений с учётом выбранного направления осей координат, согласно рисунку. Движения тела с массой m_0 будет происходит в направлении оси y, а движение тел **1** и **2** вдоль оси x. Вся система движется с ускорением $|\vec{a}|$. Причем $|\vec{T}_0| = |\vec{T}_1|$, $|\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2|$, тогда

$$m_0 a = m_0 g - T_1,\ m_1 a = T_1 - T_2 - F_{тр1},\ m_2 a = T_2 - F_{тр2}.$$

Сложим между собой эти три уравнения. Тогда получим искомое выражение для ускорения:

$$a = g\frac{m_0 - \mu\left(m_1 + m_2\right)}{m_0 + m_1 + m_2}. \tag{1.1}$$

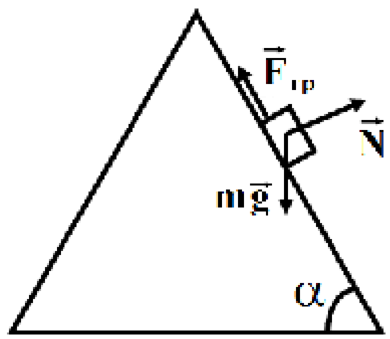
Подставив выражение для ускорения в исходную систему уравнений, находим T_2:

$$T_2 = \frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2}m_2 g\ . \tag{1.2}$$

Ответ: Ускорение, с которым движется тело **0**, определяется по формуле (1.1). Сила натяжения нити, связывающей тела m_1 и m_2, определяется по формуле (1.2). Из выражения для ускорения видно, что если $m_0 = \mu\left(m_1 + m_2\right)$, то ускорение будет равно 0. Если $m_0 < \mu\left(m_1 + m_2\right)$, то вес тела **0** будет недостаточным, чтобы вызвать скольжение тел **1** и **2**, тогда система будет находиться в покое.

Задача 2. Определить приближённое значение коэффициента трения песка о песок, если угол наклона горки, образовавшейся при осыпании песка, равен α.

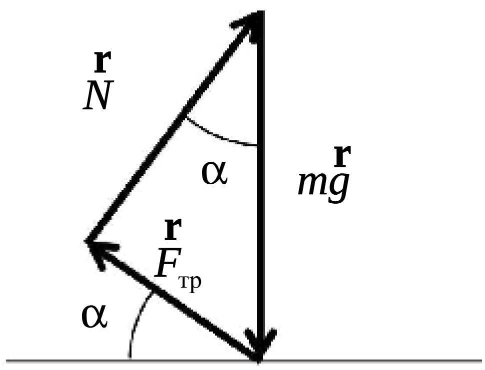
Решение. Рассмотрим элементарный объём (песчинку) и силы, действующие на него.



Выберем систему отсчёта, связанную с горкой. По условию задачи угол наклона горки при осыпании песка равен α. Это угол, при котором песчинка, находящаяся на поверхности горки ещё не скатывается, т.е. её ускорение равно 0, но положение её неустойчивое. Если наклон станет хотя бы немного больше, песчинка покатится вниз.

Учитывая, выше сказанное, запишем уравнение движения для песчинки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0\ ,$$



Значит сумма сил, действующих на песчинку, равна нулю. Поэтому при сложении эти силы образуют прямоугольный треугольник. Напомним, что тангенс угла равен отношению длины противолежащего катета к длине прилежащего. Из этого треугольника сил получаем:

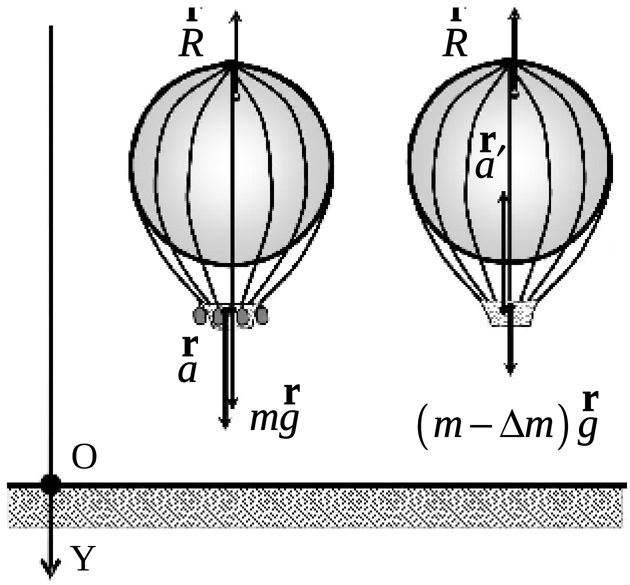
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{тр}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu\ .$$

Ответ: Приближённое значение коэффициента трения песка о песок – $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 3. Аэростат массой m начал опускаться с постоянным ускорением a. Определить массу балласта, который необходимо сбросить, чтобы аэростат получил такое же ускорение по направлению вверх.

Решение. Выберем систему отчета. Направим ось OY по направлению ускорения свободного падения. На аэростат действует сила притяжения $m\vec{g}$ направленная вниз (вдоль оси OY) и подъёмная (архимедова) сила $\vec{R}$. Запишем второй закон Ньютона для нашей задачи:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}.$$



В проекции на ось OY:

$$ma = mg - R.$$

За Δm обозначим массу балласта, который необходимо сбросить. После того как сбросили балласт уравнение примет вид:

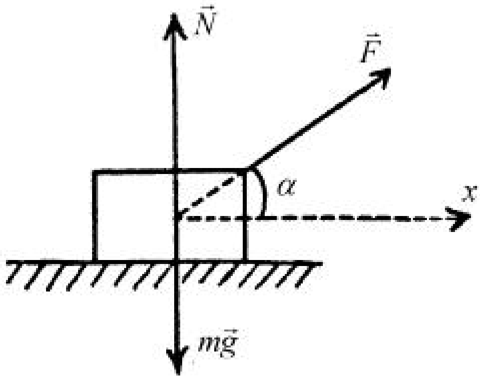
$$(m-\Delta m)a' = (m-\Delta m)g - R.$$

Проекции ускорений связаны выражением: $a' = -a$. Исключая R из этих выражений, получаем

ответ: $\Delta m = 2ma/(g+a)$.

Задача 4. К бруску массой m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. По мере его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняются по закону $\alpha = kS$, где k – постоянная, S – пройденный путь. Найти скорость бруска как функцию угла α, полагая, что в начале движения он покоился. Определить его максимальную скорость.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для этого тела: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$.



Спроецируем векторное выражение на ось OX:

$$ma = F\cos\alpha.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$ma = m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dS}\frac{dS}{dt} = mV\frac{dV}{dS}.$$

Подставляя это в уравнение, получаем: $mV\dfrac{dV}{dS} = F\cos(kS)$; $F\cos(kS)\,dS = mV\,dV$.

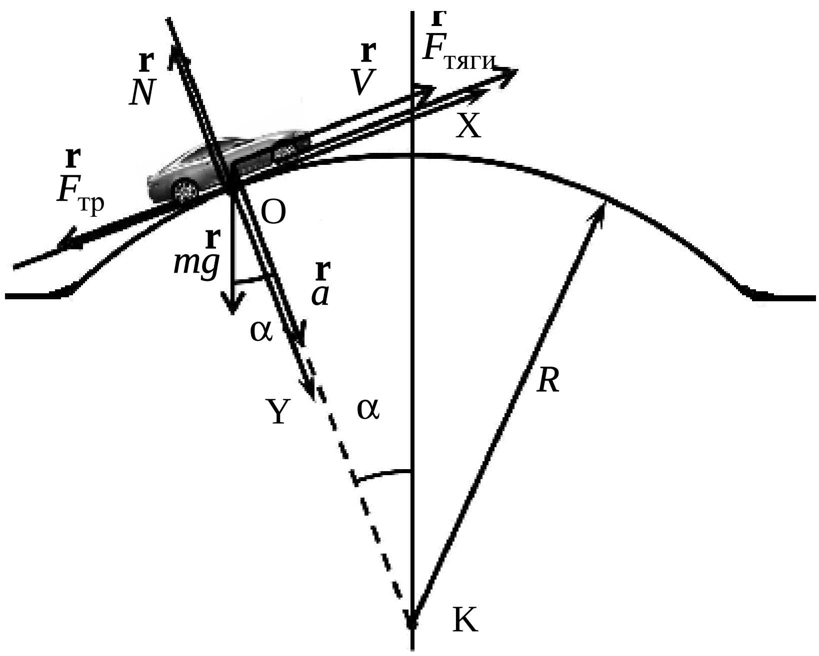
Проинтегрируем уравнение:

$$\int_0^S F\cos(kS')\,dS' = \int_0^V mV'dV'; \quad \frac{F}{k}\sin(kS) = \frac{mV^2}{2}.$$

Тогда $V(\alpha) = \sqrt{2F\sin\alpha / mk} = \sqrt{2g\sin\alpha / 3k}$. Максимальная скорость будет достигнута при $\alpha = 90^\circ$. Отсюда $V_{\max} = \sqrt{2g/3k}$.

Ответ: $V(\alpha) = \sqrt{2g\sin\alpha / 3k}$; $V_{\max} = \sqrt{2g/3k}$.

Задача 5. Автомобиль массой $m = 3$ т движется равномерно со скоростью $V = 7$ м/с по выпуклому мосту, радиус кривизны которого $R = 40$ м. С какой силой давит автомобиль на мост в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью? Какую силу тяги развивает в этот момент двигатель автомобиля? Коэффициент трения между шинами автомобиля и асфальтом $\mu = 0,2$.



Решение. Введём систему отсчёта XOY, связанную с мостом. Такая система отсчёта будет инерциальной, поэтому для решения воспользуемся II законом Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_{\text{тр}}. \qquad (5.1)$$

Поскольку автомобиль движется равномерно по мосту, то его тангенциальное ускорение равно нулю, а нормальное ускорение равно полному:

$$a = a_n = \frac{V^2}{R}. \qquad (5.2)$$

Спроецируем векторное выражение (5.1) на оси выбранной системы координат с учётом (5.2):

$$\text{OX:} \quad 0 = -mg\sin\alpha + F_{\text{тяги}} - F_{\text{тр}}; \qquad (5.3)$$

$$\text{OY:} \quad m\frac{V^2}{R} = mg\cos\alpha - N; \qquad (5.4)$$

Сила трения: $F_{\text{тр}} = \mu N$. (5.5)

Сила, с которой автомобиль давит на мост, называется вес P. Согласно III закону Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$, а по модулю эти силы равны. Тогда из (5.4) получаем:

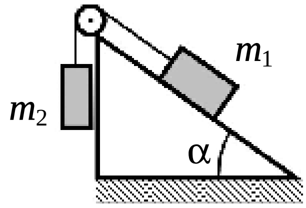
$$P = N = mg\cos\alpha - m\frac{V^2}{R} = 21800\ \text{Н}. \qquad (5.6)$$

Силу тяги автомобиля находим из (5.3), (5.5) и (5.6):

$$F_{\text{тяги}} = mg\sin\alpha + \mu N = 19100\ \text{Н}. \qquad (5.7)$$

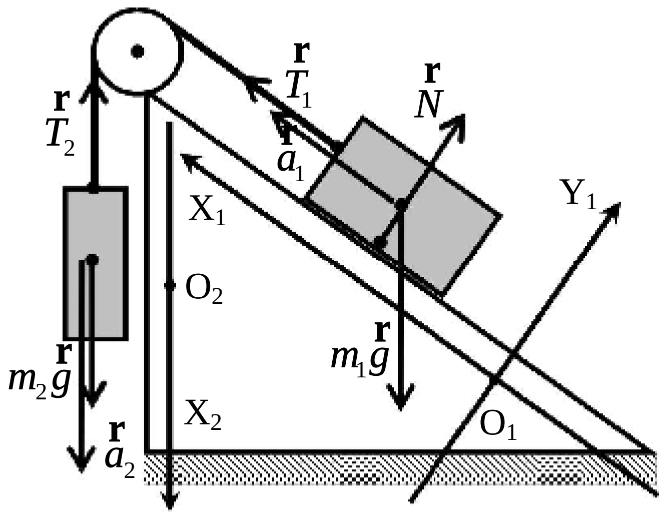
Ответ: вес автомобиля в заданной точке 21,8 кН, сила тяги – 19,1 кН.

Задача 6. На наклонной плоскости находится груз массой m_1 = 5 кг, связанный нитью, перекинутой через лёгкий блок, с другим грузом массой m_2 = 2 кг. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен μ = 0,05, угол наклона плоскости α = 30º. Определить: 1) ускорения грузов, 2) минимальное значение коэффициента трения μ_{min}, при котором система будет находиться в состоянии равновесия.



Решение. Для того чтобы определить ускорения грузов надо знать силы, действующие на них. Неизвестной является сила трения скольжения первого груза, поскольку она зависит от направления движения тела, и всегда направлена против вектора скорости. Поэтому сначала надо установить, куда будут двигаться тела. Для этого сначала решим задачу без учёта силы трения.

Для описания движения грузов введём две инерциальные системы отсчёта, связанные с горкой: $O_1X_1Y_1$ и O_2X_2. Запишем II закон Ньютона для каждого из тел:



$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1; \qquad (6.1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (6.2)$$

Так как нить нерастяжима, модули ускорений тел совпадают: $a = a_1 = a_2$. Кроме того, сила натяжения нити одинакова по всей длине ($T = T_1 = T_2$), поскольку блок, через который она перекинута лёгкий, а момент силы трения в оси не учитываем. Спроецируем на оси систем координат векторные уравнения (6.1) и (6.2):

$$O_1X_1: \quad m_1 a = -m_1 g\sin\alpha + T; \qquad (6.3)$$

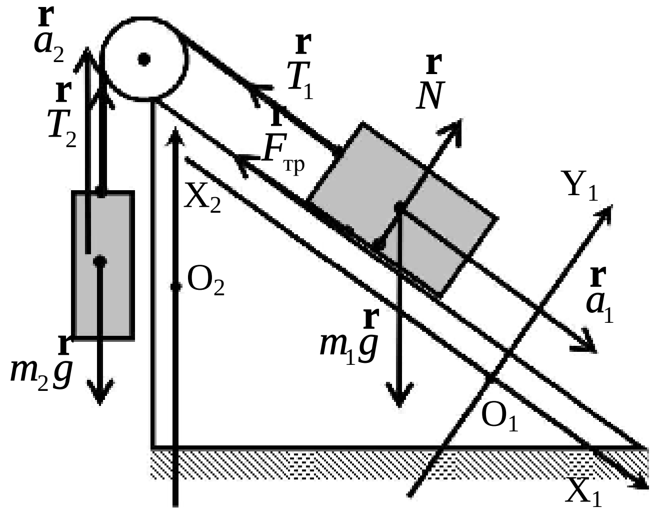
$$O_2X_2: \quad m_2 a = m_2 g - T. \qquad (6.4)$$

Ускорение тел без учёта силы трения найдём из (6.3) и (6.4):

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} = -0,71\,\text{м/с}^2\,. \tag{6.5}$$

Проекция ускорения отрицательная значит, первое тело может двигаться вниз, а второе – вверх, если сила трения не будет слишком большой, чтобы их затормозить.

Теперь учтём силу трения, которая, как следует из предыдущих рассуждений, будет действовать вверх вдоль наклонной плоскости. Удобно перенаправить оси координат, чтобы проекции ускорений тел были положительными в случае их скольжения.



$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}\,; \tag{6.6}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2\,. \tag{6.7}$$

Спроецируем на оси систем координат векторные уравнения (6.6) и (6.7):

O_1X_1: $m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - F_{тр}$; (6.8)

O_2X_2: $m_2 a = -m_2 g + T$; (6.9)

O_1Y_1: $0 = -m_1 g \cos\alpha + N$. (6.10)

Если происходит скольжение тела по наклонной плоскости, то сила трения равна $F_{тр} = \mu N$. Решая систему уравнений (6.8), (6.9) и (6.10), получаем:

$$a = g\,\frac{m_1 \sin\alpha - m_2 - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0,40\,\text{м/с}^2\,. \tag{6.11}$$

Ускорение тел получилось положительным, значит, первое тело будет скользить вниз. Заметим, что сила трения не может изменить направление движения тела на противоположное, она может только уменьшить его ускорение или затормозить тело совсем.

Чтобы найти минимальный коэффициент трения, при котором скольжения не будет, надо положить $a = 0$ в уравнении (6.11):

$$g\,\frac{m_1 \sin\alpha - m_2 - \mu_{\min} m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0\,. \tag{6.12}$$

Отсюда:

$$\mu_{\min} = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 \cos\alpha} = 0,12\,. \tag{6.13}$$

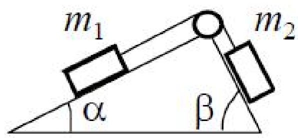
Ответ: ускорения тел равны 0,4 м/с^2, $\mu_{\min} = 0,12$.

Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи необходимо представить на проверку к следующему практическому занятию на отдельном листе. Условия задач не переписывать.

2.1. Автомобиль массой m = 2 т движется равномерно со скоростью V = 10 м/с по вогнутому мосту, радиус кривизны которого R = 50 м. С какой силой давит автомобиль на мост в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол α = 30° с вертикалью? Какую силу тяги развивает в этот момент двигатель автомобиля? Коэффициент трения между шинами автомобиля и асфальтом μ = 0,3.

2.2. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих углы α = 15° и β = 45°, укреплён блок. Грузы с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. В начальный момент времени грузы были неподвижны. Коэффициенты трения между грузами и плоскостями одинаковы и равны μ. Определить: 1) ускорения грузов при μ = 0,05, 2) ускорения грузов при μ = 0,1, 3) минимальное значение коэффициента трения μ_{min}, при котором система будет находиться в состоянии равновесия.



2.3. Самолет делает «мертвую петлю». Радиус мертвой петли $R = 500$ м. Скорость самолета $V = 360$ км/ч постоянна. Найти вес лётчика массой $m = 70$ кг в нижней, верхней и средней точках петли.

2.4.* Небольшое тело начинает соскальзывать с вершины клина, основание которого l = 2,1 м. Коэффициент трения между телом и поверхностью клина μ = 0,14. При каком значении угла α (у основания клина) время соскальзывания будет наименьшим? Чему оно равно?

2.5.* Автомобиль движется равномерно по горизонтальному пути, имеющему форму синусоиды $y = a\sin(x/\alpha)$, где a и α – некоторые постоянные. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ. При какой скорости движение автомобиля происходить без скольжения?

2.6.* На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = at$, где a - постоянная. Найти зависимости от t ускорение доски и бруска, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ.

---

* – дополнительные задачи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Основные понятия: Импульс тела, импульс силы, механическая система, импульс механической системы, центра масс системы, однородность пространства, замкнутая механическая система.

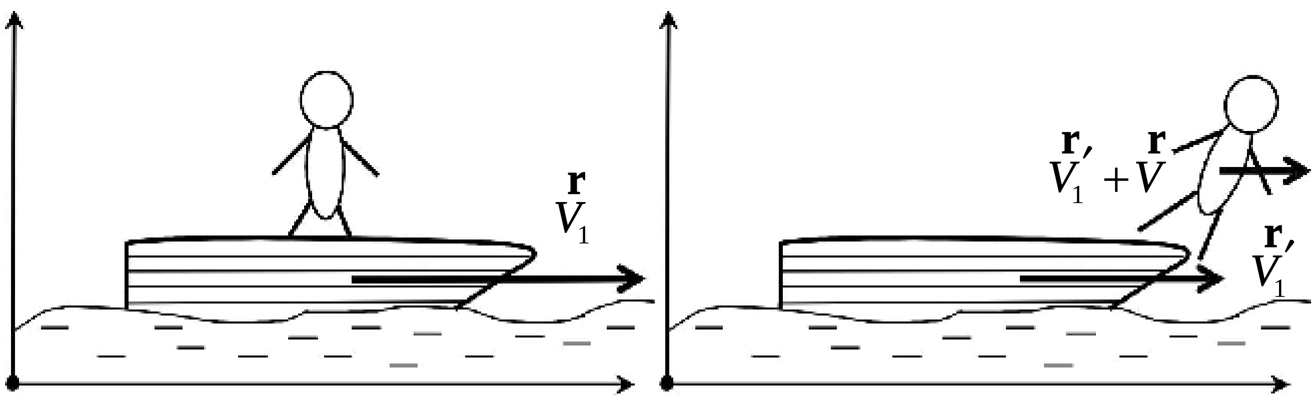
Контрольные вопросы

1. Что такое импульс силы?
2. Как определить импульс механической системы?
3. Какая связь между импульсом силы, подействовавшим на механическую систему, и изменением её импульса?
4. Сформулировать закон сохранения импульса механической системы.
5. Какова связь закона сохранения импульса с однородностью пространства?
6. Чем отличается замкнутая (изолированная) механическая система от открытой?
7. В каких системах отсчёта выполняется закон сохранения импульса?
8. Как определить радиус-вектор, скорость и ускорение движения центра масс механической системы?

Примеры решения задач

Задача 1. В лодке массой $m_1 = 240$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Лодка плывёт со скоростью $V_1 = 2$ м/с. Человек прыгает с лодки вперёд по движению лодки в горизонтальном направлении со скоростью $V = 4$ м/с (относительно лодки). Найти скорость U движения лодки после прыжка человека.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для нашей задачи в системе отсчёта, связанной с берегом. При этом учтём, что человек прыгает горизонтально со скоростью $V = 4$ м/с относительно лодки.



$$(m_1 + m_2)\vec V_1 = m_1\vec V_1' + m_2\left(\vec V + \vec V_1'\right). \qquad (1.1)$$

Отсюда получим выражение для скорости лодки после прыжка человека:

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}. \qquad (1.2)$$

В проекции на горизонталь скорость лодки относительно берега после прыжка человека равна:

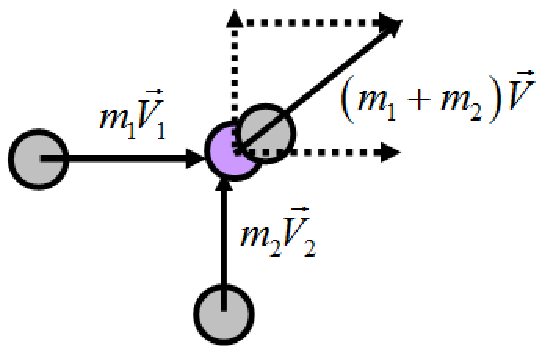
$$V_1' = V_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}V = 2 - \frac{60}{300}\cdot 4 = 1{,}2 \text{ м/с}. \qquad (1.3)$$

Ответ: $V_1' = 1{,}2$ м/с, направление движения лодки не изменилось.

Задача 2. Два шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг двигаются перпендикулярно друг к другу со скоростями $V_1 = 8$ м/с и $V_2 = 4$ м/с соответственно. Определить увеличение внутренней энергии ΔU шаров при их неупругом столкновении.

Решение. Запишем закон сохранения импульса (см. рисунок):

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}. \qquad (2.1)$$



По условию задачи столкновения двух шаров является неупругим, т.е. после соударения шары двигаются вместе. Из рисунка видно, что квадрат импульса после возведения равен сумме квадратов импульсов до взаимодействия:

$$m_1^2V_1^2 + m_2^2V_2^2 = (m_1+m_2)^2V^2. \qquad (2.2)$$

Отсюда скорость шаров после их неупругого столкновения равна:

$$V = \frac{\sqrt{m_1^2V_1^2 + m_2^2V_2^2}}{m_1+m_2} = 4 \text{ м/с}. \qquad (2.3)$$

По закону сохранения энергии в замкнутой системе энергия сохраняется. Энергия до взаимодействия (кинетическая энергия шаров) равна энергии после взаимодействия, которая складывается из кинетической движения шаров как одной системы и приращения их внутренней энергии:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)V^2}{2} + \Delta U. \qquad (2.4)$$

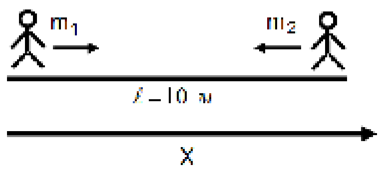
Отсюда найдем ΔU:

$$\Delta U = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2, \qquad (2.5)$$

$$\Delta U = 64 + 24 - 40 = 48 \text{ Дж}. \qquad (2.6)$$

Ответ: $\Delta U = 48$ Дж.

Задача 3. Плот массой $M = 400$ кг и длиной $l = 10$ м стоит в неподвижной воде. Два мальчика массами $m_1 = 60$ кг и $m_2 = 40$ кг, стоящие на противоположных концах плота, одновременно начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковой скоростью относительно плота и останавливаются при встрече. На какое расстояние сместится плот?



Решение. Поскольку мальчики начинают двигаться одновременно навстречу друг другу с одинаковой скоростью, они встретятся на середине плота, пройдя путь $s = 5$ м. Время их движения – Δt. Тогда скорость мальчиков относительно плота $V_м = s/\Delta t$. За это время плот сместится на δ относительно своего начального положения, а его скорость $V = \delta/\Delta t$. Выберем систему отсчёта, связанную с берегом. В этой системе отсчёта импульс всей механической системы, состоящей из двух мальчиков и плота, равен нулю, т.к. вначале все тела покоились. Эта механическая система является замкнутой, потому что сумма всех внешних сил равна нулю. Значит можно применить закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + M\vec{V} = 0, \quad (3.1)$$

где $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ – скорость плота и мальчиков относительно берега соответственно. В проекции на горизонтальное направление выражение (3.1) можно записать следующим образом:

$$m_1(V + V_м) + m_2(V - V_м) + MV = 0. \quad (3.2)$$

Здесь применён закон сложения скоростей для определения скоростей мальчиков относительно берега. Откуда получаем выражение для скорости движения плота:

$$V = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} V_м. \quad (3.3)$$

Отсюда:

$$\frac{\delta}{\Delta t} = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} \cdot \frac{s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \delta = s \cdot \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} = -0,2 \text{ м}. \quad (3.4)$$

Знак «– » означает, что плот сместится против оси x.

Ответ: плот сместится на 0,2 м влево.

Задача 4. Автомат выпускает $n = 600$ пуль в минуту. Масса каждой пули $m = 4$ г, а её начальная скорость $V = 500$ м/с. Необходимо найти среднюю силу отдачи F при стрельбе.

Решение. Автомат выпускает 1 пулю за $\Delta t = 0,1$ с. Каждая пуля получает импульс mV. Тогда, по закону сохранения импульса автомат за каждый промежуток времени Δt получает импульс равный по величине, но противоположного направления. Импульс силы $\vec{I}$, который получает автомат при выстреле одной пули, равен приращению импульса автомата mV:

$$F\Delta t = mV .$$

Тогда

$$F = \frac{mV}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 500}{0{,}1} = 20 \text{ Н} .$$

Ответ: средняя сила отдачи 20 Н.

Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи необходимо представить на проверку к следующему практическому занятию на отдельном листе. Условия задач не переписывать.

3.1. Частица массой $m_1 = 1$ г, двигавшаяся со скоростью $\vec{V}_1 = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}$ (м/с), испытала абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой $m_2 = 2$ г и скорость $\vec{V}_2 = \vec{i} - 9 \cdot \vec{j}$ (м/с). Найти скорость $\vec{V}$ образовавшейся частицы.

3.2. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью $V = 100$ м/с, разрывается на две равные части на высоте $h = 40$ м. Одна часть падает через $t_0 = 1$ с на землю точно под местом взрыва. На каком расстоянии (по горизонтали) и через какое время упадёт вторая часть снаряда?

3.3. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабжённой лёгкими колёсами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 60$ кг, масса доски $m = 20$ кг. На какое расстояние передвинется тележка, если человек перейдёт на другой конец доски? На какое расстояние s передвинется человек относительно пола? Длина доски $l = 2$ м.

3.4. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту в направлении пути. С какой скоростью V_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $V_2 = 600$ м/с?

3.5. Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки во встречную перебрасывается мешок массой $m = 50$ кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет со скоростью $V = 8{,}5$ м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны $M_1 = 500$ кг и $M_2 = 1000$ кг соответственно?

3.6. Тело массой $m = 0{,}2$ кг брошено под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 5$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы $\vec{I}$, действующий на тело во время его полёта; 2) изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время его полёта.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Основные понятия: Работа силы, мощность, энергия как универсальная мера движения и взаимодействия, кинетическая энергия механической системы, связь кинетической энергии с работой внешних и внутренних сил, консервативные и диссипативные силы, потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле, закон сохранения механической энергии, абсолютно упругий удар, абсолютно неупругий удар.

Контрольные вопросы

1. Как определяется работа силы?
2. Что такое энергия, и какие существуют виды энергии?
3. Какова связь кинетической энергии с работой внешних и внутренних сил?
4. Какие силы называются консервативными и диссипативными?
5. Что такое механическая энергия тела?
6. Сформулируйте закон сохранения механической энергии?
7. Какой удар тел называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим?

Примеры решения задач

Задача 1. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $V = B\sqrt{S}$, где B - постоянная; S - пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии.

$$A = \Delta E_k = \frac{mV_k^{\,2}}{2}. \qquad (1.1)$$

Здесь учтено, что начальная кинетическая энергия локомотива равна нулю. Чтобы найти конечную скорость, запишем выражение для скорости в виде:

$$V = \frac{dS}{dt} = B\sqrt{S}\,, \qquad \int_0^{S_0} \frac{dS}{\sqrt{S}} = B\int_0^{t_0} dt\,, \qquad (1.2)$$

где S_0 – путь, пройденный локомотивом за время t_0 от начала движения. Отсюда:

$$2\sqrt{S_0} = Bt_0, \qquad V_k = B\sqrt{S_0} = B^2 t_0/2\,. \qquad (1.3)$$

Теперь можно записать выражение для работы:

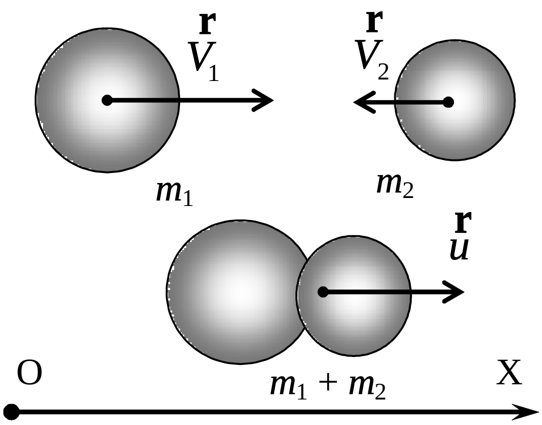
$$A = mB^4 t_0^{\,2}/8\,. \qquad (1.4)$$

Ответ: $A = mB^4 t_0^{\,2}/8$.

Задача 2. Два шара массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Определить: 1) скорость шаров u после удара; 2) кинетические энергии шаров E_{k1} до и E_{k2} после удара; 3) коэффициент восстановления энергии. Удар считать прямым, абсолютно неупругим.

Решение. 1) Неупругие шары не восстанавливают после удара своей первоначальной формы. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса. Так как шары движутся по одной прямой, то этот закон можно записать в скалярной форме:

$$m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)u\,. \qquad (2.1)$$



Откуда:

$$u = (m_1V_1 - m_2V_2)/(m_1 + m_2)\,. \qquad (2.2)$$

Направление скорости первого шара принято за положительное.

2) Кинетические энергии шаров до и после удара определяем по формулам:

$$E_{k1} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}, \quad E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (2.3)$$

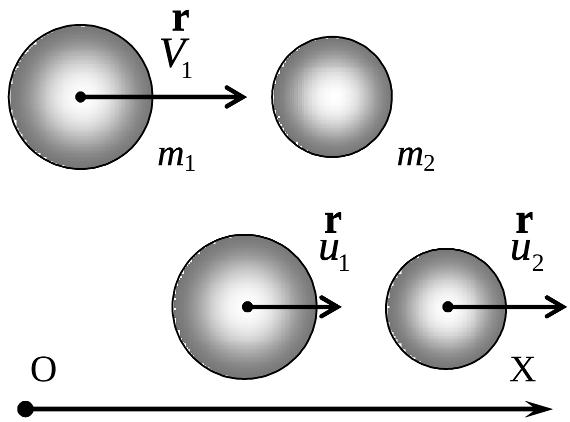
3) Коэффициент восстановления энергии это доля механической энергии, сохранившейся в системе после удара тел:

$$k = E_{k2}/E_{k1}\,. \qquad (2.4)$$

Ответ: $u = \dfrac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2}$, $E_{k1} = \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2}$, $E_{k2} = \dfrac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$, $k = \dfrac{E_{k2}}{E_{k1}}$.

Задача 3. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю w своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:



$$w = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{m_2u_2^2/2}{m_1V_1^2/2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{V_1}\right)^2, \qquad (3.1)$$

где E_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и E_2' – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы, для определения w надо найти u_2. Воспользуемся тем, что при ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: импульса и механической энергии. По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, получаем:

$$m_1V_1=m_1u_1+m_2u_2. \tag{3.2}$$

По закону сохранения энергии в механике:

$$\frac{m_1V_1^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{3.3}$$

Решая совместно два последних уравнения, находим:

$$u_2=\frac{2m_1V_1}{m_1+m_2}. \tag{3.4}$$

Подставляя это выражение u_2 в выражение для энергии, получаем:

$$w=\frac{4m_1m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2}. \tag{3.5}$$

Из этого соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Ответ: $w=\dfrac{4m_1m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2}$.

Задача 4. Молот массой m_1 = 200 кг падает на поковку, масса m_2 которой вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость V_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти: 1) кинетическую энергию E_1 молота в момент удара; 2) энергию E_2, переданную фундаменту; 3) энергию E, затраченную на деформацию поковки; 4) коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о поковку. Удар молота о поковку рассматривать как абсолютно неупругий.

Решение. 1) Кинетическую энергию молота в момент удара найдём по формуле:

$$E_1=m_1V_1^2/2=400\text{ Дж}. \tag{4.1}$$

2) Чтобы определить энергию, переданную фундаменту, предварительно найдем скорость системы «молот + поковка (с наковальней)» непосредственно после удара. Для этого применим закон сохранения импульса в проекции на вертикальное направление, который в случае абсолютно неупругого удара двух тел выражается формулой:

$$m_1V_1+m_2V_2=(m_1+m_2)u, \tag{4.2}$$

где V_2 – скорость поковки (вместе с наковальней) перед ударом; u – скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара. Так как поковка с наковальней до удара находилась в состоянии покоя, то $V_2 = 0$. При абсолютно неупругом ударе деформация не восстанавливается, вследствие чего молот и поковка (с наковальней) движутся как одно целое, т. е. с одинаковой скоростью u. Из выражения (4.2) найдем:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 . \qquad (4.3)$$

В результате сопротивления фундамента скорость u быстро гасится, а кинетическая энергия, которой обладает система «молот + поковка (с наковальней)», передается фундаменту. Эту энергию определим по формуле:

$$E_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} V^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_1 = 30 \text{ Дж.} \qquad (4.4)$$

3) Молот до удара обладал энергией E_1, а энергия, переданная фундаменту E_2. Следовательно, на деформацию поковки использовалась энергия:

$$E = E_1 - E_2 = 370 \text{ Дж.} \qquad (4.5)$$

4) Назначение молота – путём совершения ударов о поковку, находящуюся на наковальне, вызвать деформацию поковки. Следовательно, энергию E следует считать полезной. КПД удара молота η о поковку равен отношению энергии E, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии E_1:

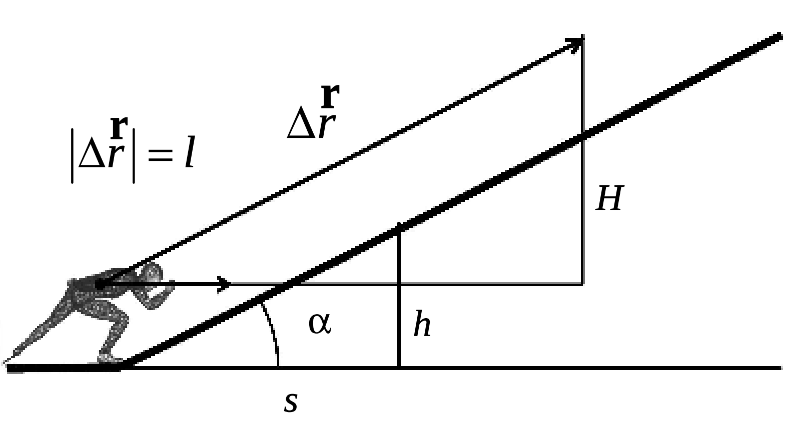
$$\eta = \frac{E}{E_1} = 0{,}925 = 92{,}5\%. \qquad (4.6)$$

Ответ: $E_1 = 400$ Дж, $E_2 = 30$ Дж, $E = 370$ Дж, $\eta = 92{,}5\%$.

Задача 5. Конькобежец, разогнавшись до скорости $V = 27$ км/ч, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня поднимется конькобежец с разгона, если подъём горы составляет $h = 0{,}5$ м на каждые $s = 10$ м по горизонтали и коэффициент трения коньков о лёд $\mu = 0{,}02$?

Решение. Рассмотрим движение конькобежца в системе отсчёта, связанной с ледяной горой. Относительно начального уровня он поднимется на высоту H, при этом конькобежец проедет по горе путь l, причём

$$l = \frac{H}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{s}{h}. \qquad (5.1)$$



Во время его скольжения вверх по ледяной горе на него действовали сила тяжести $m\vec{g}$, трения $\vec{F}_{тр}$, и реакции опоры $\vec{N}$. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (приращение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на него): $\Delta E_k = A$. Учтём, что конечная кинетическая энергия конькобежца равна нулю, а работу совершают только сила тяжести и сила трения:

$$0 - \frac{mV^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}\,. \tag{5.2}$$

Сила тяжести является консервативной, поэтому её работа равна приращению потенциальной энергии тела с обратным знаком:

$$A_{\text{тяж}} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = 0 - mgH\,. \tag{5.3}$$

Работа силы трения всегда отрицательная, т.к. угол между вектором скорости тела и силой равен 180°:

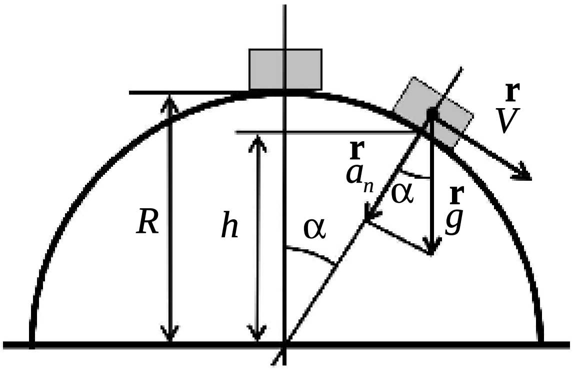
$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= F_{\text{тр}} l \cos 180^\circ = -\mu N l = -\mu mg\cos\alpha \cdot l = \\ &= -\mu mg\cos\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = -\mu mgH \cdot \operatorname{ctg}\alpha = -\mu mgH \cdot \frac{s}{h}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Подставим (5.3) и (5.4) в (5.2):

$$\frac{mV^2}{2} = mgH + \mu mgH \cdot \frac{s}{h}, \qquad H = \frac{V^2}{2g\left(1+\mu\, s/h\right)} = 2{,}05\text{ м}. \tag{5.5}$$

Ответ: Конькобежец поднимется на высоту 2,05 м по ледяной горке.

Задача 6. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющей форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвётся от поверхности купола? Трением пренебречь.



Решение. Камешек массой m скользит по куполу и на него действуют только консервативные силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Поэтому его механическая энергия будет сохраняться во время движения:

$$mgR = mgh + mV^2/2\,, \qquad h = R\cos\alpha \tag{6.1}$$

В момент отрыва камешка от купола на него действует только сила тяжести, а реакция опоры становится равной нулю. Значит, ускорение камешка с этого момента будет равно ускорению свободного падения g, а нормальное ускорение a_n:

$$a_n = g\cos\alpha\,, \qquad V^2/R = g\cos\alpha\,. \tag{6.2}$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) получим: $\cos\alpha = 2/3$, α = 48,2°.

Ответ: камешек опишет дугу 48,2° по куполу до момента отрыва от него.

Задачи для самостоятельного решения

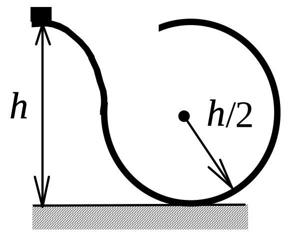
4.1. Под действием некоторой силы ускорение материальной точки массой m = 1 кг изменяется по закону: $a = B + Cs$, где B = 1 м/с^2, C = 2 с$^{-2}$. Определить работу, совершаемую этой силой, действующей в направлении перемещения, на пути s_1 = 2 м? Какова средняя мощность, развиваемая данной силой на пути s_1, если этот путь пройден за время t_1 = 3 с?

4.2. Ледяная горка составляет с горизонтом угол α = 10°. По ней пускают камень вверх, который, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Чему равен коэффициент трения скольжения, если начальная скорость камня в 2 раза больше его конечной скорости?

4.3. Молотком, масса которого M = 1 кг, забивают в стену гвоздь массой m = 75 г. Скорость молота в момент удара V = 10 м/с. Определить энергию, которая была затрачена на забивание гвоздя. Определить КПД удара молотка.

4.4. Пуля массой m = 10 г, летевшая со скоростью V = 600 м/с, попала в баллистический маятник массой M = 5 кг длиной l = 1 м и застряла в нём. На какую высоту h, откачнувшись после удара, поднялся маятник? Найти максимальный угол отклонения маятника α. Найти коэффициент восстановления энергии k при ударе пули.

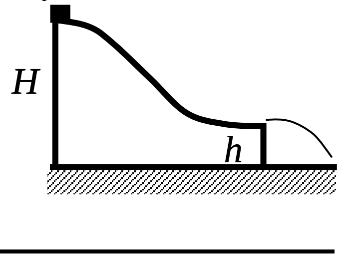
4.5. Частица массой m обладает импульсом $p_1 = 5\cdot10^{-20}$ кг·м/с. Определить, какой максимальный импульс p_2 может передать эта частица, сталкиваясь упруго с частицей массой $4m$, которая до соударения покоилась. Во сколько раз уменьшилась энергия первой частицы?



4.6. Небольшое тело начинает скользить с высоты h по наклонному жёлобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$. Пренебрегая трением, найти высоту, на которую поднимется тело в момент отрыва от жёлоба.

4.7. Прикреплённый к вертикальной пружине груз медленно опускают до положения равновесия, причём пружина растягивается на длину x_0. На сколько растянется пружина, если тому же грузу предоставить возможность свободно падать с такого положения, при котором пружина не растянута? Какой максимальной скорости достигнет при этом груз? Массой пружины пренебречь.

4.8.* Автомобиль массой m = 1200 кг способен на скорости V = 50 км/ч двигаться по дороге с наибольшим уклоном к горизонту равным α = 16°. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, равна P = 14,7 кВт. Найти максимальную мощность P_{max} двигателя.



4.9.* Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высоты H, имеющей горизонтальный трамплин высотой h. Какое расстояние s пролетит шайба после вылета с трамплина?

* – дополнительные задачи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные понятия: Угловой путь, угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение, их связь со скоростями и ускорениями точек вращающегося тела, момент инерции относительно оси, уравнение динамики вращательного движения, момент силы относительно оси и относительно полюса.

Контрольные вопросы

1. Что такое угловой путь, угловая скорость и угловое ускорение тела?
2. Какова связь между скоростью точки и её угловой скоростью вращения?
3. Как определяется момент инерции тела относительно оси?
4. Как можно определить момент инерции тела с использованием теоремы Штейнера?
5. Дайте определение понятий момент силы относительно оси и момент силы относительно полюса? Какова связь между ними?
6. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения?

Примеры решения задач

Задача 1. Диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс. Зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где A, B, C, D – известные константы. Для момента времени t_1 найти:

а) угловой путь, пройденный к этому моменту времени $\Delta\varphi_1$;

б) угловую скорость ω_1;

в) угловое ускорение ε_1.

г) Определить для точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения, полное ускорение в момент времени, когда тангенциальное ускорение равно нулю.

Решение. а) Угловой путь равен разности углов поворота при условии, что вращение происходит в одном направлении:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) = Bt + Ct^2 + Dt^3. \quad (1.1)$$

б) Угловая скорость в момент времени t определяется по формуле:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2. \quad (1.2)$$

в) Угловое ускорение определяем по формуле:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 2C + 6Dt. \quad (1.3)$$

г) Найдем для точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения, полное ускорение в момент времени t_2, когда тангенциальное ускорение равно нулю. Полное ускорение определяется формулой: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Так как тангенциальное ускорение равно нулю, то

$$a(t_2) = a_n(t_2) = \omega^2 r = \left(B + 2Ct_2 + 3Dt_2^2\right) r. \qquad (1.4)$$

Найдем момент времени t_2, когда $a_\tau(t_2) = 0$:

$$a_\tau(t_2) = \varepsilon(t_2) r = (2C + 6Dt_2) r = 0 \Rightarrow t_2 = -C/3D. \qquad (1.5)$$

Подставим полученное выражение (1.5) в (1.4), получим:

$$a(t_2) = \left(B - \frac{2C^2}{3D} + \frac{C^2}{3D}\right) r = \left(B - \frac{1}{3}\frac{C^2}{D}\right) r. \qquad (1.6)$$

Ответ: а) $\Delta\varphi(t_1) = Bt_1 + Ct_1^2 + Dt_1^3$; б) $\omega(t_1) = B + 2Ct_1 + 3Dt_1^2$;

в) $\varepsilon(t_1) = 2C + 6Dt_1$; г) $a(t_2) = \left(B - \frac{1}{3}\frac{C^2}{D}\right) r$.

Задача 2. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε вокруг неподвижной оси. За время t_0 оно изменило свою скорость от $\omega_0 = 31{,}4$ рад/с до $\omega_1 = 69{,}1$ рад/с, сделав $N = 240$ оборотов. Найти t_0 и ε.

Решение. Вращение колеса равноускоренное, следовательно, угловая скорость возрастает равномерно:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (2.1)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае угол поворота колеса изменяется по закону:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \text{т.к.} \quad \omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.2)$$

По условию задачи колесо сделало N оборотов. Это означает, что оно прошло угловой путь равный $\Delta\varphi = \varphi(t_0) - \varphi_0 = N \cdot 2\pi$. Угловое ускорение ε и время t_0 найдём путём решения системы уравнений:

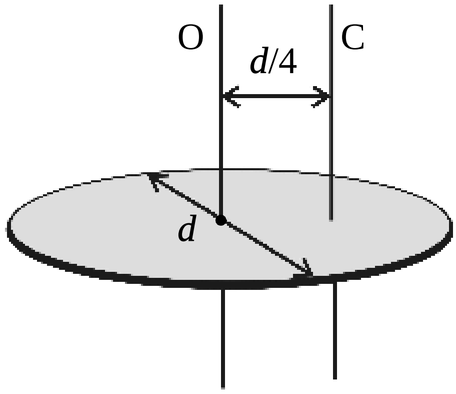
$$\Delta\varphi = 2\pi N = \omega_0 t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2}; \qquad \omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_0. \qquad (2.3)$$

Угловое ускорение взяли с положительным знаком, т.к. по условию задачи скорость вращения колеса возрастает. Из этой системы уравнений получим:

$$t_0 = \frac{4\pi N}{\omega_1 + \omega_0} = 30 \text{ с}, \qquad \varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_0} = 1{,}26 \text{ рад/с}^2. \qquad (2.4)$$

Ответ: $t_0 = 30$ с, $\varepsilon = 1{,}26$ рад/с^2.

Задача 3. Диаметр диска d = 20 см, масса m = 800 г. Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.



Решение. Воспользуемся теоремой Штейнера. Момент инерции тела относительно оси С определяется по формуле:

$$I_C = I_O + ma^2, \qquad (3.1)$$

где I_O – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и удалённой от оси С на расстояние a. Для диска радиусом R он равен:

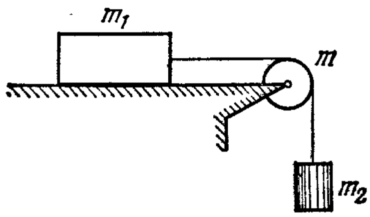
$$I_O = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}md^2. \qquad (3.2)$$

Тогда, по теореме Штейнера:

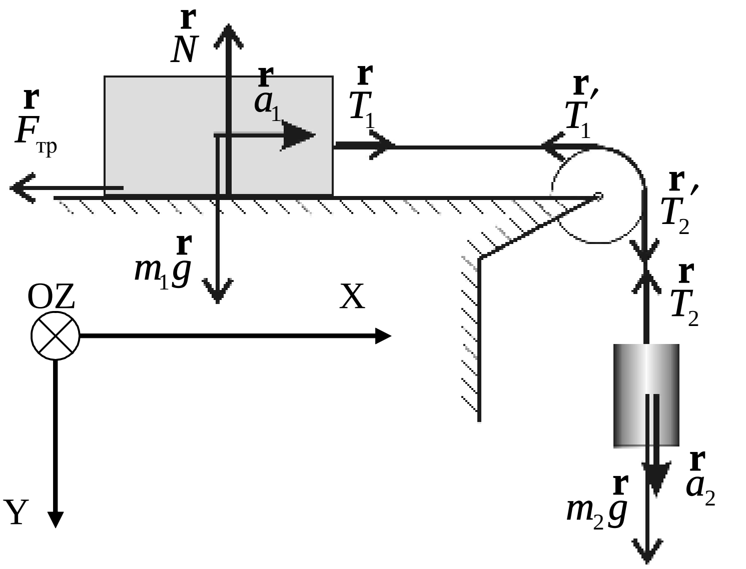
$$I_C = \frac{1}{8}md^2 + m\left(\frac{d}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}md^2 = 0,006\ \text{кг}\cdot\text{м}^2. \qquad (3.3)$$

Ответ: $I_C = 0,006\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 4. В системе, изображенной на рисунке, известны массы тел m_1 и m_2, масса блока m, коэффициент трения для груза m_1 равен μ. Скольжение нити по блоку нет. В начальный момент тело массой m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти ускорение, с которым опускается тело. Считать, что блок имеет форму диска.



Решение. Расставим все силы, действующие на тела, в данной задачи, где $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, $\vec{N}$ - сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения. Запишем второй закон Ньютона для тел 1 и 2:



$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}, \qquad (4.1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (4.2)$$

Спроецируем эти векторные уравнения на оси системы координат:

$$\text{OX:} \quad m_1 a = T_1 - \mu N; \tag{4.3}$$

$$\text{OY:} \quad 0 = m_1 g - N, \qquad m_2 a = m_2 g - T_2. \tag{4.4}$$

Здесь учтено, что нить, связывающая тела, нерастяжима, поэтому $a_1 = a_2 = a$. Сложим эти первое и последнее уравнения, учтём второе, получаем:

$$a(m_2 + m_1) = T_1 - T_2 + m_2 g - \mu m_1 g. \tag{4.5}$$

На блок со стороны нити действуют силы натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$. По третьему закону Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$. Массивный блок вращается ускоренно под воздействием разности моментов сил натяжения нити. Запишем уравнение динамики вращательного движения:

$$I\varepsilon = M = T_2 R - T_1 R, \tag{4.6}$$

где M – суммарный момент сил, $I = mR^2/2$ - момент инерции диска, ε – угловое ускорение блока. Поскольку проскальзывания нити относительно блока нет, то скорость движения нити V должна быть равна скорости движения обода блока: $V = \omega R$. После дифференцирования этого выражения по времени получаем связь между ускорением нити a и угловым ускорением блока ε: $a = \varepsilon R$. Подставляя из этого выражения ε в (4.6), получаем:

$$T_2 - T_1 = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{mR\varepsilon}{2} = \frac{ma}{2}. \tag{4.7}$$

Используя уравнения (4.5) и (4.7), найдём

ответ: $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_2 + m_1 + m/2}$.

Задача 5. На тонкостенный цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение оси цилиндра.

Решение. Будем считать, что масса цилиндра m, а его радиус R. На диск действуют силы, которые заставляют его центр масс, находящийся на оси, двигаться с ускорением a. Кроме того, на него действует момент силы натяжения относительно оси цилиндра, который вызывает его вращение с угловым ускорением ε. Лента нерастяжимая, поэтому каждая точка ленты, которая отделилась от цилиндра, будет находиться в неподвижности относительно лабораторной системы отсчёта XOY. Это будет выполняться, если скорость движения центра масс цилиндра V равна скорости вращения внешней поверхности цилиндра: $\omega R = V$. Путём дифференцирования по времени этого равенства получим кинематическую взаимосвязь ускорений: $\varepsilon R = a$. (5.1)

Запишем II закон Ньютона для этого цилиндра:

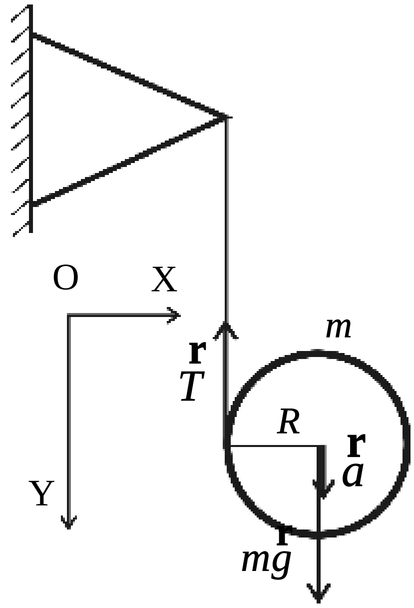
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$, OY: $ma = mg - T$. (5.2)

Используем основной закон динамики вращательного движения: $I\varepsilon = M = TR$. (5.3)

Учтём, что момент инерции тонкостенного цилиндра относительно его оси: $I = mR^2$. (5.4)

После преобразований системы уравнений (5.1) – (5.4), получаем

ответ: $a = g/2 = 4{,}9$ м/с^2.



Задачи для самостоятельного решения

5.1. Диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс. Зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = 1 + 0{,}4t + 0{,}01t^2 - 0{,}01t^3$ (рад). Для момента времени $t_1 = 2$ с найти:

а) угловой путь, пройденный к этому моменту времени φ_0;

б) угловую скорость ω_0;

в) угловое ускорение ε_0.

Определить для точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения, полное линейное ускорение в момент времени, когда угловая скорость диска равна нулю.

5.2. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2. За время $t_1 = 1$ мин оно изменило свою скорость от ω_0 до ω, сделав $N = 360$ оборотов. Найти ω_0 и ω.

5.3. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку стержня, удаленную на расстояние a от одного из его концов.

5.4. Шар массой m и радиусом R вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2$. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Найти работу, которую совершит момент сил за время от 0 до t_0.

5.5. Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время 1 мин частоту вращения от 300 об/мин до 180 об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Найти угловое ускорение колеса, момент сил торможения, работу сил торможения и число оборотов, сделанных колесом за время 1 мин.

5.5. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный цилиндр. Найти линейное ускорение a оси цилиндра.

5.6. Через неподвижный блок с моментом инерции I переброшена нить, на которой висят грузы разных масс m_1 и m_2. Каково будет натяжение нити по обе стороны блока?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные понятия: Момент импульса тела относительно оси и относительно полюса, закон сохранения момента импульса, работа момента силы, энергия вращательного движения тела, изотропность пространства.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятий момент импульса тела относительно оси и момент импульса тела относительно полюса. Какова связь между ними?

2. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

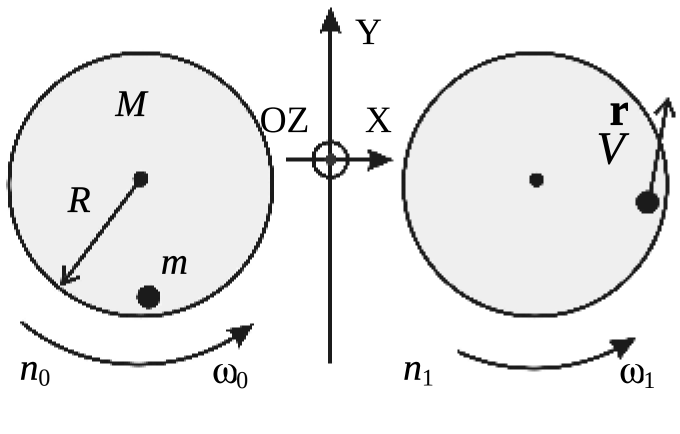
3. В каких системах отсчёта выполняется закон сохранения момента импульса?

4. Как определяется работа момента силы и энергия механической системы совершающей вращательное движение? Какова связь между ними?

5. Какова связь между законом сохранения момента импульса и изотропностью пространства?

Примеры решения задач

Задача 1. Платформа массой M = 240 кг в виде диска радиусом R = 3 м вращается по инерции, делая n_0 = 6 об/мин. На краю платформы стоит человек, масса которого m = 80 кг. С какой частотой n_1 будет вращаться платформа, если человек начнёт двигаться по краю со скоростью V = 1,5 м/с относительно платформы в направлении её вращения. Моментом силы трения, действующим в опоре, пренебречь.



Решение. Выберем систему отсчёта OXYZ, связанную с землёй. Вращение платформы с человеком происходит относительно оси OZ с угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi n_0$. Если пренебречь моментом силы трения, действующим в опоре, то момент импульса механической системы «платформа + человек» относительно оси вращения L_z сохраняется при любых перемещениях человека по платформе:

$$\left(I_{пл} + I_{чел}\right)\omega_0 = I_{пл}\omega_1 + I_{чел}\omega_2 . \qquad (1.1)$$

Радиус платформы равен R. Момент инерции человека относительно оси вращения считаем так же, как для материальной точки: $I_{чел} = mR^2$, а платформы – как для однородного диска: $I_{пл} = MR^2/2$. Когда человек начнёт двигаться по краю платформы, его угловая скорость станет равной $\omega_1 = 2\pi n_1$, а угловая скорость человека относительно системы отсчёта OXYZ станет равной:

$$\omega_2 = \frac{V_0}{R} = \frac{\omega_1 R + V}{R} = \omega_1 + \frac{V}{R}. \tag{1.2}$$

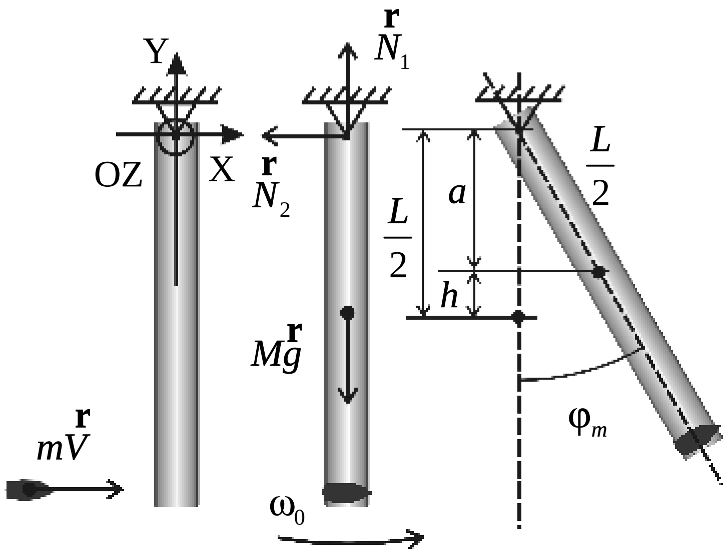
Здесь учтено, что скорость движения человека V_0 относительно неподвижной системы отсчёта OXYZ складывается из скорости вращения края платформы $\omega_1 R$ и скорости его движения относительно платформы V. Преобразуем выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 + mR^2\left(\omega_1 + \frac{V}{R}\right), \tag{1.3}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{mV}{R\left(M/2 + m\right)} = 0{,}428\ \text{рад/с}. \tag{1.4}$$

Ответ: $n_1 = \omega_1/2\pi = 0{,}0682$ об/с = 4,1 об/мин.

Задача 2. Стержень длиной L = 1,5 м и массой M = 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня ударяет пуля массой m = 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью V = 500 м/с, и застревает в стержне. 1) С какой угловой скоростью ω_0 начнет вращаться стержень? 2) На какой максимальный угол φ_m отклонится стержень после удара пули?



Решение. 1) В момент удара пули на механическую систему «стержень + пуля» действуют силы реакции опоры $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, а также сила тяжести $M\vec{g}$. Массой пули можно пренебречь, т.к. $m = M$. Моменты всех этих сил относительно оси вращения OZ равны нулю, поскольку линии действия сил проходят через ось вращения стержня, а значит плечо каждой внешней силы равно нулю. Вследствие этого, момент импульса системы относительно оси OZ будет сохраняться в момент удара. До удара момент импульса пули относительно оси вращения стержня был равен произведению импульса mV на плечо L:

$$mVL = I_{ст}\omega_0. \tag{2.1}$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец равен $I_{\text{ст}} = \dfrac{1}{3}ML^2$. Выразим начальную угловую скорость вращения стержня с пулей:

$$\omega_0 = \frac{3mVL}{ML^2} = \frac{3mV}{ML} = \frac{0{,}03 \cdot 500}{1{,}5 \cdot 10} = 1{,}0 \text{ рад/с.} \qquad (2.2)$$

2) Определим максимальный угол отклонения стержня после попадания в него пули. Поскольку стержень вместе с пулей будет двигаться под действием консервативной силы – силы тяжести, то механическая энергия этой системы будет сохраняться:

$$\frac{1}{2} I_{\text{ст}} \omega_0^2 = Mgh, \qquad (2.3)$$

где h – высота, на которую поднимется центр масс механической системы. Отсюда получим:

$$h = \frac{\omega_0^2 L^2}{6g}. \qquad (2.4)$$

Высота h связана с максимальным углом отклонения φ_m:

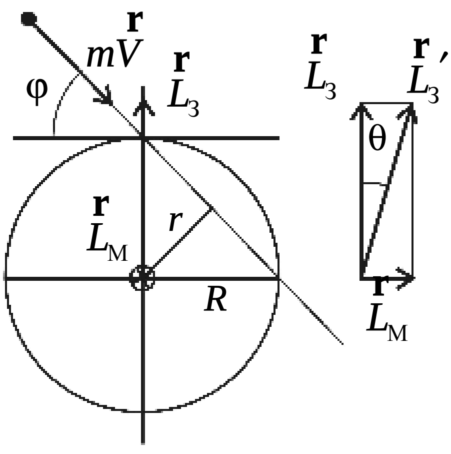
$$h = L/2 - a = L/2 - (L/2)\cos\varphi_m, \qquad (2.5)$$

$$\cos\varphi_m = \frac{L/2 - h}{L/2} = 1 - \frac{2h}{L} = 1 - \frac{\omega_0^2 L}{3g} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_m}{2}, \qquad (2.6)$$

$$\sin^2\frac{\varphi_m}{2} = \frac{\omega_0^2 L}{6g}, \qquad \sin\frac{\varphi_m}{2} = \omega_0\sqrt{\frac{L}{6g}}, \qquad (2.7)$$

$$\varphi_m = 2\arcsin\left(\omega_0\sqrt{\frac{L}{6g}}\right) = 18^\circ. \qquad (2.8)$$

Ответ: 1) $\omega_0 = 1$ рад/с; 2) $\varphi_m = 18^\circ$.



Задача 3. В районе Северного полюса Земли падает метеорит массой $m = 1000$ т со скоростью $V = 20$ км/с под углом $\varphi = 45^\circ$ к горизонту. На какой угол θ повернётся земная ось в результате соударения с метеоритом.

Решение. Механическая система «Земля + метеорит» является замкнутой, поэтому момент импульса в ней будет сохраняться:

$$\vec L_З + \vec L_М = \vec L_З', \qquad (3.1)$$

где $\vec{L}_З$, $\vec{L}_З'$ – момент импульса Земли относительно центра до и после попадания метеорита, $\vec{L}_М$ – момент импульса метеорита относительно центра Земли. Момент импульса Земли относительно центра определяется по формуле:

$$\vec{L}_З = I\vec{\Omega}, \qquad \vec{L}_З' = I\vec{\Omega}'. \tag{3.2}$$

Если считать Землю однородным шаром массой $M = 6\cdot 10^{24}$ кг и радиусом R = 6400 км, то её момент инерции относительно оси вращения равен:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = 10^{38}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2. \tag{3.3}$$

Период обращения Земли вокруг своей оси T = 24 ч = 86400 с, тогда угловая скорость вращения $\Omega = \Omega' = 2\pi/T = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ рад/с. Модуль момента импульса Земли не изменяется: $L_З = L_З' = I\Omega = 7{,}3\cdot 10^{33}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$, но направление вектора момента импульса изменяется при попадании метеорита. Момент импульса метеорита направлен перпендикулярно моменту импульса Земли, а модулю он равен:

$$L_М = mV\cdot r = mV\cdot R/\sqrt{2} = 9{,}1\cdot 10^{16}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}. \tag{3.4}$$

Угол поворота земной оси будет очень мал так, что:

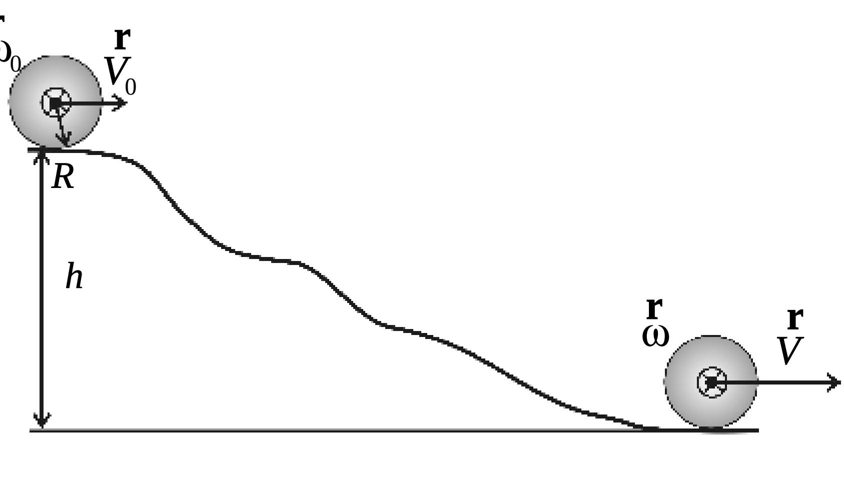
$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = L_М/L_З = 1{,}2\cdot 10^{-17}\ \text{рад} = 7{,}1\cdot 10^{-16}\ \text{град} = 2{,}6\cdot 10^{-12}\ \text{угл. сек.}$$

Ответ: $\theta = 2{,}6\cdot 10^{-12}$ угл. сек.

Задача 4. Определить скорость движения центра однородного шара, скатившегося без скольжения с горки высотой h = 40 см. Начальная скорость шара V_0 = 2,5 м/с.

Решение. Шар массой m и радиусом R движется только под действием консервативных сил: силы тяжести и силы реакции опоры. Поэтому его механическая энергия будет сохраняться на всей траектории движения.

В начальной момент времени шар обладал потенциальной энергией mgh, кинетической энергией поступательного движения $mV_0^2/2$ и кинетической энергией вращательного движения $I\omega_0^2/2$. После того как он скатился с высоты h, вся его энергия перешла в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. Запишем закон сохранения механической энергии:



$$mgh+\frac{mV_0^2}{2}+\frac{I\omega_0^2}{2}=\frac{mV^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.1)$$

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр масс равен $I=\frac{2}{5}mR^2$. Если нет проскальзывания между шаром и горкой, то в любой момент времени скорость движения центра масс шара V и его угловая скорость вращения ω должны быть связаны соотношением: $\omega=\frac{V}{R}$. Преобразуя (4.1), получаем:

$$2gh+\frac{7}{5}V_0^2=\frac{7}{5}V^2. \qquad (4.2)$$

Ответ: $V=\sqrt{V_0^2+\frac{10gh}{7}}$.

Задачи для самостоятельного решения

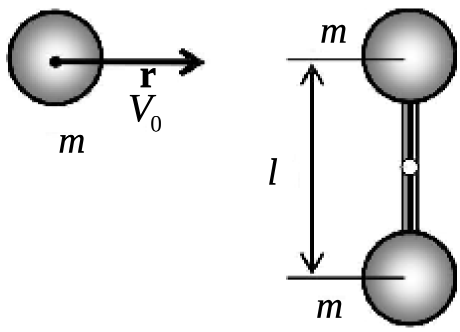
6.1. Платформа массой $M = 120$ кг в виде диска вращается по инерции, делая $n_0 = 10$ об/мин. В центре платформы стоит человек массой $m = 80$ кг. С какой частотой n_1 будет вращаться платформа, если человек перейдет на край платформы?

6.2. Пуля массой $m = 9$ г, летящая горизонтально со скоростью $V_0 = 200$ м/с, попадает в покоящийся на горизонтальном шероховатом столе деревянный шар массой $M = 3$ кг и радиусом $R = 10$ см на расстоянии $l = 2$ см ниже центра масс шара и застревает в нём. Найти угловую скорость ω_0 и угловое ускорение ε_0 шара в момент попадания пули. Считать, что $m << M$. Найти долю w потерянной механической энергии.

6.3. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия E шара равна 14 Дж. Определить кинетическую энергию E_1 поступательного и E_2 вращательного движения шара.

6.4. С наклонной плоскости высотой $h = 1$ м без начальной скорости скатываются два цилиндра одинаковой массы и одинакового радиуса: первый из них сплошной однородный, а второй – тонкостенный. Определить скорость центров масс цилиндров в конце спуска.

6.5. Атом массой m движется со скоростью V_0 и сталкивается упруго с неподвижной молекулой, состоящей из таких же атомов, удалённых на расстояние l. Определить момент импульса, который получит молекула при столкновении относительно оси, проходящей через центр масс.



ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ

Основные понятия: осциллятор, гармонические колебания, амплитуда, фаза, период колебаний, свободные, затухающие, вынужденные колебания.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими и, какими параметрами они характеризуются?
2. Что такое свободные колебания маятника и как записывается дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний?
3. Какими параметрами характеризуются затухающие колебания?
4. При каком условии реализуется апериодический процесс?
5. Что такое резонанс?

Примеры решения задач

Задача 1. Найти циклическую частоту и амплитуду гармонического колебания частицы, если на расстоянии x_1 от положения равновесия её ускорение равно a_1, а её скорость V_1.

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний частицы:

$$x(t) = A\sin\omega t. \qquad (1.1)$$

Тогда скорость и ускорение будут равны:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t, \qquad a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t. \qquad (1.2)$$

Выражения (1.1) и (1.2) запишем для момента времени t_1:

$$x_1 = A\sin\omega t_1, \qquad V_1 = A\omega\cos\omega t_1, \qquad a_1 = -A\omega^2\sin\omega t_1. \qquad (1.3)$$

Преобразуя эти уравнения, получаем

$$\textit{ответ}: \quad \omega = \sqrt{-\frac{a_1}{x_1}} \text{ и } A = \sqrt{\frac{V_1^2}{\omega^2} + x_1^2}.$$

Задача 2. Груз пружинного маятника совершает свободные колебания по закону $x(t) = x_0\sin\omega t$. Чему равно отношение кинетической энергии пружинного маятника к его потенциальной энергии в момент времени $t_0 = T/12$, где T – период колебаний маятника?

Решение. Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника соответственно равны:

$$E_K = \frac{mV^2}{2}, \qquad E_n = \frac{kx^2}{2}, \qquad (2.1)$$

где k – коэффициент жёсткости пружины, m – масса маятника. Циклическая частота свободных колебаний маятника определяется по формуле: $\omega = \sqrt{k/m}$. Определим скорость движения груза:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t . \tag{2.2}$$

Отсюда находим кинетическую и потенциальную энергии маятника:

$$E_к = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}\cos^2 \omega t = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2 \omega t , \qquad E_п = \frac{kx_0^2}{2}\sin^2 \omega t . \tag{2.3}$$

Частота колебаний с периодом колебаний связана следующей формулой $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Найдем отношение $E_к / E_п$ для момента времени $t_0 = T/12$.

$$\frac{E_k}{E_п} = \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} = \mathrm{ctg}^2\, \omega t = \mathrm{ctg}^2\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12}\right) = \mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 .$$

Ответ: $E_к / E_п = 3$.

Задача 3. Определить, насколько отстанут маятниковые часы за сутки, если их поднять на высоту h = 5 км над поверхностью Земли.

Решение. Период колебаний маятниковых часов определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} , \tag{3.1}$$

где g – ускорение свободного падения, l - длина маятника. В результате того, что часы поднимут на некоторую высоту, ускорение свободного падения уменьшится, а период колебаний возрастёт, следовательно, часы будут отставать. Найдем ускорение свободного падения на поверхности g и на высоте h над поверхностью Земли g' . Для этого воспользуемся формулой Ньютона:

$$g = G\frac{M}{R^2} , \qquad g' = G\frac{M}{(R+h)^2} , \tag{3.2}$$

где G = 6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, M = 6·10^{24} кг – масса Земли, R = 6400 км – радиус Земли. Период колебаний маятника на поверхности Земли T = 1 с, а над поверхностью – T' :

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{R+h}{R} , \tag{3.3}$$

$$\frac{T+\Delta T}{T} = 1 + \frac{\Delta T}{T} = 1 + \frac{h}{R} , \tag{3.4}$$

Период колебаний маятника на высоте h будет больше на ΔT, чем на поверхности:

$$\Delta T = T\frac{h}{R} = 1\,\text{с}\cdot\frac{5\,\text{км}}{6400\,\text{км}} = 7{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{с}. \qquad (3.5)$$

В сутках 86400 с. Тогда отставание маятника за сутки будет составлять:

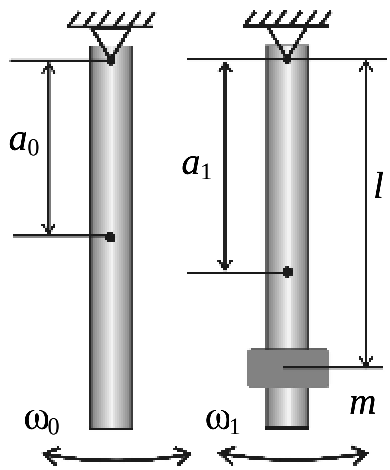
$$\Delta t = 86400\cdot 7{,}8\cdot 10^{-4} = 68\ \text{с}.$$

Ответ: $\Delta t = 68$ с.

Задача 4. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с циклической частотой $\omega_0 = 15$ рад/с. Если к нему прикрепить небольшое тело массой $m = 50$ г на расстоянии $l = 20$ см ниже оси, то циклическая частота колебаний становится $\omega_1 = 10$ рад/с. Найти момент инерции этого маятника относительно оси качания.

Решение. Допустим, что физический маятник имеет массу M, расстояние от оси до его центра масс – a_0, а момент инерции маятника относительно оси качания – I_0. Тогда, циклическая частота малых колебаний относительно оси равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mga_0}{I_0}}. \qquad (4.1)$$



Если прикрепить груз массой m к маятнику на расстоянии l ниже оси, то циклическая частота станет равной:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(M+m)ga_1}{I_0 + ml^2}}. \qquad (4.2)$$

Положение центра масс маятника с грузом сместится, а расстояние от оси до центра масс станет равным a_1:

$$a_1 = \frac{Ma_0 + ml}{M+m}. \qquad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получаем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Mga_0 + mgl}{I_0 + ml^2}}. \qquad (4.4)$$

Решая совместно уравнения (4.1) и (4.4), находим:

$$I_0 = ml^2\cdot\frac{\omega_1^2 - g/l}{\omega_0^2 - \omega_1^2} = 8\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2. \qquad (4.5)$$

Ответ: $I_0 = 8\cdot 10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 5. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле, где её потенциальная зависит от координаты x как $U(x) = U_0(1 - \cos\alpha x)$, где U_0 и α – некоторые постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Связь между силой и потенциальным полем определяется выражением:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -U_0\alpha\sin(\alpha x) \approx -U_0\alpha^2 x. \qquad (5.1)$$

Здесь учтено, что колебания малые, $\sin(\alpha x) \approx \alpha x$. С другой стороны, по II закону Ньютона

$$F_x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (5.2)$$

Приравнивая (5.1) и (5.2), получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний частицы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + U_0\alpha^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (5.3)$$

Циклическая частота колебаний равна: $\omega = \alpha\sqrt{\frac{U_0}{m}}$, а период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{U_0}}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Точка совершает колебания по гармоническому закону с амплитудой A = 1 см и частотой ω = 0,1 рад/с. Определить скорость V и ускорение a точки в момент времени, когда её смещение равно x = 0,5 см.

7.2. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период колебаний равен T_1 = 0,5 с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен T_2 = 0,6 с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого груза?

7.3. В однородный стержень длиной l массой M, подвешенный за один конец, попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью V. Написать уравнение колебаний стержня, если пуля попала в его нижний конец.

7.4.* Ареометр массой m плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом T. Считая колебания незатухающими, найти по данным этого опыта плотность жидкости, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра d.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ. I НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные понятия: идеальный газ, уравнение состояния идеального газа, универсальная газовая постоянная, количество вещества, работа газа, молярная теплоёмкость вещества, внутренняя энергия, I начало термодинамики, температура, изопроцессы.

Контрольные вопросы

1. Что такое идеальный газ? Напишите уравнение состояния идеального газа.
2. Как определяется работа газа?
3. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы и как она определяется для идеального газа?
4. Сформулируйте I начало термодинамики?
5. Какие существуют термодинамические изопроцессы?

Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде объёмом V = 30 л содержится идеальный газ при температуре t = 0° С. После того как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на Δp = 0,78 атм (без изменения температуры). Найти массу выпущенного газа Δm. Плотность данного газа при нормальных условиях ρ = 1,3 г/л.

Решение. Запишем уравнения состояния для идеального газа с молярной массой M. Учтём, что температура газа T и объём сосуда V сохраняются, а масса газа и давление в сосуде – нет:

$$p_1V = \frac{m_1}{M}RT, \qquad p_2V = \frac{m_2}{M}RT. \tag{1.1}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\left(p_1 - p_2\right)V = \frac{m_1 - m_2}{M}RT, \quad \Rightarrow \quad \Delta pV = \frac{\Delta m}{M}RT, \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \Delta p\frac{MV}{RT}. \tag{1.2}$$

Преобразуем уравнение состояния идеального газа, чтобы определить молярную массу газа M, считая, что газ находится при нормальных условиях (p = 1 атм = 10^5 Па, t = 0° С):

$$p = \frac{m}{V}\cdot\frac{RT}{M} = \rho\cdot\frac{RT}{M}, \qquad \Rightarrow \quad M = \rho\cdot\frac{RT}{p}. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\Delta m = \frac{\Delta p}{p}\rho V = \frac{0{,}78\,\text{атм}}{1\,\text{атм}}30\ \text{л}\cdot 1{,}3\frac{\text{г}}{\text{л}} = 30\ \text{г}. \tag{1.4}$$

Ответ: $\Delta m = 30$ г.

Задача 2. Объём одного моля кислорода возрастает по закону $V = \alpha/T$, где $\alpha = 3$ м^{3}К. Определить работу газа A при уменьшении температуры на 40 К и количество теплоты Q, подведённой к газу.

Решение. 1) Работа, совершённая газом, определяется по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \tag{2.1}$$

Выразим давление через объём и температуру с помощью уравнения состояния для идеального газа:

$$p = \frac{\nu RT}{V}, \tag{2.2}$$

где ν – количества вещества, R – универсальная газовая постоянная. Подставляя выражение (2.2) в (2.1) с учётом условия задачи ($T = \alpha/V$) , получаем:

$$A = \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R}{V^2} dV = -\nu R\left(\frac{\alpha}{V_2} - \frac{\alpha}{V_1}\right) = \nu R \Delta T = -1 \cdot 8{,}31 \cdot (-40) = 332 \text{ Дж.} \tag{2.3}$$

2) Найдём количество теплоты Q, которое должно быть подведено к газу в этом процессе. Воспользуемся I началом термодинамики:

$$Q = A + \Delta U . \tag{2.4}$$

Для этого необходимо определить приращение внутренней энергии кислорода ΔU в этом процессе:

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot (-40) = -831 \text{ Дж.} \tag{2.5}$$

Здесь учтено, что молярная теплоёмкость при постоянном объёме C_V двухатомного газа, каким является кислород, равна $5\boldsymbol{R}/2$.

Таким образом, $Q = 332 - 831 = -499$ Дж.

Ответ: $A = 332$ Дж , $Q = -499$ Дж.

Задача 3. Показать, что внутренняя энергия U воздуха в комнате не зависит от температуры, если наружное давление p постоянно. Вычислить U, если p равно нормальному атмосферному давлению. Объем комнаты $V = 40$ м^3.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле:

$$U = \nu C_V T , \tag{3.1}$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме. Если молекула газа имеет i степеней свободы, то $C_V = \frac{i}{2} R$. Воздух состоит преимущественно из двухатомных молекул азота N_2 и кислорода O_2, значит $i = 5$. Следовательно,

$$U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV = \frac{5}{2}\cdot 10^5 \cdot 40 = 10^7 \text{ Дж.} \qquad (3.2)$$

Ответ: $U = 10$ МДж.

Задача 4. Аргон при нормальных условиях имел объём V_1 = 0,2 м^3. Определить изменение внутренней энергии газа ΔU и работу A, совершённую газом, при его адиабатном расширении до объёма V_2 = 0,3 м^3.

Решение. 1) Определим приращение внутренней энергии газа ΔU при адиабатном расширении. Аргон является одноатомным газом, поэтому молекулы аргона имеют 3 степени свободы (i = 3). Значит, внутренняя энергия газа при температуре T определяется по формуле:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV. \qquad (4.1)$$

Приращение внутренней энергии в этом процессе равно:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right). \qquad (4.2)$$

Начальное давление $p_1 = 10^5$ Па. Конечное давление p_2 аргона определяется из уравнения адиабаты для идеального газа:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma, \qquad (4.3)$$

где γ – показатель адиабаты газа, который зависит от числа степеней свободы молекулы i:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}. \qquad (4.4)$$

Отсюда:

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = 10^5\left(\frac{0,2}{0,3}\right)^{\frac{5}{3}} = 0,509\cdot 10^5 \text{ Па.} \qquad (4.5)$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(0,509\cdot 10^5\cdot 0,3 - 10^5\cdot 0,2\right) = -4,7\cdot 10^3 \text{ Дж.} \qquad (4.6)$$

2) Определим работу газа A. Поскольку процесс является адиабатическим, то тепло к нему не подводится:

$$Q = A + \Delta U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\Delta U = 4,7\cdot 10^3 \text{ Дж.} \qquad (4.7)$$

Ответ: $\Delta U = -4,7$ кДж, $\quad A = 4,7$ кДж.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Сколько молекул газа содержится в баллоне объёмом $V = 40$ л при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 4$ МПа?

8.2. Определить плотность воздуха при нормальных условиях (давление $p = 1$ атм, температура $t = 0$ ºС).

8.3. $\nu = 1$ моль азота, находящийся при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $T = 273$ К), расширяется адиабатически в 5 раз. Найти изменение внутренней энергии газа и работу, совершённую при расширении.

8.4. Гелий совершил работу $A = 8$ кДж при расширении. Определить количество теплоты Q, подведённое к газу, если этот процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарически.

8.5. Водород массой $m_1 = 20$ г находится при температуре $T_1 = 300$ К. Сначала водород расширяется адиабатно, увеличив свой объём в пять раз, а затем сжимается при постоянной температуре до начального объёма. Определить температуру изотермического процесса T_2, полную работу, совершенную газом A. Изобразить процесс графически.

ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

$g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения тела на поверхности Земли;

$R = 8{,}31\ \text{Дж}/\text{моль}\cdot\text{К}$ – универсальная газовая постоянная;

$N_\text{А} = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: Учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2006, 2007, 2010. – 557 с.

2. Детлаф, А.А. Курс физики: Учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 7-е изд., стер. – М.: Академия, 2008.– 719 с.

3. Савельев, И.В. Курс физики Т.1: Механика, колебания и волны, молекулярная физика: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям в 3-х томах / И.В. Савельев – СПб: Лань, 2007, 2008. – 462 с.

4. Гуревич, С.Ю. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие по выполнению лабораторных работ / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Волегов, Е.В. Голубев, Е.Л. Шахин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 98 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ